

G 多様体上の G 不変ベクトル場の存在について

山口大 文理 小宮克弘

§1. 本論の目的

closed G -manifold の上に G -invariant で 各点で 0 ではない vector field が存在するための必要十分条件を求める。

§2. 必要な定義

smooth な manifold M に対し, その tangent bundle を $\tau(M)$, tangent sphere bundle を $S(\tau(M))$ で表わす。

G を compact Lie group とし, M を (smooth な) G -manifold とする。 $\tau(M)$ を G -equivariant な (連続な) cross section $\lambda: M \rightarrow \tau(M)$ を G -cross section といふ。 G -cross section λ で, 各 $x \in M$ に対し, $\lambda(x) \neq 0$ であるものを M の non-singular G -vector field といふ。さらに, 各点で一次独立な

k 個の G -cross section を G - k -field とし。

$x \in M$ に対し, その isotropy group を G_x で表わす。

G の closed subgroup H に対し,

$$M_H = \{ x \in M \mid G_x = H \}$$

とする。これは M の submanifold である。ただし, M が compact であるとき, M_H は compact とは限らない。

H の G における normalizer を $N(H)$ で表わすとき,

M_H は $N(H)$ -manifold であり, さらに, free $N(H)/H$ -manifold である。

位相空間 X に対し, X の各 connected component の Euler 標数, 絶対値の和を $|X|(X)$ で表わす。

§3. 得られた結果

定理 1.

M を compact G -manifold とし, $\Delta: \partial M \rightarrow S(\tau(\partial M))$ を $S(\tau(\partial M))$ の G -cross section とする。このとき, Δ が $S(\tau(M))$ の G -cross section に拡張されるための必要十分条件は, 各 $x \in M$ に対し,

$$|X|(M_{G_x} / N(G_x)) = 0$$

$$\text{又は, } \dim N(G_x) - \dim G_x > 0$$

と成り立つことである。

この定理より, 本論の目的である次の結果が得られる:

系 2.

closed G -manifold M の non-singular G -vector field をもつための必要十分条件は, 各 $x \in M$ に対して,

$$|X| (M_{G_x} / N(G_x)) = 0$$

又は, $\dim N(G_x) - \dim G_x > 0$

と成ることである。

さらに, 副産物として, 次の結果も得られた:

定理 3

M を compact G -manifold とし, A を "この closed τ " G -invariant な submanifold とする。 $E \rightarrow M$ を $\tau(M)$ の G -invariant な subvector bundle とし, $s: A \rightarrow S(E)|_A$ を $S(E)|_A$ の G -cross section とする。このとき, 各 $x \in M - A$ に対して,

$$\dim N(G_x) - \dim G_x \geq \dim \tau(M) - \dim E$$

ならば, s は $S(E)$ の G -cross section に拡張される。

この定理より, 次の系が得られる:

系4

M を compact G -manifold とし, F を stationary point set とする。各 $x \in M - F$ に対して,

$$\dim N(Gx) - \dim Gx \geq k > 0$$

のとき, M が G - k -field をもつための必要十分条件は, F が k -field をもつことである。

[注意] 連続な G -cross section を smooth な G -cross section で近似することが可能である。従って, 連続な G -vector field が存在すれば, 必然的に, smooth な G -vector field が存在する。

§4. 定理1の証明

(I). 十分条件であることの証明

isotropy type が等しい部分(の周辺)ごとに cross section を構成し, それをつなぎあわせて M 上の cross section を得る。

かくかくは, M 上に現われる isotropy type の個数 k に関する帰納法による。

まず, $k=1$ のとき。(H) を その 只一つの isotropy type とする。このとき, M_H は compact $N(H)$ -manifold

である。次の diagram を考へよ:

$$\begin{array}{ccc}
 S(\tau(M_H)) & \xrightarrow{\pi} & S(\tau(M_H))/N(H) \\
 \pi^* \downarrow \uparrow \downarrow & & \downarrow \uparrow \downarrow \\
 M_H & \longrightarrow & M_H/N(H) \supset \partial M_H/N(H) \\
 & & \parallel \\
 & & \partial(M_H/N(H))
 \end{array}$$

$\swarrow \Delta_1$
 $\nwarrow \Delta_2$

ここに, π は canonical π projection である。

定理の仮定で与えられた G -cross section Δ は, bundle $S(\tau(M_H))/N(H)$ の $\partial M_H/N(H)$ 上の cross section を induce する。これを Δ_1 で表わそう。このとき, この Δ_1 は $M_H/N(H)$ 上の cross section Δ_2 に拡張される。何故ならば,

(i) $\dim N(H) - \dim H > 0$ のとき: $S(\tau(M_H))/N(H)$ の fibre の connectivity と base space $M_H/N(H)$ の cell complex としての次元を比較することにより, Δ_1 が Δ_2 に拡張されることがわかる。

(ii) $\dim N(H) - \dim H = 0$ のとき: このとき, $S(\tau(M_H))/N(H) \cong S(\tau(M_H/N(H)))$ である。さらに, Δ_1 の image は $M_H/N(H)$ の boundary に接している。さらに, また, 仮定より, $|\chi|(M_H/N(H)) = 0$ である。従って, (例へば, U. Koschorke; Concordance and

bordism of line fields, Inventiones math. 24 (1974),
 によって), Δ_1 or Δ_2 に拡張されることを示す。

さらに, Δ_2 は, π によって, $S(\tau(M_H))$ の
 $N(H)$ -cross section $\pi^*\Delta_2$ を induce する。

G -bundle isomorphism

$$\begin{array}{ccc} S(\tau(M)) & \cong & G \times_{N(H)} (S(\tau(M))|_{M_H}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \cong & G \times_{N(H)} M_H \end{array}$$

が存在する。また, $S(\tau(M_H))$ は $S(\tau(M))|_{M_H}$ の
 subbundle である。このことから, $\pi^*\Delta_2$ より $S(\tau(M))$
 の G -cross section $\Delta_3 : M \rightarrow S(\tau(M))$ を induce
 される。 $\Delta_3|_{\partial M} = \Delta$ である。

次に, isotropy type の個数 α_{k-1} のとき十分
 条件であることを示したとして, isotropy type の
 個数 α_k のときを考える。

(H) を M 上の極大 H isotropy type とする。
 M_H は compact $N(H)$ -manifold である。

$$M_{(H)} = \{ x \in M \mid (G_x) = (H) \}$$

とす。 $k=1$ のときと同様に $\mathcal{L}$, $S(\tau(M))|_{M_{(H)}}$ の G -cross section $t_1: M_{(H)} \rightarrow S(\tau(M))|_{M_{(H)}}$ で $t_1|_{\partial M_{(H)}} = \mathcal{L}|_{\partial M_{(H)}}$, $t_1(M_{(H)}) = S(\tau(M_{(H)}))$ なるものが存在する。

$T(M_{(H)})$ は $M_{(H)}$ の M における closed G -invariant tubular neighborhood とす。 normal vector の方向に t_1 を平行移動することにより, $S(\tau(M))|_{T(M_{(H)})}$ の G -cross section $t_2: T(M_{(H)}) \rightarrow S(\tau(M))|_{T(M_{(H)})}$ で $t_2|_{M_{(H)}} = t_1$, (従って, $t_2|_{\partial M_{(H)}} = \mathcal{L}|_{\partial M_{(H)}}$), なるものが構成される。

$L = \partial M \cup T(M_{(H)})$ とおく。 t_2 と $\mathcal{L}$ より, $S(\tau(M))|_L$ の G -cross section を構成したい。
 今, $t_2|_{\partial M_{(H)}} = \mathcal{L}|_{\partial M_{(H)}}$ であるが, 悲しいが $A = \partial M \cap T(M_{(H)})$ 上では t_2 と $\mathcal{L}$ が一致していないとは限らない。 (しかし, 幸いに $\mathcal{L}$, A は $\partial M_{(H)}$ に equivariantly deformable であるから, $t_2|_A \simeq \mathcal{L}|_A$ である。 さらに, $T(M_{(H)})$ における A の invariant neighborhood とし, $A \times [0, 1]$ なる $\mathbb{R}$ の G の $\mathbb{R}$ と見做す。 これらのことより, $S(\tau(M))|_L$ の G -cross section $t_3: L \rightarrow S(\tau(M))|_L$ で $t_3|_{\partial M} = \mathcal{L}$ なるものが

構成することができろ。

次に, $L_1 = M - \overset{\circ}{T}(M_{(H)})$ とする。ここに, $\overset{\circ}{T}(M_{(H)})$ は tubular neighborhood の open disc bundle に相当する部分である。このとき, L_1 は 角のある compact G -manifold で $M = L \cup L_1$, $\partial L_1 = L \cap L_1$ である。従って, $S(\tau(M))|_{L_1}$ には ∂L_1 上に t_3 より G -cross section を induce される。さらに, L_1 の isotropy type の個数は $k-1$ である。 L_1 の角を丸めて smooth な G -manifold にすれば, 帰納法の仮定より, $S(\tau(M))|_{L_1}$ の G -cross section $t_4: L_1 \rightarrow S(\tau(M))|_{L_1}$ で $t_4|_{\partial L_1} = t_3|_{\partial L_1}$ なるものが存在することがわかる。 t_3 と t_4 より, $S(\tau(M))$ の G -cross section $t_5: M \rightarrow S(\tau(M))$ で $t_5|_{\partial M} = \Delta$ なるものが得られる。

(II) 必要条件であることの証明:

$x \in M$ に対し, $\dim N(G_x) - \dim G_x = 0$ ならば " $|X|(M_{G_x}/N(G_x)) = 0$ であること"を示せばよい。

今, (H) を M 上の最大の isotropy type とする。 M_H は compact $N(H)$ -manifold である。次の diagram を考えよ:

$$\begin{array}{ccc}
 S(\tau(M_H)) & \longrightarrow & S(\tau(M_H))/N(H) \\
 \downarrow & & \downarrow \uparrow \Delta' \\
 M_H & \longrightarrow & M_H/N(H)
 \end{array}$$

定理の仮定で与えられた $S(\tau(M))$ の G -cross section は $S(\tau(M_H))$ の $N(H)$ -cross section を induce し, それは $S(\tau(M_H))/N(H)$ の cross section を induce する。それを Δ' とする。 $\dim N(H) - \dim H = 0$ ならば $S(\tau(M_H))/N(H) \cong S(\tau(M_H/N(H)))$ で, $M_H/N(H)$ の boundary 上での Δ' の image はそれに接していることがわかる。すなわち, $M_H/N(H)$ は, boundary 上ではそれに接した, non-singular vector field をもつことがわかる。よって, $|X|(M_H/N(H)) = 0$ である。

このことを帰納法の出発点として, 他の M_{G_x} に対しても同様のことが証明される。

〔附記〕 詳しい証明は, いずれ, どこかの雑誌に発表されるであろう。