

十分性による分布族の特徴づけ.

早大理工 草間時武

この記事は、ほぼ Kagan-Linnik の Characterization problems in Mathematical Statistics Chap 8. Characterization of Families of Distributions Admitting Sufficient Statistics の一部と Sufficient subspaces for a space of functions defined on a countable set (Rozental) の紹介である.

§1. Kagan は次の定理を証明した (Kagan [3]).
 定理1. $F(x-\theta)$ $\theta \in R^1$ なる分布族からのランダム
 サンプル $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ を考える. $dP_\theta = dF(x-\theta) \cdots dF(x_m - \theta)$ とおく. dP_θ は Lebesgue 測度に関して絶対連続とする. このとき $\bar{X}$ が十分であることから、 F が正規分布であることが証明される.

証明の概要 t と θ に対して

$$\phi_t(\bar{X}) = E_\theta[\exp it(X_2 - X_1) | \bar{X}] \quad a.e. [P_\theta] \quad \dots (1)$$

とおく. $t \neq 0$ かつ τ 両辺に $e^{i\tau\bar{X}}$ をかけ τ 期待値をとれば,

$$E_\theta \exp[i(\tau\bar{X} + t(X_2 - X_1))] = E_\theta[\phi_t(\bar{X}) e^{i\tau\bar{X}}] \quad \dots (2)$$

$X_i \rightarrow X_i + \theta \quad (i=1, 2, \dots, n)$ と変換し, θ が "Location parameter" であることに注意すれば,

$$E_\theta \exp[i(\tau\bar{X} + t(X_2 - X_1))] = E_\theta[\phi_t(\bar{X} + \theta) e^{i\tau\bar{X}}] \quad \dots (3)$$

$$E_\theta[\phi_t(\bar{X} + \theta) \exp(i\tau\bar{X})] = \psi_t(\tau) \quad \dots (4)$$

とおく. μ は $\theta = 0$ のときの $\bar{X}$ の分布, すなわち

$\mu(A) = P_\theta(\bar{X} \in A)$ とする. 假定より μ は Lebesgue 測度に関して絶対連続となる. (4) は

$$\int e^{i\tau u} \phi_t(u + \theta) d\mu(u) = \psi_t(\tau)$$

となる. (3) と (4) より

$$\psi_t(\tau) = E_\theta[\exp[i(\tau\bar{X} + t(X_2 - X_1))]]$$

であるが, この右辺は (2) において $\theta = 0$ としたものである

から, $E_\theta(\phi_t(\bar{X}) e^{i\tau\bar{X}}) = \int e^{i\tau u} \phi_t(u) d\mu(u)$ に u とし

て, ゆえに

$$\int e^{i\tau u} \phi_t(u + \theta) d\mu(u) = \int e^{i\tau u} \phi_t(u) d\mu(u).$$

$$t \neq 0 \text{ かつ } \tau \int e^{i\tau u} (\phi_t(u + \theta) - \phi_t(u)) d\mu(u) = 0 \quad \dots (5)$$

Fourier 変換の一意性より

$$\phi_t(u+\theta) - \phi_t(u) = 0 \quad \text{a.e. } [\mu] \quad \dots (6)$$

もちろん exceptional set は θ と t に depend する.

$$\phi_t(u) = c(t) \quad \text{a.e. } [\mu] \quad \dots (7)$$

を証明しよう. すなわち $\phi_t(u)$ は u に肉して、ほとんど const である = とを証明しよう. (exceptional set は t に depend するかもしれない). t を fix し $\phi_t(u)$ のかわりに $\phi(u)$ と書くことにする. (7) がなりたいたないとすると、 $\phi_1(u) = \operatorname{Re} \phi(u)$, $\phi_2(u) = \operatorname{Im} \phi(u)$ とおくと

$$\operatorname{esssup} \phi_1(u) > \operatorname{essinf} \phi_1(u)$$

$$\text{または } \operatorname{esssup} \phi_2(u) > \operatorname{essinf} \phi_2(u)$$

のいずれかがなりたつ. 前者がなりたつとしよう. したがって $A = \{u: \phi_1(u) > \star\}$ とするとき $\mu(A) > 0$, $\mu(A^c) > 0$ がなりたつような $\star$ が存在する. A^c から μ 測度 0 なる集合をとりのぞいて.

$$\frac{d\mu}{dm} > 0 \quad u \in A^c \quad \dots (8)$$

としてきつがえない. こゝに m は Lebesgue 測度である. $\mu \ll m$ だから $m(A) > 0$, $m(A^c) > 0$ である. したがって $m[(A+\theta) \cap A^c] > 0$ となる θ が存在する. (辻 [4] pp 203 深窓の定理)

(8) より、また $(A+\theta) \cap A^c \subset A^c$ だから、

$$\mu[(A+\theta) \cap A^c] > 0 \quad \dots (9)$$

(8) と (9) は矛盾することを示そう。

$$(8)より、\quad \phi_1(u+\theta) = \phi_1(u) \quad a.e. [\mu]$$

であるから $\phi_1(u) > R$ $u \in A+\theta$ となりたつ。ゆえに、

$$\phi_1(u) > R \quad u \in (A+\theta) \cap A^c \text{ である。} \quad \text{一方 } \phi_1(u) \leq R$$

$$u \in A^c \text{ だから } \phi_1(u) \leq R \quad u \in (A+\theta) \cap A^c. \quad \text{= はず}$$

矛盾である。ゆえに $\phi_1(u) = \text{const.}$ 同様に $\phi_2(u) = \text{const.}$

$$\text{したがって } \phi_t(u) = \text{const} = c(t) \quad a.e. [\mu]. \quad \text{したがって}$$

て

$$\phi_t(\bar{X}) = c(t) \quad a.e. [P_0] \quad \dots (10)$$

(11) において $\theta = 0$ とおき、(10) をもちいれば、

$$E_0[\exp it(X_2 - X_1) | \bar{X}] = c(t) \quad \dots (11)$$

$$f(t) = \int e^{itx} dF(x) \text{ とおくと } (11)より$$

$$E_0 \exp i \left(\tau \sum_1^n X_i + t(X_2 - X_1) \right) = c(t) E_0 \exp i \left(\tau \sum_1^n X_i \right) \quad \dots (12)$$

となりたつ。 $C(t) = |f(t)|^2$ である。すなわち (12) は

$$f(\tau+t)f(\tau-t)[f(\tau)]^{n-2} = C(t)[f(\tau)]^n \quad \dots (13)$$

とかく = とがでる。

この f が決して 0 とはならないことを示そう。 $C(t)$

は十分 $\varepsilon > 0$ と小さくとれば、 $C(t) \neq 0$ $|t| < \varepsilon$ である。

f が 0 になるところがあるとする。 t_0 を f が 0 となる最小

(13) において $\tau = t_0 - \rho$, $t = \rho$ ($0 < \rho < \varepsilon$) とおく.

$\tau + t = t_0$ であるから $f(\tau + t) = f(t_0) = 0$, ゆえに (13) の左辺は 0. ゆえに $C(\rho)[f(t_0 - \rho)]^n = 0$, $0 < \rho < \varepsilon$ であるから $C(\rho) \neq 0$, ゆえに $f(t_0 - \rho) = 0$, 即ち t_0 が f を 0 にする最小の正数であることに反する. したがって, $f(t) \neq 0$ である. $g = \log f$, $h = \log C$ とする.

(13) の両辺の $\log$ をとって,

$$g(\tau + t) + g(\tau - t) - 2g(\tau) = h(t) \quad |t| < \varepsilon$$

この 2 階定差方程式^{*)} とくと $g(\tau)$ は 2 次の多項式であることがわかる. したがって F は正規分布にしたがう

F が正規分布にしたがえば $\bar{X}$ は sufficient であることはあきらかであるから 即ち Location parameter をもつ分布族の中での、正規分布の特徴づけになっている.

§2 sufficient subspace

$(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ を可測空間 $\{P_\theta \mid \theta \in \Omega\}$ を $\mathcal{B}$ 上の確率測度族とする. P_θ に対して 2 乗可積分な関数の全体は $\underbrace{R_\theta}_{R_\theta}$ 内積とし

$$(f, g)_\theta = \int_{\mathcal{X}} f(x)g(x)dP_\theta(x)$$

とおくことにより Hilbert 空間を作る.

$R = \bigcap_{\theta \in \Omega} R_\theta$ とおく. R の線形部分空間 L は

① L は各 R_θ の部分集合として closed

② L は $f(x) \equiv 1$ なる $f \in R$ を含む.

③ $g \in R \cap R_\theta$ への projection は θ に depend しない.

とみたとき、sufficient subspace という。もし L が、 R の sub- σ -field $\mathcal{B}$ を与えるようにえらんで、 R 中の $\mathcal{B}$ -可測な関数の全体として表わされるならば、 L が sufficient subspace であることと、 $\mathcal{B}$ が $\{P_\theta \mid \theta \in \Omega\}$ に関して sufficient であることは同値であることは条件 ③ と、 L への projection が conditional expectation になることからあきらかである。(Bahadur [1])

また任意の L が、必ずしも R にぞくする $\mathcal{B}$ -可測関数の全体とは一致しない。 L がそのように、 $\mathcal{B}$ -可測関数の全体として表わされるための条件は Bahadur [1] が与えた。したがって sufficient subspace の概念は sufficient subfield の概念の拡張である。Rozental は、 $\mathcal{X}$ が高々可算集合の場合に、minimal な sufficient subspace を与えた。 $P_\theta(x)$ を $P_\theta(x)$ で表わすことにする。

$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow P_\theta(x_1) = c P_\theta(x_2) \quad (\forall \theta \in \Omega)$ と $\sim$ を導入すると、これは同値関係だから $\mathcal{X}$ 上に partition を生ずる。

R にぞくし、partition の各要素である集合上で const で

あるような関数の全体を L_0 とすると、 L_0 は minimal な sufficient subspace になる。定理として述べると、

定理 2. (Rozental) Ω を高々可算集合とする。上で定義した L_0 は sufficient subspace であり、sufficient subspace L が $L \subset L_0$ をみたすならば、 $L = L_0$ である。

証明 まず L_0 が sufficient subspace であることを示そう。条件 ①, ② をみたすことはあきらかであるから ③ をみたすことを示そう。それには $(f, g)_{\theta_0} = 0$ ($\forall g \in L_0$) が成り立つならば、 $(f, g)_{\theta} = 0$ ($\forall g \in L_0$) がすべての θ で成り立つことを証明すればよい。上で定義した Ω の partition を $\{X_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ とする。 $\chi_{X_\alpha} = g_\alpha$ とおくと、 $g_\alpha \in L_0$ 。 $(f, g_\alpha)_{\theta} = \sum_{x \in X_\alpha} f(x) P_\theta(x) = C_\alpha \sum_{x \in X_\alpha} f(x) P_{\theta_0}(x) = C_\alpha (f, g_\alpha)_{\theta_0} = 0$ である。任意の $g \in L_0$ を考えると $g = \sum_\alpha k_\alpha g_\alpha$ とかくことが、できる。

$$(f, g)_{\theta} = \sum_\alpha k_\alpha (f, g_\alpha)_{\theta} = 0$$

したがって ③ が成り立つ。

L は sufficient subspace L が $L \subset L_0$ ならば $L = L_0$ であることを証明する。各 X_α の中に x_α を固定する。あきらかに $P_\theta(x) = C_\alpha(x) P_\theta(x_\alpha)$ ($\forall \theta \in \Omega, \forall x \in X_\alpha$)、 P_L は L への projection とする。

$$(P_L g_\alpha, g_\beta)_{\theta} = \sum_{x \in X_\beta} P_L g_\alpha(x) P_\theta(x) = P_\theta(x_\beta) \sum_{x \in X_\beta} P_L g_\alpha(x) C_\beta(x).$$

同様に

$$(P_L g_\beta, g_\alpha)_\theta = P_\theta(x_\alpha) \sum_{x \in X_\alpha} P_L g_\beta(x) C_\alpha(x)$$

P_L は selfadjoint であるから $(P_L g_\alpha, g_\beta)_\theta = (P_L g_\beta, g_\alpha)_\theta$ である。したがって

$$P_\theta(x_\beta) \sum_{x \in X_\beta} P_L g_\alpha(x) C_\beta(x) = P_\theta(x_\alpha) \sum_{x \in X_\alpha} P_L g_\beta(x) C_\alpha(x)$$

$\alpha \neq \beta$ のとき $(P_L g_\beta, g_\alpha)_\theta = 0$ である。何故なら $L \neq 0$ ならば上式の右辺はゼロだから $\sum_{x \in X_\alpha} P_L g_\beta(x) C_\alpha(x)$ が両辺をわけることができる。

$$P_\theta(x_\alpha) = \frac{\sum_{x \in X_\beta} P_L g_\alpha(x) C_\beta(x)}{\sum_{x \in X_\alpha} P_L g_\beta(x) C_\alpha(x)} \quad P_\theta(x_\beta) = C P_\theta(x_\beta)$$

これは $x_\alpha \in X_\alpha$, $x_\beta \in X_\beta$, $\alpha \neq \beta$ であることに矛盾する。

次に $(P_L g_\beta, g_\alpha)_\theta = 0$ でなければならぬ。したがって

$$P_L g_\beta = k_\beta g_\beta \quad \text{であるが、} 1 \in L \quad \text{であるから (仮定②)、}$$

$$1 = P_L 1 = P_L \left(\sum_{\alpha \in \Lambda} g_\alpha \right) = \sum_{\alpha \in \Lambda} P_L g_\alpha = \sum_{\alpha \in \Lambda} k_\alpha g_\alpha$$

ゆえに $k_\alpha = 1$ 。ゆえに $P_L g_\beta = g_\beta$ ($\forall \beta \in \Lambda$) すなわち

$g_\beta \in L$ したがって $g \in L_0$ は $g \in L$ 。ゆえに $L = L_0$ 。

L_0 は Dynkin [2] によると、minimal sufficient subfield に対応するものである。

sufficient subspace については、色々未知のことがあると思う。Rozental の結果は一般の dominated case のときはどうなるか。また dominated case の場合に

なりたつ sufficiency のきれいな理論はこの場合 どうなる
か等.

References

- [1] Bahadur measurable subspaces and subalgebra
Proc of Amer Math Society (1955) pp565-570
- [2] E.B. Dynkin, Necessary and sufficient statistics
for a family of probability distributions, Uspehi
Mat. Nauk 6 (1951), no. 1 (41), 68-90; English transl.
Selected Transl. in Math Stat. and Prob., Vol 1, Amer.
Math., Providence, R.I., 1961, pp17-40.
- [3] Kagan, A.M. "Theory of estimation for
families with shift-, scale- and exponential parameter,"
Trudy Matem Inst, Steklov. AN SSSR 104 (1968)
19-87.
- [4] 辻正次 実変数関数論 清水書院 (1950)