

完備コホモロジーと p 進局所 Langlands 対応 (Completed cohomology and p -adic local Langlands correspondences)

By

今井 直毅 (Naoki IMAI) *

Abstract

In this survey paper, we explain a local-global compatibility for p -adic Langlands correspondences in the completed cohomology of modular curves after Emerton. We also explain its application to the Fontaine-Mazur conjecture and a compatibility between the local Langlands correspondence and the p -adic local Langlands correspondence.

序論

近年、局所 Langlands 対応の p 進版である p 進局所 Langlands 対応が、Breuil や Colmez をはじめとする多くの人々によって研究されてきた。Colmez による $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ に対する p 進局所 Langlands 対応の構成は (φ, Γ) 加群を用いた純粋に表現論的なものであるが、Colmez による一般的な構成ができる以前から、 p 進局所 Langlands 対応はモジュラー曲線のエタールコホモロジーのレベルに関する極限の完備化（完備コホモロジー）に現れるべきであるということが、Breuil によって予見されていた (cf. [Br, 1.1])。実際そのようなことが、付随する Weil-Deligne 表現がスペシャルになる場合には [Br, Théorème 5.1.6] において、可約な潜在的クリスタリン表現の場合には [BE, Théorème 5.7.3] において証明されていた。より一般的な p 進表現に対する p 進局所 Langlands 対応がモジュラー曲線の完備コホモロジーに現れるということは、[E2, 7.8] において p 進局所大域整合性として定式化され、[E4] において技術的な仮定の下で証明された。本稿では、この Emerton の結果について解説する。

まず 1 節において、 $\mathbb{Q}$ 上の GL_2 に対する大域 Langlands 対応のモジュラー曲線のエタールコホモロジーにおける実現および局所 Langlands 対応との整合性について復習

Received May 20, 2014. Revised March 19, 2015.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 11F70, 11F80.

Key Words: completed cohomology, Langlands correspondence.

*Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153-8914, Japan.

e-mail: naoki@ms.u-tokyo.ac.jp

© 2015 Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. All rights reserved.

する. 大域 Langlands 対応および局所 Langlands 対応については, 例えば [吉田] を参照されたい. 2 節では, 局所 Langlands 対応の変種である生成的局所 Langlands 対応について説明する. 生成的局所 Langlands 対応は普通の局所 Langlands 対応と比べて p 進的な族との相性がよく, p 進局所大域整合性の証明において重要になる. 3 節では, p 進局所 Langlands 対応および, その変形版について復習する. p 進局所 Langlands 対応の詳細については [Be] あるいは [中村] を参照されたい. 4 節では, モジュラー曲線の完備コホモロジーを導入し, その性質を調べる. 5 節では, 本稿で解説する p 進局所大域整合性の主定理を述べる. 6 節では, Emerton-Helm による生成的局所 Langlands 対応の族の特徴づけについて説明する. 7 節では, p 進局所大域整合性の族への一般化を述べる. この一般化を考えることが p 進局所大域整合性の証明において重要になる. 8 節では, 前節で考えた p 進局所大域整合性の族への一般化の証明のあらすじを説明する. 9 節では, p 進局所大域整合性の応用として, 技術的な仮定の下で Fontaine-Mazur 予想および p 進局所 Langlands 対応と局所 Langlands 対応の整合性を証明する. 10 節では, 関連する最近の進展について簡単にコメントした. 最後の付録 A では, 本稿で必要になる表現論のいくつかの用語について説明する.

§ 1. Langlands 対応

まず, $\mathbb{Q}$ 上の GL_2 に対する大域 Langlands 対応のモジュラー曲線のエタールコホモロジーにおける実現について復習する. $\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $A_f = \widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ とおく. $GL_2(\widehat{\mathbb{Z}})$ の十分小さい開部分群 K_f に対し, K_f レベル構造付きの $\mathbb{Q}$ 上のモジュラー曲線を $Y(K_f)$ と書く. $f: E_{K_f} \rightarrow Y(K_f)$ を $Y(K_f)$ の普遍楕円曲線とする. p を素数とする. k を 2 以上の整数とし, $\mathbb{Z}_p$ 加群のエタール局所系 $\mathcal{V}_k = \mathrm{Sym}^{k-2} R^1 f_* \mathbb{Z}_p$ を考える. 自然数 i に対し

$$H_{\mathrm{par}}^i(Y(K_f)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{V}_k) = \mathrm{Im} \left(H_c^i(Y(K_f)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{V}_k) \rightarrow H^i(Y(K_f)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{V}_k) \right)$$

とおき, これを放物型エタールコホモロジーという.

$$H_{\mathrm{par}}^1(\mathcal{V}_k) = \varinjlim_{K_f} H_{\mathrm{par}}^1(Y(K_f)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{V}_k)$$

とおく. 体 F に対し, F の絶対 Galois 群を G_F で表す. $Y(K_f)$ が $\mathbb{Q}$ 上定義されていたことから, $H_{\mathrm{par}}^1(\mathcal{V}_k)$ に $G_{\mathbb{Q}}$ が作用している. さらにレベル構造を用いて, $H_{\mathrm{par}}^1(\mathcal{V}_k)$ に $GL_2(A_f)$ の自然な作用を定めることができる. ここでは, [Ca1] で考えている $GL_2(A_f)$ の作用を $g \mapsto (g^t)^{-1}$ で捻った作用を考える (cf. [E4, §2]).

素数 ℓ に対し, $|\cdot|_{\ell}$ を $\mathbb{Q}_{\ell}$ の $|\cdot|_{\ell} = \ell^{-1}$ で正規化された ℓ 進絶対値とする. また, $\mathbb{Q}$ の無限素点 ∞ に対し, $|\cdot|_{\infty}$ を $\mathbb{R}$ の絶対値とする. $A = A_f \times \mathbb{R}$ とおき, $|\cdot|: A^{\times} \rightarrow \mathbb{R}^{\times}$ を $\prod_v |\cdot|_v$ により定める. ただし, ここで v は $\mathbb{Q}$ の素点を走る. 正規化された重さ k の尖点固有新形式 f に対し, $\Pi(f)^u$ を [Bu, 3.2, 3.6] で定めている f に付随するユニタリ保型表現とし, $\Pi(f) = \Pi(f)^u \otimes |\cdot|^{\frac{2-k}{2}}$ とおく. 同型 $\iota: \overline{\mathbb{Q}_p} \simeq \mathbb{C}$ を固定する.

定理 1.1 (cf. [La, §4]). $G_{\mathbb{Q}} \times GL_2(\mathbb{A}_f)$ 表現としての同型

$$H_{\text{par}}^1(\mathcal{V}_k)_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \simeq \bigoplus_f V_f \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \pi(f)$$

が存在する. ただし, 直和において f は, 正規化された重さ k の尖点固有新形式を動き, V_f は f に付随する $G_{\mathbb{Q}}$ の p 進表現を表し, $\pi(f)$ は $\Pi(f)$ の有限部分と同型 ι から得られる $GL_2(\mathbb{A}_f)$ の $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 上のスムーズ表現を表す. また, V_f は $\mathbb{Q}$ 上の GL_2 に対する大域 Langlands 対応によって $\Pi(f) \otimes |\cdot|^{-\frac{1}{2}}$ と対応している.

次に, 定理 1.1 と GL_2 に対する局所 Langlands 対応の関係について述べる. 局所体 F に対し, F の Weil 群を W_F で表す. 任意の素数 ℓ に対し,

$$\begin{aligned} \pi_{\ell}^{\text{WD}}: & \left\{ W_{\mathbb{Q}_{\ell}} \text{ の Frobenius 半単純な } \overline{\mathbb{Q}}_p \text{ 上 2 次元 Weil-Deligne 表現の同型類} \right\} \\ & \longrightarrow \left\{ GL_2(\mathbb{Q}_{\ell}) \text{ の } \overline{\mathbb{Q}}_p \text{ 上の既約スムーズ表現の同型類} \right\} \end{aligned}$$

を Tate の意味で正規化された局所 Langlands 対応とする (cf. [De, (3.2.5)]). Tate の正規化の利点として, V が $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体 E 上定義された Weil-Deligne 表現ならば $\pi_{\ell}^{\text{WD}}(V)$ も E 上定義できるということがある.

p と異なる素数 ℓ に対し, $W_{\mathbb{Q}_{\ell}}$ の $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 上の Weil-Deligne 表現の同型類は $W_{\mathbb{Q}_{\ell}}$ の $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 上の連続表現と対応するので, π_{ℓ}^{WD} によって, 連続表現に対する局所 Langlands 対応

$$\begin{aligned} \pi_{\ell}: & \left\{ W_{\mathbb{Q}_{\ell}} \text{ の Frobenius 半単純な } \overline{\mathbb{Q}}_p \text{ 上 2 次元連続表現の同型類} \right\} \\ & \longrightarrow \left\{ GL_2(\mathbb{Q}_{\ell}) \text{ の } \overline{\mathbb{Q}}_p \text{ 上の既約スムーズ表現の同型類} \right\} \end{aligned}$$

が定まる.

定理 1.1 における $\pi(f)$ を $\bigotimes'_{\ell} \pi_{\ell}(f)$ と制限テンソル積に分解したとき, p と異なる素数 ℓ に対して $V_f|_{W_{\mathbb{Q}_{\ell}}}$ の Frobenius 半単純化と $\pi_{\ell}(f)$ が局所 Langlands 対応 π_{ℓ} で対応するということが, Carayol [Ca1, Théorème (A)] によって証明されている. さらに, $V_f|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ に付随する Weil-Deligne 表現の Frobenius 半単純化と $\pi_p(f)$ が局所 Langlands 対応 π_p^{WD} で対応することが, レベルが p と素な場合は Scholl [Sc, Theorem 1.2.4.(ii)] によって, 一般には斎藤 [Sa, Theorem] によって証明されている. これらのことを, 大域 Langlands 対応が局所 Langlands 対応と整合的であるという.

しかし, 素点 p における整合性において, p 進表現に付随する Weil-Deligne 表現を取る際に表現の情報の一部が落ちている. p 進表現から情報を落とさずに大域 Langlands 対応との整合性を主張するのが, 本稿で解説する p 進局所大域整合性である.

§ 2. 生成的局所 Langlands 対応

この節では, 局所 Langlands 対応の変種である生成的局所 Langlands 対応について説明する.

まず生成的表現を、後で必要になる少し一般的な状況で定義する． Σ_0 を素数の有限集合とする． $G_{\Sigma_0} = \prod_{\ell \in \Sigma_0} GL_2(\mathbb{Q}_\ell)$ とおき、

$$P_{\Sigma_0} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_{\Sigma_0} \mid a \in \prod_{\ell \in \Sigma_0} \mathbb{Z}_\ell^\times, b \in \prod_{\ell \in \Sigma_0} \mathbb{Z}_\ell \right\}$$

$$N_{\Sigma_0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_{\Sigma_0} \mid b \in \prod_{\ell \in \Sigma_0} \mathbb{Z}_\ell \right\}$$

とおく．

Σ_0 が p を含まないと仮定する． k を標数 p の有限体とし、 k の有限次拡大体 $\tilde{k}$ を、全ての $\ell \in \Sigma_0$ に対して $\tilde{k}$ が 1 の ℓ 乗根をすべて含むようにとっておく．さらに、 $\ell \in \Sigma_0$ に対して、加法的な指標 $\psi_\ell: \mathbb{Q}_\ell \rightarrow W(\tilde{k})^\times$ を $\text{Ker } \psi_\ell = \mathbb{Z}_\ell$ となるようにとる． $(\psi_\ell)_{\ell \in \Sigma_0}$ によって定まる N_{Σ_0} の指標を ψ_{Σ_0} と書く．位相群 Γ と可換環 A に対して、 A 上のスムーズ Γ 表現の圏を $\text{Rep}_A(\Gamma)$ で表す．

$\tilde{A}$ を $W(\tilde{k})$ 代数とする． $\tilde{V} \in \text{Rep}_{\tilde{A}}(P_{\Sigma_0})$ に対し、 N_{Σ_0} が ψ_{Σ_0} で作用するような $\tilde{V}$ の最大商を $\tilde{V}_{\psi_{\Sigma_0}}$ とおくと、 $\tilde{V} \mapsto \tilde{V}_{\psi_{\Sigma_0}}$ によって関手

$$\Phi_{\tilde{A}}: \text{Rep}_{\tilde{A}}(P_{\Sigma_0}) \rightarrow \tilde{A}\text{-Mod}$$

が定まる．

命題 2.1. A を $W(k)$ 代数とする．関手 $\Phi_A: \text{Rep}_A(P_{\Sigma_0}) \rightarrow A\text{-Mod}$ であって、 $V \in \text{Rep}_A(P_{\Sigma_0})$ に対し

$$\Phi_A(V) \otimes_{W(k)} W(\tilde{k}) \simeq \Phi_{A \otimes_{W(k)} W(\tilde{k})}(V \otimes_{W(k)} W(\tilde{k}))$$

となるものが存在する．

証明．[EH, Proposition 3.1.4] から従う． □

K を $W(k)$ 代数である体とし、 Φ_K を命題 2.1 で定まる関手とする．

定義 2.2. V を K 上の絶対既約スムーズ許容 G_{Σ_0} 表現とする． $\Phi_K(V) \neq 0$ となるとき、 V は生成的であるという．

注意．定義 2.2 の $\Phi_K(V) \neq 0$ という条件は、 $\dim \Phi_K(V) = 1$ に変えても同じである (cf. [EH, Theorem 3.1.15]) ．

K 上のスムーズ G_{Σ_0} 表現 V に対し、 V の全ての既約部分表現の和を $\text{soc}(V)$ と書く．

定義 2.3. K 上のスムーズ G_{Σ_0} 表現 V が以下をみたすとき、本質的に絶対既約生成的であるという．

1. $\mathrm{soc}(V)$ が絶対既約かつ生成的である.
2. $\Phi_K(V/\mathrm{soc}(V)) = 0$.
3. V は, 長さ有限の部分表現の和になっている.

ℓ を素数とし, 局所類体論によって $|\cdot|_\ell$ を $W_{\mathbb{Q}_\ell}$ の指標とみなす. ここで, 局所類体論の同型の正規化は, 素元が幾何学的 Frobenius 元の持ち上げにうつるものを考える.

ℓ が p と異なるとする. V_ℓ を $\overline{\mathbb{Q}_p}$ 上の Frobenius 半単純な 2 次元連続 $W_{\mathbb{Q}_\ell}$ 表現とする. ある連続指標 $\chi: W_{\mathbb{Q}_\ell} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}^\times$ が存在して $V_\ell \simeq \chi|_\ell \oplus \chi$ となるとき $\pi'_\ell(V_\ell) = \mathrm{Ind}_{P_{\{\ell\}}}^{GL_2(\mathbb{Q}_\ell)}(\chi|_\ell \otimes \chi|_\ell^{-1})$ とおき, そうでないときは $\pi'_\ell(V_\ell) = \pi_\ell(V_\ell)$ とおく. すると $\pi'_\ell(V_\ell)$ は, 本質的に絶対既約生成的になっている. この π'_ℓ で定まる対応を生成的局所 Langlands 対応という.

同様に, $W_{\mathbb{Q}_p}$ の Frobenius 半単純な $\overline{\mathbb{Q}_p}$ 上 2 次元 Weil-Deligne 表現 V_p に対して, あるスムーズ指標 $\chi: W_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}^\times$ が存在して Weil-Deligne 表現として $V_p \simeq \chi|_p \oplus \chi$ となるとき $\pi'_p(V_p) = \mathrm{Ind}_{P_{\{p\}}}^{GL_2(\mathbb{Q}_p)}(\chi|_p \otimes \chi|_p^{-1})$ とおき, そうでないときは $\pi'_p(V_p) = \pi_p^{\mathrm{WD}}(V_p)$ とおく. この π'_p で定まる対応も, 生成的局所 Langlands 対応という.

§ 3. p 進局所 Langlands 対応

E を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体とする. E の整数環を $\mathcal{O}$ と書き, $\mathcal{O}$ の剰余体を k と書く. $\mathcal{O}$ の素元 ϖ を取る. $\epsilon: G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathcal{O}^\times$ を p 進円分指標とする. $G = GL_2(\mathbb{Q}_p)$ とおく. $G_{\mathbb{Q}_p}$ の E 上 2 次元連続表現に対して, G の E 上の Banach 表現を対応させる p 進局所 Langlands 対応を B で表す. ただし, p 進局所 Langlands 対応の正規化は, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の E 上 2 次元連続表現 V_E に対して, $B(V_E)$ の中心指標が $\det(V_E)\epsilon$ と局所類体論で対応するようにしておく. これは [E4, §3] で説明されている正規化であり, [Co2] における正規化を p 進円分指標で捻ったものになっている.

次の結果は, Fontaine-Mazur 予想への応用において重要な役割を果たす.

定理 3.1 ([Co2, Théorème VI.6.18]). V_E を E 上の 2 次元連続 $G_{\mathbb{Q}_p}$ 表現で de Rham なものとする. V_E の Hodge-Tate 重さが異なると仮定する. このとき $B(V_E)$ には G の作用が局所的に代数的になる零でない元が存在する.

$\bar{\epsilon}: G_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow k^\times$ を mod p 円分指標とする. $\bar{\rho}_0$ を k 上の 2 次元 $G_{\mathbb{Q}_p}$ 表現とし, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の k 上の任意の指標 χ に対して

$$\bar{\rho}_0 \not\simeq \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \bar{\epsilon} \end{pmatrix} \otimes \chi$$

と仮定する. π_0 を mod p Langlands 対応で $\bar{\rho}_0$ と対応する k 上のスムーズ許容 G 表現とする.

剰余体が k の有限次拡大である完備 Noether 局所 $\mathcal{O}$ 代数の圏を $\text{Comp}(\mathcal{O})$ で表す. $A \in \text{Comp}(\mathcal{O})$ に対し, その極大イデアルを $\mathfrak{m}_A$ と書く. 射が全て同型である圏を亜群という. 亜群の圏を (Groupoids) で表す.

定義 3.2. 関手 $\text{Def}(\bar{\rho}_0): \text{Comp}(\mathcal{O}) \rightarrow (\text{Groupoids})$ を次のように定める. $A \in \text{Comp}(\mathcal{O})$ に対して, 亜群 $\text{Def}(\bar{\rho}_0)(A)$ の対象は, A 上自由で階数 2 の連続 $G_{\mathbb{Q}_p}$ 表現 ρ と $G_{\mathbb{Q}_p}$ 同変な $A/\mathfrak{m}_A$ 線型同型 $\xi: \rho/\mathfrak{m}_A \rho \xrightarrow{\sim} \bar{\rho}_0 \otimes_k A/\mathfrak{m}_A$ の組であり, (ρ, ξ) から (ρ', ξ') への射は, $G_{\mathbb{Q}_p}$ 同変な A 線型同型 $\rho \xrightarrow{\sim} \rho'$ で ξ, ξ' と整合的なものである.

定義 3.3. $A \in \text{Comp}(\mathcal{O})$ とする. A 加群 X が $\mathfrak{m}_A$ 進的位相で完備かつ分離的で, 任意の自然数 i に対して $X/\mathfrak{m}_A^i X$ が $A/\mathfrak{m}_A^i$ 上自由であるとき, X は直正規化可能であるという.

定義 3.4. $A \in \text{Comp}(\mathcal{O})$ とする. π を A 上の G 表現とする. 任意の自然数 i に対して $\pi/\mathfrak{m}_A^i \pi$ が $A/\mathfrak{m}_A^i$ 上のスムーズ許容 G 表現になるとき, π は許容 G 表現であるという.

定義 3.5. 関手 $\text{Def}(\pi_0): \text{Comp}(\mathcal{O}) \rightarrow (\text{Groupoids})$ を次のように定める. $A \in \text{Comp}(\mathcal{O})$ に対して, 亜群 $\text{Def}(\pi_0)(A)$ の対象は, A 上の直正規化可能な許容 G 表現 π (cf. 定義 3.3) と G 同変な $A/\mathfrak{m}_A$ 線型同型 $\xi: \pi/\mathfrak{m}_A \pi \xrightarrow{\sim} \pi_0 \otimes_k A/\mathfrak{m}_A$ の組であり, (π, ξ) から (π', ξ') への射は, G 同変な A 線型同型 $\pi \xrightarrow{\sim} \pi'$ で ξ, ξ' と整合的なものである.

Colmez の Montreal 関手により, 関手の自然変換

$$\text{MF}: \text{Def}(\pi_0) \longrightarrow \text{Def}(\bar{\rho}_0)$$

が定まる (cf. [Ki, (2.2)]).

定義 3.6. 関手 $\text{Def}^*(\pi_0): \text{Comp}(\mathcal{O}) \rightarrow (\text{Groupoids})$ を次のように定める. $A \in \text{Comp}(\mathcal{O})$ に対して, 亜群 $\text{Def}^*(\pi_0)(A)$ は $\text{Def}(\pi_0)(A)$ の充満部分圏で, その対象は $(\pi, \xi) \in \text{Def}(\pi_0)(A)$ で π の中心指標が $\det(\text{MF}(\pi))_\epsilon$ と一致するもの全体とする. ただし, ここで $\det(\text{MF}(\pi))_\epsilon$ は, 局所類体論により $\mathbb{Q}_p^\times$ の指標とみなした.

$p > 2$ とすると, 関手の同値

$$(3.1) \quad \text{MF}: \text{Def}^*(\pi_0) \xrightarrow{\sim} \text{Def}(\bar{\rho}_0)$$

が存在することが, [E4, Theorem 3.3.13] と, $\text{Def}(\bar{\rho}_0)$ におけるクリスタリン表現に対応する点の Zariski 稠密性に関する結果 ([Ki, Corollary 1.3.12] および [Bo, Theorem 1.1] の後のコメント) からわかる.

§ 4. 完備コホモロジー

$\widehat{\mathbb{Z}}^p = \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell$ とおく. K^p を $GL_2(\widehat{\mathbb{Z}}^p)$ の十分小さい開部分群とし, s を自然数とする. 自然数 i に対し

$$\begin{aligned} H^i(K^p)_{\mathcal{O}/\varpi^s \mathcal{O}} &= \varinjlim_{K_p \subset GL_2(\mathbb{Z}_p)} H^i(Y(K^p K_p)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}/\varpi^s \mathcal{O}) \\ \widehat{H}^i(K^p)_{\mathcal{O}} &= \varprojlim_s H^i(K^p)_{\mathcal{O}/\varpi^s \mathcal{O}} \\ \widehat{H}_E^i &= \varinjlim_{K^p \subset GL_2(\widehat{\mathbb{Z}}^p)} \widehat{H}^i(K^p)_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} E \end{aligned}$$

とおき, $\widehat{H}_E^i$ の G の作用が局所的に代数的な元全体と局所的に解析的な元全体を, それぞれ $\widehat{H}_{E, \text{laig}}^i$ および $\widehat{H}_{E, \text{lan}}^i$ と書く.

W を GL_2 の $\mathbb{Q}_p$ 上有限次元既約代数的表現とする. $GL_2(\widehat{\mathbb{Z}})$ の十分小さい開部分群 K_f に対し, W に付随する $Y(K_f)$ 上の $\mathbb{Q}_p$ 係数のエタール局所系を $\mathcal{V}_W$ と書く. 自然数 i に対し,

$$\begin{aligned} H^i(\mathcal{V}_W) &= \varinjlim_{K_f} H^i(Y(K_f)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{V}_W), \\ H^i(\mathcal{V}_W)_E &= H^i(\mathcal{V}_W) \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \end{aligned}$$

とおき, $\widehat{H}_E^i$ の G の作用が局所的に W と同型な元全体を $\widehat{H}_{E, W\text{-laig}}^i$ と書く. $\mathfrak{gl}_2$ を GL_2 の Lie 環とする. このとき, 次が成り立つ.

命題 4.1 ([E1, Corollary 2.2.18]). $GL_2(\mathbb{A}_f)$ 同変なスペクトル系列

$$E_2^{i,j} = \text{Ext}_{\mathfrak{gl}_2}^i(W^\vee, \widehat{H}_{E, \text{lan}}^j) \implies H^{i+j}(\mathcal{V}_W)_E$$

が存在する.

さらに, このスペクトル系列の E_2 項の消滅に関して次が成り立つ.

補題 4.2 ([E1, Corollary 4.3.2]). $i \neq 0, 3$ のとき, $\text{Ext}_{\mathfrak{gl}_2}^i(W^\vee, \widehat{H}_{E, \text{lan}}^0) = 0$ となる.

これらを用いて次の命題を証明する.

命題 4.3. $G_{\mathbb{Q}} \times GL_2(\mathbb{A}_f)$ 表現としての同型

$$\bigoplus_{k \geq 2, n \in \mathbb{Z}} H^1(\mathcal{V}_k)_E \otimes (\text{Sym}^{k-2} E^2)^\vee \otimes E(n) \xrightarrow{\sim} \widehat{H}_{E, \text{laig}}^1$$

が存在する. ただし, Tate 捻り $E(1)$ に対して $G_{\mathbb{Q}}$ は p 進円分指標で作用し, $GL_2(\mathbb{A}_f)$ は

$$GL_2(\mathbb{A}_f) \xrightarrow{\det} \mathbb{A}_f^\times \rightarrow \mathbb{A}_f^\times / \mathbb{Q}^\times \simeq \widehat{\mathbb{Z}}^\times \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$$

によって作用する.

証明. 命題 4.1 と補題 4.2 より, 同型

$$H^1(\mathcal{V}_W)_E \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{gl}_2}(W^\vee, \widehat{H}_{E, \mathrm{lan}}^1)$$

を得る. すると, [E3, Proposition 4.2.4] より, 同型

$$H^1(\mathcal{V}_W)_E \otimes_{\mathbb{Q}_p} W^\vee \xrightarrow{\sim} \widehat{H}_{E, W\text{-lalg}}^1$$

が得られる. GL_2 の $\mathbb{Q}_p$ 上有限次元既約代数的表現は, 同型を除いて, $k \geq 2$ と $n \in \mathbb{Z}$ に対する $(\mathrm{Sym}^{k-2} \mathbb{Q}_p^2) \otimes \det^n$ で尽くされることから主張が従う. $\square$

§ 5. p 進局所大域整合性

$\rho: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL(V)$ を E 上の odd な 2 次元既約連続 $G_{\mathbb{Q}}$ 表現で, 有限個の素点を除いて不分岐なものとする. $G_{\mathbb{Q}}$ 安定な V の lattice を取り, その mod ϖ 還元を半単純化を $\bar{\rho}: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL(\bar{V})$ と書く. $\bar{\rho}$ は同型を除いて V の lattice のとり方によらない. 以下を仮定する.

1. $p > 2$.
2. $\bar{\rho}|_{G_{\mathbb{Q}(\zeta_p)}}$ は絶対既約である.
3. $G_{\mathbb{Q}_p}$ の k 上の任意の指標 χ に対して

$$\bar{\rho}|_{G_{\mathbb{Q}_p}} \not\cong \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \chi, \quad \bar{\rho}|_{G_{\mathbb{Q}_p}} \not\cong \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \bar{\epsilon} \end{pmatrix} \otimes \chi.$$

このとき, 次の定理の意味で, 大域 Langlands 対応と p 進局所 Langlands 対応は整合的になっている.

定理 5.1. $GL_2(\mathbb{A}_f)$ 表現としての同型

$$B(V|_{G_{\mathbb{Q}_p}}) \otimes \bigotimes_{\ell \neq p}' \pi_{\ell}'(V|_{W_{\mathbb{Q}_{\ell}}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{G_{\mathbb{Q}}}(V, \widehat{H}_E^1)$$

が存在する.

§ 6. 生成的局所 Langlands 対応の族

Emerton-Helm は, [EH] において, 生成的局所 Langlands 対応の p 進族が, いくつかの条件で特徴づけられることを示した. ここでは, 本稿で必要となる形で定理を述べる.

$G_{\Sigma_0} = \prod_{\ell \in \Sigma_0} GL_2(\mathbb{Q}_{\ell})$ とおく. $A \in \mathrm{Comp}(\mathcal{O})$ の素イデアル $\mathfrak{p}$ と A 加群 X に対して,

$$X[\mathfrak{p}] = \{x \in X \mid ax = 0 \text{ for all } a \in \mathfrak{p}\}$$

とおき, A の $\mathfrak{p}$ における剰余体を $\kappa(\mathfrak{p})$ と書く.

定理 6.1. $A \in \text{Comp}(\mathcal{O})$ とし, A が被約かつ $\mathcal{O}$ 上平坦であるとする. 各 $\ell \in \Sigma_0$ に対して, 連続表現 $\rho_\ell: G_{\mathbb{Q}_\ell} \rightarrow GL_2(A)$ が与えられているとする. スムーズ余許容 G_{Σ_0} 表現 X (cf. 定義 A.7) で, 以下を満たすものは高々一つしかない.

1. X は余捻じれがない (cf. 定義 A.5).
2. $(X/\varpi X)[\mathfrak{m}]$ は本質的に絶対既約生成的である.
3. $\text{Spec } A[1/p]$ の閉点からなる Zariski 稠密な部分集合 Π が存在し, 任意の $\mathfrak{p} \in \Pi$ に対し, G_{Σ_0} 表現の同型

$$X[\mathfrak{p}] \otimes_{\mathcal{O}} E \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\ell \in \Sigma_0} \pi'(\rho_{\ell, \mathfrak{p}})$$

が存在する. ただし, $\rho_{\ell, \mathfrak{p}} = \rho_\ell \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$.

証明. [EH, Theorem 6.2.1, Proposition 6.3.14] の双対版から従う. $\square$

定義 6.2. 定理 6.1 のような X が存在するとき, X は生成的局所 Langlands 対応の族によって $\{\rho_\ell\}_{\ell \in \Sigma_0}$ と対応しているという.

§ 7. p 進局所大域整合性の族

$\Sigma = \Sigma_0 \cup \{p\}$ とおき, Σ_0 を $\bar{\rho}$ が Σ の外で不分岐になるようにとっておく. $K_0^\Sigma = \prod_{\ell \notin \Sigma} GL_2(\mathbb{Z}_\ell)$ とおく.

K_p, K_{Σ_0} をそれぞれ G, G_{Σ_0} のコンパクト開部分群とする. 素数 $\ell \notin \Sigma$ に対し $H^1(Y(K_p K_{\Sigma_0} K_0^\Sigma)_{\overline{\mathbb{Q}}}, E)$ への Hecke 作用素 T_ℓ と S_ℓ を考える.

$$\mathbb{T}(K_p K_{\Sigma_0} K_0^\Sigma) = \mathcal{O}[T_\ell, S_\ell]_{\ell \notin \Sigma} \subset \text{End}\left(H^1(Y(K_p K_{\Sigma_0} K_0^\Sigma)_{\overline{\mathbb{Q}}}, E)\right)$$

とおき, $\mathbb{T}(K_p K_{\Sigma_0} K_0^\Sigma)$ に p 進位相を入れる.

$$\mathbb{T}(K_{\Sigma_0}) = \varprojlim_{K_p \subset G} \mathbb{T}(K_p K_{\Sigma_0} K_0^\Sigma)$$

とおき, $\mathbb{T}(K_{\Sigma_0})$ に射影極限位相を入れる. $\mathbb{T}(K_{\Sigma_0})$ は, $\widehat{H}^1(K_{\Sigma_0} K_0^\Sigma)_{\mathcal{O}}$ への Hecke 作用素 $\{T_\ell, S_\ell \mid \ell \notin \Sigma\}$ で位相的に生成される $\text{End}(\widehat{H}^1(K_{\Sigma_0} K_0^\Sigma)_{\mathcal{O}})$ の位相部分環と一致する.

定義 7.1. $\mathbb{T}(K_{\Sigma_0})$ の極大イデアル $\mathfrak{m}$ で, 剰余体が k になり,

$$\text{tr}(\bar{\rho}(\text{Frob}_\ell)) = T_\ell \pmod{\mathfrak{m}}, \quad \det(\bar{\rho}(\text{Frob}_\ell)) = \ell S_\ell \pmod{\mathfrak{m}}$$

となるものが存在するとき, K_{Σ_0} は $\bar{\rho}$ に対し許容可能レベルであるという. また, このとき $\mathfrak{m}$ は $\bar{\rho}$ から一意に決まり, $\mathbb{T}(K_{\Sigma_0})$ の $\mathfrak{m}$ での局所化を $\mathbb{T}(K_{\Sigma_0})_{\bar{\rho}}$ と書く.

注意. $\bar{\rho}$ は絶対既約かつ odd なので, Serre 予想 (cf. [KW1], [KW2], [田口]) の帰結として, 十分小さい K_{Σ_0} は $\bar{\rho}$ に対し許容可能レベルになる.

$\bar{\rho}$ に対する許容可能レベル $K_{\Sigma_0}, K'_{\Sigma_0} \subset G_{\Sigma_0}$ で $K_{\Sigma_0} \subset K'_{\Sigma_0}$ となるものに対し, 自然な射 $\mathbb{T}(K_{\Sigma_0})_{\bar{\rho}} \rightarrow \mathbb{T}(K'_{\Sigma_0})_{\bar{\rho}}$ が存在する.

$$\mathbb{T}_{\bar{\rho}, \Sigma} = \varprojlim_{K_{\Sigma_0}} \mathbb{T}(K_{\Sigma_0})_{\bar{\rho}}$$

とおく. ただし, ここで K_{Σ_0} は $\bar{\rho}$ に対する許容可能レベルを動く. $\mathbb{T}_{\bar{\rho}, \Sigma}$ は局所環になり, その極大イデアルを再び $\mathfrak{m}$ と書く. 素数 $\ell \notin \Sigma$ に対し, 任意の $\mathbb{T}(K_{\Sigma_0})_{\bar{\rho}}$ に射影して T_ℓ になる $\mathbb{T}_{\bar{\rho}, \Sigma}$ の元を再び T_ℓ と書く.

命題 7.2. $\bar{\rho}$ の $\mathbb{T}_{\bar{\rho}, \Sigma}$ への変形 $\rho_\Sigma^{\mathfrak{m}}$ で

$$\mathrm{tr}(\rho_\Sigma^{\mathfrak{m}}(\mathrm{Frob}_\ell)) = T_\ell, \quad \det(\rho_\Sigma^{\mathfrak{m}}(\mathrm{Frob}_\ell)) = \ell S_\ell$$

となるものが, ただ一つ存在する.

証明. 一意性は, $\mathbb{T}_{\bar{\rho}, \Sigma}$ が $\{T_\ell, S_\ell \mid \ell \notin \Sigma\}$ で位相的に生成されることからわかる. 存在は, 射影極限をとることによって [Ca2, Théorème 3] から従う. $\square$

定義 7.3. $A \in \mathrm{Comp}(\mathcal{O})$ とし, Γ を位相群とする. A 加群 V と, A 上のスムーズ余許容 Γ 表現 X に対し,

$$V \overset{\wedge}{\otimes}_A X = \varinjlim_H V \widehat{\otimes}_A X^H$$

とおく. ただし, 上の順極限において H は Γ の開部分群を動き, $V \widehat{\otimes}_A X^H$ は $V \otimes_A X^H$ の ϖ 進完備化を表す.

(3.1) より, $\mathrm{MF}(\pi_\Sigma^{\mathfrak{m}}) = \rho_\Sigma^{\mathfrak{m}}|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ となる $\pi_\Sigma^{\mathfrak{m}}$ が存在する.

$$\begin{aligned} H^1(K_{\Sigma_0})_{\mathcal{O}/\varpi^s \mathcal{O}, \bar{\rho}} &= \mathbb{T}(K_{\Sigma_0})_{\bar{\rho}} \otimes_{\mathbb{T}(K_{\Sigma_0})} H^1(K_{\Sigma_0} K_0^\Sigma)_{\mathcal{O}/\varpi^s \mathcal{O}} \\ \widehat{H}^1(K_{\Sigma_0})_{\mathcal{O}, \bar{\rho}} &= \varprojlim_s H^1(K_{\Sigma_0})_{\mathcal{O}/\varpi^s \mathcal{O}, \bar{\rho}} \\ \widehat{H}_{\mathcal{O}, \bar{\rho}, \Sigma}^1 &= \varinjlim_{K_{\Sigma_0} \subset G_{\Sigma_0}} \widehat{H}^1(K_{\Sigma_0})_{\mathcal{O}, \bar{\rho}} \end{aligned}$$

とおく. さらに

$$\pi_{\Sigma_0}(\rho_\Sigma^{\mathfrak{m}}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{T}_{\bar{\rho}, \Sigma}[G_{\mathbb{Q}} \times G]}(\rho_\Sigma^{\mathfrak{m}} \otimes_{\mathbb{T}_{\bar{\rho}, \Sigma}} \pi_\Sigma^{\mathfrak{m}}, \widehat{H}_{\mathcal{O}, \bar{\rho}, \Sigma}^1)$$

とおく. 代入によって定まる $\mathbb{T}_{\bar{\rho}, \Sigma}[G_{\mathbb{Q}} \times G \times G_{\Sigma_0}]$ 加群としての自然な射

$$\mathrm{ev}_{\pi_{\Sigma_0}(\rho_\Sigma^{\mathfrak{m}})}: \rho_\Sigma^{\mathfrak{m}} \otimes_{\mathbb{T}_{\bar{\rho}, \Sigma}} \pi_\Sigma^{\mathfrak{m}} \overset{\wedge}{\otimes}_{\mathbb{T}_{\bar{\rho}, \Sigma}} \pi_{\Sigma_0}(\rho_\Sigma^{\mathfrak{m}}) \rightarrow \widehat{H}_{\mathcal{O}, \bar{\rho}, \Sigma}^1$$

を考える.

定理 7.4. $\text{End}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(\bar{V}) = k$ と仮定する. このとき $\text{ev}_{\pi_{\Sigma_0}(\rho_{\Sigma}^{\text{m}})}$ は同型である.

この定理を用いて, $\pi_{\Sigma_0}(\rho_{\Sigma}^{\text{m}})$ の性質を調べると, 次が得られる. 証明は [E4, Theorem 6.4.11] を参照.

系 7.5. $\text{End}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(\bar{V}) = k$ と仮定する. このとき $\pi_{\Sigma_0}(\rho_{\Sigma}^{\text{m}})$ は, 生成的局所 Langlands 対応の族によって, $\{\rho_{\Sigma}^{\text{m}}|_{G_{\mathbb{Q}_\ell}}\}_{\ell \in \Sigma_0}$ と対応している.

$\text{End}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(\bar{V}) = k$ の場合, 同型 $\text{ev}_{\pi_{\Sigma_0}(\rho_{\Sigma}^{\text{m}})}$ の特殊化を考えることによって, 定理 5.1 を示すことができる. $\text{End}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(\bar{V}) = k$ でないときは, 定理 7.4 は, より弱い形 (cf. [E4, Theorem 6.4.20]) でしか証明されていないが, 定理 5.1 への応用上はそれで十分である. 本稿では, 簡単のため $\text{End}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(\bar{V}) = k$ の場合のみを扱う.

§ 8. 証明のあらすじ

この節では, 定理 7.4 の証明のあらすじについて述べる. 以下, この節の終わりまで, $\text{End}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(\bar{V}) = k$ を仮定する. まず, 一般論として次が成り立つ.

補題 8.1 ([E4, Lemma C.46]). $A \in \text{Comp}(\mathcal{O})$ とし, Γ を位相群とする. X を直正規化可能な A 加群とし, Y を A 上のスムーズ余許容 Γ 表現とし, W を $\mathcal{O}$ 上平坦な A 加群とする. A 加群の射 $f: X \overset{\wedge}{\otimes}_A Y \rightarrow W$ に対し, 以下は同値である.

1. f が単射かつ $\text{Coker } f$ は $\mathcal{O}$ 加群として捻じれがない.
2. f から誘導される射

$$(X/\mathfrak{m}_A X) \otimes_k (Y/\varpi Y)[\mathfrak{m}_A] \rightarrow (W/\varpi W)[\mathfrak{m}_A]$$

が単射である.

この補題を用いると次が示せる.

命題 8.2. $\text{ev}_{\pi_{\Sigma_0}(\rho_{\Sigma}^{\text{m}})}$ は単射である.

証明. 簡単のため, $\bar{V}|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ が絶対既約の場合を考える.

$$H_{k,\bar{\rho},\Sigma}^1 = \varinjlim_{K_{\Sigma_0} \subset G_{\Sigma_0}} H^1(K_{\Sigma_0})_{k,\bar{\rho}}$$

とおく. 補題 8.1 より, 代入写像

$$(8.1) \quad \bar{\rho} \otimes_k \bar{\pi} \otimes_k \text{Hom}_{k[G_{\mathbb{Q}} \times G]}(\bar{\rho} \otimes_k \bar{\pi}, H_{k,\bar{\rho},\Sigma}^1[\mathfrak{m}]) \rightarrow H_{k,\bar{\rho},\Sigma}^1[\mathfrak{m}]$$

が単射になることを示せばよい. $\bar{\rho}$ は絶対既約なので, 代入写像

$$\bar{\rho} \otimes_k \text{Hom}_{k[G_{\mathbb{Q}}]}(\bar{\rho}, H_{k,\bar{\rho},\Sigma}^1[\mathfrak{m}]) \rightarrow H_{k,\bar{\rho},\Sigma}^1[\mathfrak{m}]$$

は単射である. よって, (8.1) が単射であることを示すには, 代入写像

$$(8.2) \quad \pi \otimes_k \operatorname{Hom}_{k[G_{\mathbb{Q}} \times G]}(\bar{\rho} \otimes_k \pi, H_{k, \bar{\rho}, \Sigma}^1[\mathfrak{m}]) \rightarrow \operatorname{Hom}_{k[G_{\mathbb{Q}}]}(\bar{\rho}, H_{k, \bar{\rho}, \Sigma}^1[\mathfrak{m}])$$

が単射であることを示せばよい. $\bar{V}|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ が絶対既約であることから, π も絶対既約である. よって, (8.2) が単射でないと仮定すると, ある非自明な元

$$f \in \operatorname{Hom}_{k[G_{\mathbb{Q}} \times G]}(\bar{\rho} \otimes_k \pi, H_{k, \bar{\rho}, \Sigma}^1[\mathfrak{m}])$$

が存在し, (8.2) の $\pi \otimes_k kf$ への制限が零射になる. これは (8.2) の射の定義から f が非自明であることに矛盾する. よって, (8.2) が単射になることが示された. $\square$

あとは, $\operatorname{ev}_{\pi_{\Sigma_0}(\rho_{\Sigma}^{\mathfrak{m}})}$ が全射であることを示せばよい. そのためにいくつか補題を準備する.

補題 8.3. K_p を G のコンパクト開部分群とし, K_{Σ_0} を G_{Σ_0} の十分小さい開部分群とする. このとき, $H^1(K_{\Sigma_0})_{\mathcal{O}/\varpi^s \mathcal{O}, \bar{\rho}}$ は $(\mathcal{O}/\varpi^s \mathcal{O})[K_p]$ 加群として単射的.

証明. M を $\mathcal{O}/\varpi^s \mathcal{O}$ 上の有限生成 K_p 表現とする. M の Pontryagin 双対 $M^{\vee}$ を $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}/\varpi^s \mathcal{O}}(M, \mathcal{O}/\varpi^s \mathcal{O})$ で定める. K'_p を K_p の正規開部分群とし, $\mathcal{M}^{\vee}$ を $M^{\vee}$ から得られる $Y(K'_p K_{\Sigma_0} K_0^{\Sigma})$ 上のエタール局所系とする. このとき,

$$(8.3) \quad \operatorname{Hom}_{K_p}(M, H^1(K_{\Sigma_0})_{\mathcal{O}/\varpi^s \mathcal{O}}) \simeq \varinjlim_{K'_p} H^1(Y(K'_p K_{\Sigma_0} K_0^{\Sigma})_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{M}^{\vee})^{K_p}$$

が成り立つ. 一方, Hochschild-Serre スペクトル系列から, 完全系列

$$(8.4) \quad \begin{aligned} 0 &\rightarrow \varinjlim_{K'_p} H^1(K_p/K'_p, H^0(Y(K_p K_{\Sigma_0} K_0^{\Sigma})_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{M}^{\vee})) \\ &\rightarrow H^1(Y(K_p K_{\Sigma_0} K_0^{\Sigma})_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{M}^{\vee}) \rightarrow \varinjlim_{K'_p} H^1(Y(K'_p K_{\Sigma_0} K_0^{\Sigma})_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{M}^{\vee})^{K_p} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

が得られる. $\bar{\rho}$ は絶対既約なので, (8.3) と (8.4) を $\bar{\rho}$ に対応する極大イデアル $\mathfrak{m}$ で局所化すると 0 次のコホモロジーの寄与が消えて,

$$H^1(Y(K_p K_{\Sigma_0} K_0^{\Sigma})_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{M}^{\vee})_{\bar{\rho}} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{K_p}(M, H^1(K_{\Sigma_0})_{\mathcal{O}/\varpi^s \mathcal{O}, \bar{\rho}})$$

が得られる. よって主張を示すには, $\mathcal{O}/\varpi^s \mathcal{O}$ 上の有限生成 K_p 表現の短完全系列

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$$

に対して, その Pontryagin 双対から定まるエタール局所系を

$$0 \rightarrow \mathcal{M}_3^{\vee} \rightarrow \mathcal{M}_2^{\vee} \rightarrow \mathcal{M}_1^{\vee} \rightarrow 0$$

と書いたときに,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(Y(K_p K_{\Sigma_0} K_0^\Sigma)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{M}_3^\vee)_{\overline{\rho}} &\rightarrow H^1(Y(K_p K_{\Sigma_0} K_0^\Sigma)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{M}_2^\vee)_{\overline{\rho}} \\ &\rightarrow H^1(Y(K_p K_{\Sigma_0} K_0^\Sigma)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{M}_1^\vee)_{\overline{\rho}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

が完全系列であることを示せばよい. これは, $\overline{\rho}$ に対応する極大イデアル $\mathfrak{m}$ で局所化すると 0 次のコホモロジーが消えることから従う. $\square$

位相群 Γ と位相環 A に対して, $\mathcal{C}(\Gamma, A)$ で Γ 上の A に値を持つ連続関数全体の集合を表し, $f \in \mathcal{C}(\Gamma, A)$ と $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ に対して, $(\gamma f)(\gamma') = f(\gamma^{-1}\gamma')$ と定めることによって, $\mathcal{C}(\Gamma, A)$ を Γ 表現とみなす.

補題 8.4. K_p を G の副 p 開部分群とし, K_{Σ_0} を G_{Σ_0} の十分小さい開部分群とする. このとき, ある自然数 r が存在して, K_p 表現として $\widehat{H}^1(K_{\Sigma_0})_{\mathcal{O}, \overline{\rho}} \simeq \mathcal{C}(K_p, \mathcal{O})^r$ となる.

証明. ある自然数 r が存在して, K_p 表現として

$$(8.5) \quad H^1(K_{\Sigma_0})_{\mathcal{O}/\varpi^s \mathcal{O}, \overline{\rho}} \simeq \mathcal{C}(K_p, \mathcal{O}/\varpi^s \mathcal{O})^r$$

となることを示せばよい. $H^1(K_{\Sigma_0})_{\mathcal{O}/\varpi^s \mathcal{O}, \overline{\rho}}$ がスムーズ許容的であることに注意すると, (8.5) を示すためには, Pontryagin 双対を取って, $(H^1(K_{\Sigma_0})_{\mathcal{O}/\varpi^s \mathcal{O}, \overline{\rho}})^\vee$ が $(\mathcal{O}/\varpi^s \mathcal{O})[[K_p]]$ 上自由であることを示せばよい. これは $(\mathcal{O}/\varpi^s \mathcal{O})[[K_p]]$ が局所環であることと, 補題 8.3 から従う. $\square$

$GL_2(\mathbb{Z}_p)$ の E 上の連続表現 X に対して, X の元で $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ の作用が代数的である元全体を $X_{GL_2(\mathbb{Z}_p)\text{-alg}}$ と書く.

補題 8.5. $K_{\Sigma_0} \subset G_{\Sigma_0}$ を許容可能レベルとする. このとき $(\widehat{H}^1(K_{\Sigma_0})_{E, \overline{\rho}})_{GL_2(\mathbb{Z}_p)\text{-alg}}$ は $\widehat{H}^1(K_{\Sigma_0})_{E, \overline{\rho}}$ の中で稠密である.

証明. 補題 8.4 を用いて, ある自然数 r が存在して, $\widehat{H}^1(K_{\Sigma_0})_{E, \overline{\rho}}$ が $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ の表現として $\mathcal{C}(GL_2(\mathbb{Z}_p), \mathcal{O})^r$ の位相的な直和因子になることが示せる. Mahler 展開 (cf. [Co1, Théorème I.2.3]) によって, $\mathcal{C}(GL_2(\mathbb{Z}_p), \mathcal{O})$ の中で多項式の空間が稠密であることがわかるので, 主張が従う. $\square$

定義 8.6. $\mathfrak{p}$ を $\text{Spec } \mathbb{T}_{\overline{\rho}, \Sigma}[1/p]$ の閉点とする. $\mathfrak{p}$ に対応する

$$\text{Spec } \mathbb{T}_{\overline{\rho}, \Sigma}[1/p] \rightarrow \text{Spec } \kappa(\mathfrak{p})$$

が重さ 2 以上の尖点固有保型形式の Hecke 固有値から定まるとき, $\mathfrak{p}$ は古典的であるという.

$\mathrm{Spec} \mathbb{T}_{\bar{\rho}, \Sigma}[1/p]$ の古典的な閉点のうちで, 対応する Galois 表現が p でクリスタリンであるものの全体の集合を $\mathcal{C}$ とかく.

命題 8.7. $\bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathcal{C}} \hat{H}_{E, \bar{\rho}, \Sigma}^1[\mathfrak{p}]_{\mathrm{al}}^{\mathrm{alg}}$ は $\hat{H}_{E, \bar{\rho}, \Sigma}^1$ の中で稠密である.

証明. 命題 4.3 と素点 p においてレベルがない場合の局所大域整合性 [Sc, Theorem 1.2.4] から

$$E[G](\hat{H}_{E, \bar{\rho}, \Sigma}^1)_{GL_2(\mathbb{Z}_p)\text{-alg}} = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathcal{C}} \hat{H}_{E, \bar{\rho}, \Sigma}^1[\mathfrak{p}]_{\mathrm{al}}^{\mathrm{alg}}$$

がわかる. これと補題 8.5 より, 主張が従う. $\square$

ここで表現論の用語を一つ定義する.

定義 8.8. $A \in \mathrm{Comp}(\mathcal{O})$ とする. A 上の G 表現 X は, 以下の条件をみたすとき, ϖ 進的な許容表現であるという.

1. X は ϖ 進的に完備かつ分離的である.
2. X の $\mathcal{O}$ 捻じれ部分を $X[\varpi^\infty]$ と書くと, ある自然数 i が存在して, $X[\varpi^\infty]$ は ϖ^i 倍で消える.
3. 任意の自然数 i に対し, $X/\varpi^i X$ は G のスムーズ表現であり, $X/\varpi^i X$ の任意の元 $\bar{x}$ に対し, ある自然数 j が存在し, $\mathfrak{m}_A^j \bar{x} = 0$ となる.
4. $(X/\varpi X)[\mathfrak{m}_A]$ は $A/\mathfrak{m}_A$ 上のスムーズ許容 G 表現になる.

表現論の一般論として次が成り立つ.

補題 8.9 ([E4, Proposition 3.1.3]). $A \in \mathrm{Comp}(\mathcal{O})$ とし, $f: X_1 \rightarrow X_2$ を A 上の ϖ 進的な許容 G 表現の間の $A[G]$ 加群としての射とする. このとき, f が誘導する $(A \otimes_{\mathcal{O}} E)[G]$ 加群の射

$$f \otimes \mathrm{id}_E: X_1 \otimes_{\mathcal{O}} E \rightarrow X_2 \otimes_{\mathcal{O}} E$$

の像は閉である.

命題 8.10 (cf. [E4, Theorem 6.4.7] の証明). $\mathrm{ev}_{\pi_{\Sigma_0}(\rho_{\Sigma}^{\mathrm{m}})}$ は全射である.

証明. クリスタリン表現に対する p 進局所 Langlands 対応が具体的に記述できること (cf. [BB]) を用いて, $\mathrm{ev}_{\pi_{\Sigma_0}(\rho_{\Sigma}^{\mathrm{m}})}$ の像が $\bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathcal{C}} \hat{H}_{E, \bar{\rho}, \Sigma}^1[\mathfrak{p}]_{\mathrm{al}}^{\mathrm{alg}}$ を含むことを証明できる. 補題 8.9 を用いて, $\mathrm{ev}_{\pi_{\Sigma_0}(\rho_{\Sigma}^{\mathrm{m}})}$ の像が閉になることを示せるので, 命題 8.7 より主張が従う. $\square$

§ 9. 応用

最後に, いくつかの応用について述べる.

定理 9.1 (Fontaine-Mazur 予想). V を E 上の odd な 2 次元既約連続 $G_{\mathbb{Q}}$ 表現で, 有限個の素点を除いて不分岐なものとし, 5 節で課した条件をみたしていると仮定する. さらに, $V|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ が de Rham で Hodge-Tate 重さが異なるとする. このとき V は, 重さが 2 以上の尖点固有新形式に付随する Galois 表現の指標による捻りになっている.

証明. 定理 5.1 より, G 表現の単射準同型

$$(9.1) \quad B(V|_{G_{\mathbb{Q}_p}}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{G_{\mathbb{Q}}}(V, \hat{H}_E^1)$$

が存在する. (9.1) から局所的に代数的な元全体を取ると, 定理 3.1 より,

$$\mathrm{Hom}_{G_{\mathbb{Q}}}(V, \hat{H}_{E, \mathrm{la}}^1) \neq 0$$

を得る. これと, 命題 4.3 より主張が得られる. $\square$

定理 9.2. V_E を E 上の 2 次元連続 $G_{\mathbb{Q}_p}$ 表現で de Rham なものとする. V_E^{WD} を V_E に付随する Weil-Deligne 表現とする. V_E の Hodge-Tate 重さを a, b とし, $a < b$ と仮定する. このとき $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ 表現としての同型

$$B(V_E)_{\mathrm{la}} \xrightarrow{\sim} \pi'_p(V_E^{\mathrm{WD}}) \otimes (\mathrm{Sym}^{b-a-1} E^2) \otimes \det^{a+1}$$

が存在する.

証明. あらすじのみ述べる. V_E^{WD} が可約な場合は [Co2, Théorème VI.6.50] で証明されているので, ここでは V_E^{WD} が既約な場合を扱う. 円分指標で捻ることによって $b = 0$ としてよい. $k = 1 - a$ とおく.

このとき, V_E を不分岐指標で捻ったものに取り換え, E を有限次拡大体で取り換えることによって, 次をみたすような重さ k の尖点固有新形式 f を見つけることができる.

1. f に付随する保型表現 $\Pi(f)$ の p 成分は, 同型 $\iota: \overline{\mathbb{Q}}_p \simeq \mathbb{C}$ で $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 上の表現とみなすと, $\pi'_p(V_E^{\mathrm{WD}})$ と同型である.
2. f に付随する Galois 表現 V_f は 5 節における $\bar{\rho}$ の仮定をみたす.

[Co2, Théorème VI.6.42] において, $B(V_E)_{\mathrm{la}}$ が V_E^{WD} と V_E の Hodge-Tate 重さ a, b にしかよらないことが, 証明されているので, $V_E = V_f|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ の場合に定理の主張が成り立つことを示せばよい.

$\Pi(f)$ の導手を N とし,

$$K_1^p(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \prod_{\ell \neq p} GL_2(\mathbb{Z}_{\ell}) \mid c \equiv 0 \pmod{N}, d \equiv 1 \pmod{N} \right\}$$

とおく. V_f に対して定理 5.1 を使って,

$$(9.2) \quad B(V_E) \otimes \bigotimes'_{\ell \neq p} \pi'_\ell(V_f|_{W_{\mathbb{Q}_\ell}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{G_{\mathbb{Q}}}(V_f, \hat{H}_E^1)$$

を得る. (9.2) から局所的に代数的な元全体を取って, さらに $K_1^p(N)$ 不変部分を取ると, 命題 4.3 より

$$B(V_E)_{\text{lal}} \simeq \pi'_p(V_E^{\text{WD}}) \otimes (\text{Sym}^{k-2} E^2) \otimes \det^{2-k}$$

が得られる. □

§ 10. 最近の進展

完備コホモロジーと p 進局所 Langlands 対応については, [E4] 以降も盛んに研究がおこなわれている. この節では, それらの研究のうちで特に [E4] と関係の深いものについて, いくつか簡単にコメントする. 以下では, 技術的な条件を省略したところもあるので, 正確な主張については各論文を参照されたい.

モジュラー曲線の局所版, あるいはその高次元化である Lubin-Tate 空間の完備コホモロジーは, 現時点では一般には構成されていない p 進局所 Langlands 対応を実現することが期待されている. [Ch] では, [E4] の結果を用いて, $G_{\mathbb{Q}}$ の副保型的な 2 次元 p 進表現の $G_{\mathbb{Q}_p}$ への制限として得られる絶対既約表現に対し, p 進局所 Langlands 対応が $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ に対する Lubin-Tate 空間の完備コホモロジーに現れることを証明している.

[CS] では, [E4] と同様の手法を用いて, p で分裂する 2 変数定符号ユニタリ群に付随する数論的多様体の完備コホモロジーを, p 進局所 Langlands 対応および局所 Langlands 対応を用いて記述している. ここで, 考えている数論的多様体は 0 次元になっており, 完備コホモロジーは関数空間とみなすことができる.

p 進局所 Langlands 対応の一般化を考えるうえで自然に現れる予想として, Breuil-Schneider 予想がある. 以下で, この予想について大雑把に説明する. 詳細は [BS, Conjecture 4.3] を参照されたい.

F を p 進体として, E が F の $\mathbb{Q}_p$ 上の Galois 閉包を含むとする. n を自然数とし, X を W_F の E 上 n 次元 Weil-Deligne 表現とする. $GL_n(F)$ に対する生成的局所 Langlands 対応で X と対応する $GL_n(F)$ のスムーズ表現を π とする. $1 \leq j \leq n$ と $\mathbb{Q}_p$ 代数の埋め込み $\tau: F \hookrightarrow E$ に対し, 整数 $i_{j,\tau}$ が与えられて, 任意の τ に対し $i_{1,\tau} < \cdots < i_{n,\tau}$ が成り立っているとする. $a < b$ となる整数 a, b に対して, $GL_2(E)$ の代数的既約表現 $(\text{Sym}^{b-a-1} E^2) \otimes \det^{a+1}$ (cf. 定理 9.2) を対応させる操作を一般化して, 整数の組 $\{i_{j,\tau}\}_{j,\tau}$ に対して, $GL_n(F) \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ の代数的既約表現 ξ を対応させることができる. 制限により ξ を $GL_n(F)$ の表現とみなす. このとき, 次の二つが同値であるというのが予想である.

- (1) X と $\{i_{j,\tau}\}_{j,\tau}$ は, G_F のある de Rham 表現から, 付随する Weil-Deligne 表現および, その Hodge-Tate 重さとして得られる.
- (2) $\pi \otimes_E \xi$ に $GL_n(F)$ 不変なノルムが存在する.

予想のうち (2) $\Rightarrow$ (1) は, [Hu] において一般に示されている. また $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ の場合, (1) $\Rightarrow$ (2) は, 定理 9.2 の同型を用いて $B(V_E)$ のノルムを制限することにより従う.

(1) $\Rightarrow$ (2) が示せると, de Rham 表現から得られた $\pi \otimes_E \xi$ をノルムで完備化することで, p 進局所 Langlands 対応で対応する Banach 表現の候補が得られる. ただし, ノルムは一意とは限らないので, どのようにノルムを選ぶべきかは別問題である.

付随する Weil-Deligne 表現が分解不可能な場合は, [So] において (1) $\Rightarrow$ (2) が示されている. 実際には, より一般に次のことが示されている.

定理 10.1. H を $\mathbb{Q}_p$ 上の連結簡約代数群とする. π を $H(\mathbb{Q}_p)$ の $\overline{\mathbb{Q}_p}$ 上の既約スムーズ本質的二乗可積分表現とし, ξ を $H_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$ の既約代数的表現とする. 制限により ξ を $H(\mathbb{Q}_p)$ の表現とみなす. このとき, $\pi \otimes_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \xi$ に $H(\mathbb{Q}_p)$ 不変なノルムが存在することと, $\pi \otimes_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \xi$ の中心指標が値を $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}_p}}^\times$ に持つことは同値である.

この定理には, もはや Galois 表現は現れておらず, 純粹に代数群の表現に関する主張になっている. 証明は, H がいくつかの条件をみたす場合に帰着した後に, π や ξ の情報を尖点保型表現に大域化し, 保型表現の空間と完備な関数空間を関係付けて行う. この関数空間は, 0 次元の数論的多様体の完備コホモロジーとみなすことができる.

一方で, 中心指標を固定すると尖点保型表現は可算個しかないので, $GL_n(F)$ の全ての主系列表現に対して同様の議論をすることはできない. [C-S] では, 捻じれ係数コホモロジーに対して Taylor-Wiles-Kisin の張り合わせの議論を適用して大きな完備空間を作り, その完備空間に埋め込むことによって, いくつかの強い条件のもとで潜在的クリスタリン表現に対して (1) $\Rightarrow$ (2) を示している.

§ A. 表現論の用語

A を可換環とし, Γ を位相群とする.

定義 A.1. Γ が A 加群 X に A 線型に作用しているとする. 任意の $x \in X$ に対し, x を固定する Γ の開部分群が存在するとき, X はスムーズ表現であるという.

定義 A.2. A 上のスムーズ許容 Γ 表現とは, A 上のスムーズ Γ 表現 X で, Γ の任意の開部分群に対し X の H 不変部分 X^H が A 上有限生成になるもの.

p を素数とし, E を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体とする. E の整数環を $\mathcal{O}$ と書き, $\mathcal{O}$ の剰余体を k と書く. $\mathcal{O}$ の素元 ϖ を取る. A が完備 Noether 局所 $\mathcal{O}$ 代数で, 剰余体が k の有限次拡大であると仮定する. A の極大イデアルを $\mathfrak{m}_A$ とかく.

定義 A.3. X を A 加群とする. X が捻じれない A 加群であるとは, A の任意の非零因子 a に対して, X への a 倍写像が単射であることである.

定義 A.4. X を A 上のスムーズ Γ 表現で $\mathcal{O}$ 加群として捻じれないものとする. $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(X, \mathcal{O})$, $\gamma \in \Gamma$, $x \in X$ に対して

$$(\gamma\phi)(x) = \phi(\gamma^{-1}x)$$

とすることで, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(X, \mathcal{O})$ に Γ の作用を定める.

$$\tilde{X} = \{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(X, \mathcal{O}) \mid \phi \text{ は } \Gamma \text{ のある開部分群で固定される}\}$$

とおき, $\tilde{X}$ に誘導される Γ の表現をスムーズ反傾表現という.

定義 A.5. X を A 上のスムーズ Γ 表現で $\mathcal{O}$ 加群として捻じれがないものとする. $\tilde{X}$ が捻じれのない A 加群であるとき, X は余捻じれがないという.

定義 A.6. A 加群 X が余有限生成であるとは, 以下を満たすことである.

1. X は ϖ 進完備かつ分離的である.
2. X は捻じれのない $\mathcal{O}$ 加群である.
3. X に ϖ 進位相を入れ, A に $\mathfrak{m}_A$ 進位相を入れたとき, X は連続 A 加群になる.
4. $(X/\varpi X)[\mathfrak{m}_A]$ は k 上有限次元である.

定義 A.7. X を A 上のスムーズ Γ 表現で $\mathcal{O}$ 加群として捻じれがないものとする. Γ の任意の開部分群 H に対し, X の H 不変部分 X^H が余有限生成であるとき, X はスムーズ余許容であるという.

次の命題が示すように, 実用的な条件のもとで, スムーズ余許容表現はスムーズ許容表現と双対の関係になっている.

命題 A.8 ([E4, Proposition C.5, Lemma C.26]). Γ の開副有限部分群で副位数が p と素であるものが存在すると仮定する. X を A 上のスムーズ許容 Γ 表現で $\mathcal{O}$ 加群として捻じれがないものとし, X に $\mathfrak{m}_A$ 進位相を入れる.

$$\tilde{X}_{\mathrm{cont}} = \{\phi \in \tilde{X} \mid \phi \text{ は連続である}\}$$

とおく. このとき, $\tilde{X}_{\mathrm{cont}}$ は, $\tilde{X}$ への Γ 作用で安定であり, A 上のスムーズ余許容 Γ 表現になる. さらに, 対応 $X \mapsto \tilde{X}_{\mathrm{cont}}$ は, $\mathcal{O}$ 加群として捻じれがない A 上のスムーズ許容 Γ 表現の圏と, A 上のスムーズ余許容 Γ 表現の間の反変圏同値を与える.

References

- [Be] L. Berger, *La correspondance de Langlands locale p -adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$* , Séminaire Bourbaki. Vol. 2009/2010. Exposés 1012–1026. Astérisque No. 339 (2011), Exp. No. 1017, viii, 157–180.
- [BB] L. Berger and C. Breuil, *Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$* , Astérisque, No. 330 (2010), 155–211.

- [Bo] G. Böckle, *Deformation rings for some mod 3 Galois representations of the absolute Galois group of $\mathbf{Q}_3$* , Astérisque No. 330 (2010), 529–542.
- [Br] C. Breuil, *Série spéciale p -adique et cohomologie étale complétée*, Astérisque No. 331 (2010), 65–115.
- [BE] C. Breuil and M. Emerton, *Représentations p -adiques ordinaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et compatibilité local-global*, Astérisque No. 331 (2010), 255–315.
- [BS] C. Breuil and P. Schneider, *First steps towards p -adic Langlands functoriality*, J. Reine Angew. Math. 610 (2007), 149–180.
- [Bu] D. Bump, *Automorphic forms and representations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 55. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [C–S] A. Caraiani, M. Emerton, T. Gee, D. Geraghty, V. Paskunas and S. W. Shin, *Patching and the p -adic local Langlands correspondence*, preprint. arXiv:1310.0831.
- [Ca1] H. Carayol, *Sur les représentations l -adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 19 (1986), no. 3, 409–468.
- [Ca2] H. Carayol, *Formes modulaires et représentations galoisiennes à valeurs dans un anneau local complet*, p -adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (Boston, MA, 1991), 213–237, Contemp. Math., 165, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [Ch] P. Chojecki, *On non-abelian Lubin-Tate theory and analytic cohomology*, preprint. arXiv:1402.5606.
- [CS] P. Chojecki and C. Sorensen, *Strong local-global compatibility in the p -adic Langlands program for $U(2)$* , preprint. arXiv:1406.1828.
- [Co1] P. Colmez, *Fonctions d’une variable p -adique*, Astérisque, No. 330 (2010), 13–59.
- [Co2] P. Colmez, *Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ) -modules*, Astérisque, No. 330 (2010), 281–509.
- [De] P. Deligne, *Formes modulaires et représentations de $\mathrm{GL}(2)$* , Modular functions of one variable II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), pp. 55–105. Lecture Notes in Math., Vol. 349, Springer, Berlin, 1973.
- [E1] M. Emerton, *On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms*, Invent. Math., 164 (2006), no. 1, 1–84.
- [E2] M. Emerton, *A local-global compatibility conjecture in the p -adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_2/\mathbf{Q}$* , Pure Appl. Math. Q., 2 (2006), no. 2, Special Issue: In honor of John H. Coates. Part 2, 279–393.
- [E3] M. Emerton, *Locally analytic vectors in representations of locally p -adic analytic groups*, to appear in Mem. Amer. Math. Soc.
- [E4] M. Emerton, *Local-global compatibility in the p -adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_2/\mathbf{Q}$* , preprint.
- [EH] M. Emerton and D. Helm, *The local Langlands correspondence for GL_n in families*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 47 (2014), no. 4, 655–722.
- [Hu] Y. Hu, *Normes invariantes et existence de filtrations admissibles*, J. Reine Angew. Math. 634 (2009), 107–141.
- [KW1] C. Khare and J-P. Wintenberger, *Serre’s modularity conjecture. I*, Invent. Math. 178 (2009), no. 3, 485–504.
- [KW2] C. Khare and J-P. Wintenberger, *Serre’s modularity conjecture. II*, Invent. Math. 178 (2009), no. 3, 505–586.
- [Ki] M. Kisin, *Deformations of $G_{\mathbf{Q}_p}$ and $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ representations*, Astérisque, No. 330 (2010), 511–528.

- [La] R. P. Langlands, *Modular forms and ℓ -adic representations*, Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), pp. 361–500. Lecture Notes in Math., Vol. 349, Springer, Berlin, 1973.
- [Sa] T. Saito, *Modular forms and p -adic Hodge theory*, Invent. Math. 129 (1997), no. 3, 607–620.
- [Sc] A. J. Scholl, *Motives for modular forms*, Invent. Math. 100 (1990), no. 2, 419–430.
- [So] C. M. Sorensen, *A proof of the Breuil-Schneider conjecture in the indecomposable case*, Ann. of Math. (2) 177 (2013), no. 1, 367–382.
- [田口] 田口 雄一郎, Serre の保型性予想の紹介, 数理解析研究所講究録別冊, B19 (2010), 7–22.
- [中村] 中村 健太郎, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応, 本報告集原稿.
- [吉田] 吉田 輝義, 保型表現と Galois 表現, 第 17 回整数論サマースクール「 ℓ 進ガロア表現とガロア変形の整数論」報告集, 227–247.