

DAHA の多項式表現の組成因子と crystallized decomposition number について

榎本 直也 (Naoya Enomoto)

京都大学数理解析研究所

Research Institute for Mathematical Sciences,

University of Kyoto

henon@kurims.kyoto-u.ac.jp

1 Introduction

1.1 DAHA の多項式表現と笠谷予想

I. Cherednik によって導入された double affine Hecke 環 (DAHA) は, 2つのパラメータ ζ, τ を持つ. GL_n 型 DAHA は, A 型 Iwahori-Hecke 環 $H_n = \langle T_1, \dots, T_{n-1} \rangle$ と 2つの Laurent 多項式環 $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$, $\mathbb{C}[Y_1^{\pm 1}, \dots, Y_n^{\pm 1}]$ を部分環として持っている. また, Dunkl 作用素によって定義される Laurent 多項式環 $\mathbb{C}(\zeta^{1/2}, \tau)[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ 上の忠実な表現を持っており, これは多項式表現と呼ばれている. ζ, τ が generic な場合, 多項式表現は, non-symmetric Macdonald 多項式と呼ばれる直交多項式を基底に持ち, 既約である. 笠谷昌弘氏 (京大理) は, [笠谷] において, パラメータ ζ, τ が $\zeta^l \tau^r = 1$ という関係式を持つ場合を考察した. この場合, 多項式表現は一般には既約とはならない. 笠谷氏は, "multi-wheel condition" と呼ばれる条件を満たす多項式を使って, 多項式表現の中に部分表現の増大列を構成し, これが組成列になっているであろうと予想した [笠谷, Conjecture 6.4].

ここでは,

$$\zeta, \tau \text{ は } 1 \text{ のベキ根ではなく, } (\ell, r) = 1 \text{ かつ } \ell \neq 2$$

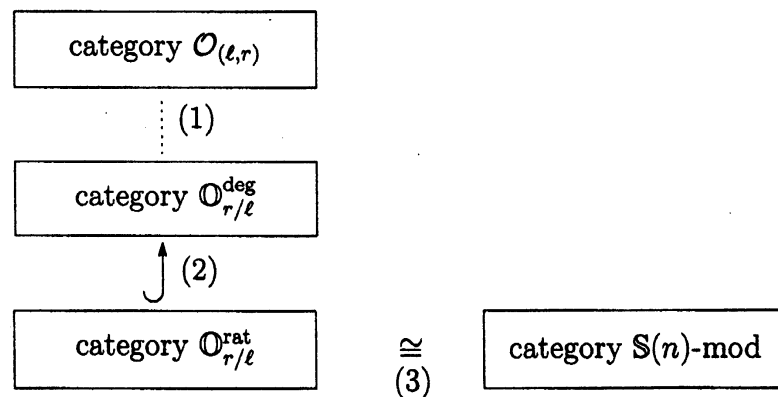
の場合に, この予想を証明することができたので, 報告したい. 証明の方針は, 次に述べる諸結果を通じて, $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_\ell)$ の Fock 空間の upper 大域基底の計算に帰着するものである.

1.2 DAHA の退化と v -Schur 環, LLT-有木型定理

DAHA には, degenerate DAHA, rational DAHA と呼ばれている 2 つの退化版があることが知られている. これらは, h というパラメータを持ち, degenerate DAHA は, $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n], \mathbb{C}\mathfrak{S}_n, \mathbb{C}[Y_1^{\pm 1}, \dots, Y_n^{\pm 1}]$ を部分環とし, rational DAHA は, $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n], \mathbb{C}\mathfrak{S}_n, \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$ を部分環として持っている. DAHA とその退化版には, それぞれ "category $\mathcal{O}$ " と呼ばれる表現の圏が存在し, 標準加群と呼ばれる表現を含んでいる. 多項式表現はその特別な場合に当たる. 特に, rational DAHA には n の分割によって添え字付けられた標準加群 $\Delta(\lambda)$ が存在する.

他方, v -Schur 環は, Iwahori-Hecke 環の permutation module の endmorphism ring として構成され [DJ], $U_v(\mathfrak{gl}_n)$ の商となっていることが知られている [BLM]. v が 1 のべき根でないときには, Weyl 加群と呼ばれる n の分割で添え字付けられた既約表現の完全代表系を持つ (e.g. [Mat]).

DAHA のパラメータを $\zeta^{\ell\tau} = 1$ と特殊化し, $h = r/\ell$ と取る. このとき, DAHA とその退化版の category $\mathcal{O}$ と v -Schur 環の表現の圏との間には次のような関係がある.



(1) Varagnolo-Vasserot's equivalence [VV2]

DAHA の category $\mathcal{O}_{(\ell,r)}$ と degenerate DAHA の category $\mathcal{O}_{r/\ell}^{\text{deg}}$ は圏同値ではない. しかし, Y に関する weight が χ の拡大 affine Weyl 群軌道に属する表現だけを考えた充満部分圏 ${}^{\chi}\mathcal{O}_{(\ell,r)}, {}^{\chi}\mathcal{O}_{r/\ell}^{\text{deg}}$ を考えると, χ がある整数性の条件を満たせば圏同値となる. これは G.Lusztig による affine Hecke 環に関する結果 [Lus] の一般化になっている.

(2) T. Suzuki's embedding [鈴木]

rational DAHA $\mathbb{H}^{\text{rat}}$ は degenerate DAHA $\mathbb{H}^{\text{deg}}$ に埋め込むことができ, 誘導関手 $\mathbb{H}^{\text{deg}} \otimes_{\mathbb{H}^{\text{rat}}} -$ は, fully faithful かつ exact になる. さらに, $\mathcal{O}_{r/\ell}^{\text{rat}}$ の標準加群を $\mathcal{O}_{r/\ell}^{\text{deg}}$ 標準加群に移す.

(3) R. Rouquier's equivalence [Rou]

$\ell \neq 2$ のとき, $\mathcal{O}_{r/\ell}^{\text{rat}}$ と $v = \sqrt[\ell]{1}$ と特殊化した v -Schur 環の表現の圏 $\mathfrak{S}(n)\text{-mod}$ とは圏同値になる. さらに, $\mathcal{O}_{r/\ell}^{\text{rat}}$ の標準加群 $\Delta(\lambda)$ は Weyl 加群 $W^{\lambda'}$ に移される. (λ' は λ の転置を表す.)

ここまでのことによって、パラメータの特殊化のもとで DAHA の多項式表現は、 v -Schur 環の Weyl 加群 $W^{(1^n)}$ に移されることがわかる。

A 型 Hecke 環と対称群の分解係数に関する LLT 予想が、有木 [有木 1] によって解決されたことにより、Hecke 環の modular 表現論は量子群の大域基底と深く結びついている。この結果は、Varagnolo-Vasserot により、 v -Schur 環の modular 表現の場合にも拡張されている。

(4) LLT-有木型定理 [VV1]

$v = \sqrt[\ell]{1}$ のとき、 v -Schur 環の分解係数 (crystallized decomposition number) $[W^\lambda, L^\mu]$ は、 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_\ell)$ の Fock 空間における大域基底と結晶基底の変換行列 (を $q = 1$ に特殊化した行列) によって記述される。

筆者は、 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_\ell)$ の Fock 空間で、 $|(n)\rangle$ の upper 大域基底による展開を具体的に計算することで、

$$\langle (n) | = \sum_{i=0}^N q^i G^{\text{up}}(\mu_i^{(n)}), \quad (\text{ここで } N = \lfloor r/\ell \rfloor)$$

となることを証明した。このことから分解定数が

$$[W^{(1^n)} : L^\mu] = \begin{cases} 1 & \text{if } \mu' = \mu_i^{(n)} (0 \leq i \leq N) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となることが導かれる。(分割 $\mu_i^{(n)}$ の定義は §4 を参照。) これは、 $\ell = 2$ でも成り立つ結果である。しかし、(3) の Rouquier による圏同値が $\ell \neq 2$ でしか示されていないので、この結果からは、DAHA の多項式表現の組成因子については、 $\ell \neq 2$ の場合にしかわからない。笠谷氏の結果により、パラメータを特殊化した DAHA の多項式表現には、 $N = \lfloor r/\ell \rfloor$ 個以上の組成因子が存在することがわかるので、筆者の結果と合わせると、組成因子が丁度 N 個であることがわかり、予想が証明できたことになる。

Remark 1. 実は、すでに宮地兵衛氏 [宮地] によって、 $[W^{(1^n)} : L^\mu]$ は計算されていることがわかった [宮地, Lemma 12.2.4, Corollary 12.2.6]。筆者の計算は q -分解係数を計算して、 $q \rightarrow 1$ と特殊化する方法なので、宮地氏の結果の別証明となっているが、笠谷氏の予想を証明するためには、宮地氏の結果で十分である。この報告の中で本質的に新しい部分は、 q -分解係数を計算した部分のみである。これは宮地氏の予想 [宮地, Conjecture 12.2.19] の証明になる。

謝辞 本研究に関し、柏原正樹先生、有木進先生ならびに鈴木武史氏、桑原敏郎氏、笠谷昌弘氏に感謝致します。DAHA やその退化に関する諸結果および分解係数、大域基底に関する諸結果について御教示頂き、有益な議論をして頂きました。また、先行研究について御教示頂いた宮地兵衛氏に感謝致します。

また、研究集会「組み合わせ論的表現論の世界」で講演の機会を与えて頂いた水川裕司氏に感謝致します。

2 DAHA の多項式表現と笠谷予想

2.0 affine root system と extended affine Weyl 群

$n+2$ 次元の $\mathbb{C}$ -ベクトル空間

$$\mathfrak{h} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}\varepsilon_i^\vee \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d, \quad \mathfrak{h}^* = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}\varepsilon_i \oplus \mathbb{C}\Lambda \oplus \mathbb{C}\delta$$

を考え, その上の非退化対称形式 $(\cdot|\cdot)$ を

$$\begin{aligned} (\varepsilon_i|\varepsilon_j) &= \delta_{ij}, & (\varepsilon_i|\delta) &= (\varepsilon_i|\Lambda) = 0, & (\delta|\Lambda) &= 1, & (\delta|\delta) &= (\Lambda|\Lambda) = 0, \\ (\varepsilon_i^\vee|\varepsilon_j^\vee) &= \delta_{ij}, & (\varepsilon_i^\vee|c) &= (\varepsilon_i^\vee|d) = 0, & (c|d) &= 1, & (c|c) &= (d|d) = 0 \end{aligned}$$

で定める.

$$\alpha_{ij} = \varepsilon_i - \varepsilon_j, \quad (1 \leq i \neq j \leq n) \quad \alpha_i = \alpha_{ii+1} \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

とおくと, A_{n-1} 型ルート系

$$R = \{\alpha_{ij} | 1 \leq i \neq j \leq n\} \subset \mathfrak{h}^*, \quad R^+ = \{\alpha_{ij} \in R | i < j\}, \quad \Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$$

が定まる. さらに $\alpha_0 = -\alpha_{1n} + \delta$ とおくと, $A_{n-1}^{(1)}$ 型 affine ルート系

$$\begin{aligned} \hat{R} &= \{\alpha + k\delta | \alpha \in R, k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathfrak{h}^*, \\ \hat{R}^+ &= \{\alpha + k\delta | \alpha \in R^+, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \sqcup \{-\alpha + k\delta | \alpha \in R^+, k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}, \\ \hat{\Pi} &= \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\} \end{aligned}$$

が定まる. $P, P^\vee$ を

$$P = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i \subset \mathfrak{h}^*, \quad P^\vee = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varepsilon_i^\vee \subset \mathfrak{h}$$

で定まる weight 格子, coweight 格子とする.

定義 2.1. $A_{n-1}^{(1)}$ 型拡大 affine Weyl 群 W_n は, 次の生成元と基本関係式で定義される;

$$\begin{aligned} \text{生成元} &: s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, \pi^{\pm 1}, \\ \text{関係式} &: s_i^2 = 1 \quad (0 \leq i \leq n-1), \\ & s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \quad (i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, n > 2), \\ & s_i s_j = s_j s_i \quad (j \neq i, i \pm 1), \\ & \pi s_i = s_{i+1} \pi \quad (i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \\ & \pi^{-1} \pi = \pi \pi^{-1} = 1. \end{aligned}$$

このとき, W_n の $\mathfrak{h}^*, \mathfrak{h}$ への作用は

$$\begin{aligned} s_i(h) &= h - (\alpha_i | h) \alpha_i \quad (h \in \mathfrak{h}^*) & s_i(h^\vee) &= h^\vee - \langle \alpha_i | h^\vee \rangle \alpha_i^\vee \quad (h^\vee \in \mathfrak{h}) \\ \pi(\varepsilon_i) &= \varepsilon_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-1) & \pi(\varepsilon_i^\vee) &= \varepsilon_{i+1}^\vee \quad (1 \leq i \leq n-1) \\ \pi(\varepsilon_n) &= \varepsilon_n - \delta & \pi(\varepsilon_n^\vee) &= \varepsilon_n^\vee - c \\ \pi(\Lambda) &= \Lambda & \pi(c) &= c \\ \pi(\delta) &= \delta & \pi(d) &= d \end{aligned}$$

で与えられる.

2.1 double affine Hecke algebra of type GL_n

以下, $\mathbb{K} = \mathbb{C}(\zeta, \tau)$ とおく.

定義 2.2. GL_n 型 double affine Hecke algebra $\mathcal{H}_n$ とは, 生成元

$$T_i \ (0 \leq i \leq n-1), \quad Y_\eta \ (\eta \in P \oplus \mathbb{Z}\delta), \quad \pi^{\pm 1}$$

と基本関係式

$$\begin{aligned} Y_\delta &= \tau, \\ (T_i - \zeta^{1/2})(T_i + \zeta^{-1/2}) &= 0 & (0 \leq i \leq n-1), \\ T_i T_{i+1} T_i &= T_{i+1} T_i T_{i+1} & (i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \\ T_i T_j &= T_j T_i & (\text{otherwise}), \\ T_i Y_\eta - Y_{s_i(\eta)} T_i &= (\zeta^{1/2} - \zeta^{-1/2}) \frac{Y_{s_i \eta} - Y_\eta}{Y_{\alpha_i} - 1} & (0 \leq i \leq n-1), \\ \pi T_i &= T_{i+1} \pi & (i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \\ \pi Y_\eta &= Y_{\pi(\eta)} \pi, \\ Y_\eta Y_\xi &= Y_{\eta+\xi}. \end{aligned}$$

で定義される $\mathbb{K}$ 上の結合代数である.

ここで, $Y_i = Y_{\varepsilon_i}, X_1 = T_1 \cdots T_{n-1} \pi^{-1}, \quad X_i = \pi^{i-1} X_1 \pi^{-i+1}$ とおくことで, 生成元と

基本関係式の別の表示

$$\begin{aligned}
& \text{生成元: } T_i \ (1 \leq i \leq n-1), \ Y_j^{\pm 1}, X_j^{\pm 1} \ (1 \leq j \leq n), \\
& \text{基本関係式: } (T_i - \zeta^{1/2})(T_i + \zeta^{-1/2}) = 0 \quad (1 \leq i \leq n-1), \\
& \quad T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-1), \\
& \quad T_i T_j = T_j T_i \quad (|i-j| \geq 2), \\
& \quad T_i X_{i+1} T_i = X_i \quad (1 \leq i \leq n-1), \\
& \quad T_i X_j = X_j T_i \quad (j \neq i, i+1), \\
& \quad T_i Y_i T_i = Y_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-1), \\
& \quad T_i Y_j = Y_j T_i \quad (j \neq i, i+1), \\
& \quad X_2^{-1} Y_1 X_2 Y_1^{-1} = T_1^2, \\
& \quad X_j \left(\prod_{k=1}^n Y_k \right) = \tau \left(\prod_{k=1}^n Y_k \right) X_j \quad (1 \leq j \leq n), \\
& \quad Y_j \left(\prod_{k=1}^n X_k \right) = \tau \left(\prod_{k=1}^n X_k \right) Y_j \quad (1 \leq j \leq n), \\
& \quad X_i X_j = X_j X_i, X_i X_i^{-1} = 1 \quad (1 \leq i, j \leq n), \\
& \quad Y_i Y_j = Y_j Y_i, Y_i Y_i^{-1} = 1 \quad (1 \leq i, j \leq n).
\end{aligned}$$

が得られる.

なお, $H_n = \langle T_1, \dots, T_{n-1} \rangle$ は A 型 Iwahori-Hecke 環, $H_n^{\text{aff}} = \langle T_1, \dots, T_{n-1}, Y_1^{\pm 1}, \dots, Y_n^{\pm 1} \rangle$ は GL_n 型 affine Hecke 環に同型な部分環である. $\langle T_1, \dots, T_{n-1}, X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1} \rangle$ も GL_n 型 affine Hecke 環に同型である.

2.2 多項式表現

命題 2.3.

(1) $\mathcal{H}_n$ の $\mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ 上の忠実な表現 V_n が

$$\begin{aligned}
X_j & \mapsto x_j \text{ (multiplication),} \\
T_i & \mapsto \zeta^{1/2} s_i + \frac{\zeta^{1/2} - \zeta^{-1/2}}{x_{i+1} x_i^{-1} - 1} (s_i - 1), \\
Y_j & \mapsto T_j^{-1} \cdots T_{n-1}^{-1} \omega T_1 \cdots T_{j-1},
\end{aligned}$$

で定まる. ここで, s_i は変数 x_i と x_{i+1} の置換, ω は $(\omega f)(x_1, \dots, x_n) = f(\tau^{-1} x_n, x_1, \dots, x_{n-1})$ で作用する.

(2) この表現は, GL_n 型 affine Hecke 環 H_n^{aff} の 1 次元表現

$$T_i \mapsto \zeta^{1/2}, \quad Y_j \mapsto \zeta^{\rho_j}.$$

の誘導表現に同型である. ここで

$$\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n) = \left(-\frac{n-1}{2}, -\frac{n-3}{2}, \dots, \frac{n-1}{2} \right).$$

とする.

Remark 2. ζ, τ が generic なら, この表現は既約かつ可換な作用素 Y_j ($1 \leq j \leq n$) が同時対角化可能に作用する. その同時固有ベクトルが non-symmetric Macdonald 多項式である [笠谷].

2.3 笠谷予想

$\mathcal{H}_n$ のパラメータを

$$\zeta^\ell \tau^r = 1 \quad (2 \leq \ell \leq n, 1 \leq r, (\ell, r) = 1).$$

と特殊化した場合の多項式表現を $V_n^{(\ell, r)}$ とかく.

定義 2.4. $\mathbb{K}^n$ の部分集合 $Z_m^{(\ell, r)}$ とは, 次の条件を満たす $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{K}^n$ からなる;

相異なる z の添え字 $i_{j,1}, \dots, i_{j,\ell} \in \{1, \dots, n\}$ ($1 \leq j \leq m$) と非負整数 $s_{j,1}, \dots, s_{j,\ell} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ($1 \leq j \leq m$) が存在して,

$$\begin{aligned} z_{i_{j,a}} &= \zeta \tau^{s_{j,a}} z_{i_{j,a+1}} \quad (1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq \ell), \\ \sum_{a=1}^{\ell} s_{j,a} &= r \quad (1 \leq j \leq m), \\ i_{j,a+1} &> i_{j,a} \text{ if } s_{j,a} = 0. \end{aligned}$$

を満たす.

このとき, イデアル $I_m^{(\ell, r)}$ を

$$I_m^{(\ell, r)} = \{f \in \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]; f(z) = 0 \text{ for all } z \in Z_m^{(\ell, r)}\}$$

で定義する. この定義式を multi-wheel 条件と呼ぶ.

定理 2.5 ([笠谷, Theorem 6.3]). $N = \lfloor \frac{n}{\ell} \rfloor$ とおく. このとき,

$$0 = I_0^{(\ell, r)} \subsetneq I_1^{(\ell, r)} \subsetneq I_2^{(\ell, r)} \subsetneq \dots \subsetneq I_N^{(\ell, r)} \subsetneq I_{N+1}^{(\ell, r)} = V_n^{(\ell, r)}.$$

は, $V_n^{(\ell, r)}$ の部分表現の増大列である.

この定理 2.5 から, $V_n^{(\ell, r)}$ の組成因子の個数は, $N+1 = \lfloor \frac{n}{\ell} \rfloor + 1$ 個以上である.

予想 2.6 ([笠谷, Conjecture 6.4]). 前定理で構成した $V_n^{(\ell, r)}$ の部分表現の増大列が組成列であろう. すなわち $I_{a+1}^{(\ell, r)} / I_a^{(\ell, r)}$ ($0 \leq a \leq N$) は既約.

2.4 category $\mathcal{O}$

$\mathcal{H}_n\text{-mod}$ を有限生成 $\mathcal{H}_n$ -加群の圏とし, $\mathbb{C}[Y]$ を Y_η ($\eta \in P$) で生成される $\mathcal{H}_n$ の部分環とする.

定義 2.7. $M \in \mathcal{H}_n\text{-mod}$ に対し, $\mathbb{C}[Y]$ が局所有限に作用するとは, 任意の $v \in M$ に対し, $\mathbb{C}[Y]v$ が有限次元となることを言う. $\mathbb{C}[Y]$ が局所有限に作用する $\mathcal{H}_n$ -加群からなる充満部分圏を, category $\mathcal{O}$ という. $\mathcal{H}_n$ のパラメータを特殊化した場合の category $\mathcal{O}$ を, 特に $\mathcal{O}_{(\ell,r)}$ とかく. $V_n^{(\ell,r)}$ は category $\mathcal{O}_{(\ell,r)}$ に属す.

$M \in \mathcal{O}$ とするとき, 広義 weight 分解 $M = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{h}^*} M_\chi$ が存在する. ここで

$$M_\chi = \bigcup_{k \geq 1} \{v \in M \mid (Y_\eta - \zeta^{(\eta|\chi)})^k v = 0 \text{ for any } \eta \in P\}$$

である. $\text{Supp}(M) = \{\chi \in \mathfrak{h}^* \mid M_\chi \neq 0\}$ とおく.

定義 2.8. $\text{Supp}(M) \subset W_n \cdot \chi$ となるような $M \in \mathcal{O}$ からなる充満部分圏を ${}^x\mathcal{O}$ とかく. パラメータを特殊化した場合には, ${}^x\mathcal{O}_{(\ell,r)}$ とかく. $\mathcal{H}_n^{(\ell,r)}$ の多項式表現 $V_n^{(\ell,r)}$ は, ${}^x\mathcal{O}_{(\ell,r)}$ に属す.

3 DAHA の退化と v -Schur 環

3.1 degenerate DAHA と category $\mathcal{O}^{\text{deg}}$

3.1.1 degenerate DAHA

定義 3.1. $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする. GL_n 型 degenerate DAHA $\mathbb{H}_{n,h}^{\text{deg}}$ とは,

$$\pi^{\pm 1}, s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, y_\eta^{\text{deg}} \ (\eta \in P \oplus \mathbb{Z}\delta)$$

を生成元とし, 基本関係式

$$\begin{aligned} y_\delta^{\text{deg}} &= 1, \\ y_\eta^{\text{deg}} + y_\xi^{\text{deg}} &= y_{\eta+\xi}^{\text{deg}} \quad (\eta, \xi \in P), \\ \langle \pi^{\pm 1}, s_0, s_1, \dots, s_{n-1} \rangle &\cong \mathbb{C}W_n, \\ s_i y_\eta^{\text{deg}} - y_{s_i \eta}^{\text{deg}} s_i &= h \frac{y_{s_i \eta}^{\text{deg}} - y_\eta^{\text{deg}}}{y_{\alpha_i}} \quad (0 \leq i \leq n-1, \eta \in P), \\ \pi y_\eta^{\text{deg}} &= y_{\pi \eta}^{\text{deg}} \pi, \end{aligned}$$

で定義される $\mathbb{C}$ 上の結合代数である.

3.1.2 category $\mathcal{O}^{\text{deg}}$

定義 3.2. $\mathbb{H}_{n,h}^{\text{deg}}\text{-mod}$ を有限生成 $\mathbb{H}_{n,h}^{\text{deg}}$ -加群の圏とし, $\mathbb{C}[y^{\text{deg}}]$ を $y_\eta^{\text{deg}} \ (\eta \in P)$ で生成される部分環とする. $\mathbb{C}[y^{\text{deg}}]$ が局所有限に作用するような $\mathbb{H}_{n,h}^{\text{deg}}\text{-mod}$ の元からなる充満部分圏を category $\mathcal{O}_h^{\text{deg}}$ という.

$M \in \mathbb{O}_h^{\text{deg}}$ の広義 weight 分解を $M = \bigoplus_{\chi \in \mathfrak{h}^*} M_\chi$ とする. ここで

$$M_\chi = \bigcup_{k \geq 1} \{v \in M \mid (y_\eta - (\eta|\chi))^k v = 0 \text{ for any } \eta \in P\}$$

である. $\text{Supp}(M) = \{\chi \in \mathfrak{h}^* \mid M_\chi \neq 0\}$ とおく.

定義 3.3. $\text{Supp}(M) = \{\chi \in \mathfrak{h} \mid M_\chi \neq 0\} \subset W_n \cdot \chi$ を満たすような $M \in \mathbb{O}_h^{\text{deg}}$ からなる充満部分圏を ${}^x\mathbb{O}_h^{\text{deg}}$ とかく.

3.1.3 標準加群

n の分割 λ に対応する n 次対称群の表現を S^λ とかく.

定義 3.4. S^λ を

$$y_i^{\text{deg}} \mapsto \sum_{j < i} s_{ji} - \frac{n-1}{2}.$$

によって $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n \otimes \mathbb{C}[y^{\text{deg}}]$ -加群とみなす. このとき, 標準加群 $\Delta_h^{\text{deg}}(\lambda)$ とは, 誘導表現

$$\Delta_h^{\text{deg}}(\lambda) = \text{Ind}_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n \otimes \mathbb{C}[y^{\text{deg}}]}^{\mathbb{H}_n^{\text{deg}}} S^\lambda.$$

のことを言う. $\Delta_h^{\text{deg}}(\lambda)$ は category $\mathbb{O}_h^{\text{deg}}$ に属す.

特に, $\Delta_h^{\text{deg}}(\text{triv})$ が ${}^p\mathbb{O}_h^{\text{deg}}$ に属することに注意する. ここで

$$\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i \varepsilon_i = (\rho_1, \dots, \rho_n) = \left(-\frac{n-1}{2}, -\frac{n-3}{2}, \dots, \frac{n-1}{2} \right)$$

であった.

3.2 rational DAHA と category $\mathbb{O}^{\text{rat}}$

3.2.1 rational DAHA

定義 3.5. $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする. GL_n 型 rational DAHA $\mathbb{H}_{n,h}^{\text{rat}}$ とは

$$x_{\eta^\vee} (\eta^\vee \in P^\vee), \quad s_1, \dots, s_{n-1}, \quad y_\eta^{\text{rat}} (\eta \in P)$$

を生成元とし, 基本関係式

$$\begin{aligned} y_\eta^{\text{rat}} + y_\xi^{\text{rat}} &= y_{\eta+\xi}^{\text{rat}} & (\eta, \xi \in P) \\ x_{\eta^\vee} + x_{\xi^\vee} &= x_{\eta^\vee + \xi^\vee} & (\eta^\vee, \xi^\vee \in P^\vee) \\ \langle s_1, \dots, s_{n-1} \rangle &\cong \mathbb{C}\mathfrak{S}_n, \\ wx_{\eta^\vee} &= x_{w\eta^\vee} & (w \in \mathfrak{S}_n), \\ wy_\eta^{\text{rat}} &= y_{w\eta}^{\text{rat}}, \\ [x_i, y_j^{\text{rat}}] &= \begin{cases} hs_{ij} & (\text{if } i \neq j) \\ 1 - h \sum_{k \neq i} s_{ik} & (\text{if } i = j) \end{cases} \end{aligned}$$

で定義される $\mathbb{C}$ 上の結合代数である.

3.2.2 category $\mathbb{O}^{\text{rat}}$ と標準加群

定義 3.6. $\mathbb{H}_{n,h}^{\text{rat}}\text{-mod}$ を有限生成 $\mathbb{H}_{n,h}^{\text{rat}}$ -加群の圏とする. $M \in \mathbb{H}_{n,h}^{\text{rat}}\text{-mod}$ に対して, y^{rat} が局所冪零に作用するとは, 任意の $v \in M$ に対して, $(y_j^{\text{rat}})^N v = 0$ ($N \gg 0, 1 \leq j \leq n$) が成り立つときを言う. y^{rat} が局所冪零に作用する $\mathbb{H}_{n,h}^{\text{rat}}\text{-mod}$ の元からなる充満部分圏を category $\mathbb{O}_h^{\text{rat}}$ という.

n の分割 λ に対応する n 次対称群の表現 S^λ を考える.

定義 3.7. S^λ を

$$y_j^{\text{rat}} S^\lambda = 0 \quad (1 \leq j \leq n)$$

によって $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n \otimes \mathbb{C}[y^{\text{rat}}]$ -加群とみなす. このとき標準加群 $\Delta_h^{\text{rat}}(\lambda)$ とは, 誘導加群

$$\Delta_h^{\text{rat}}(\lambda) = \text{Ind}_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n \otimes \mathbb{C}[y^{\text{rat}}]}^{\mathbb{H}_{n,h}^{\text{rat}}} S^\lambda$$

のことを言う. $\Delta_h^{\text{rat}}(\lambda)$ は category $\mathbb{O}_h^{\text{rat}}$ に属す.

3.2.3 degenerate DAHA への埋め込み

命題 3.8 ([鈴木]). 次で定義される $\mathbb{H}_{n,h}^{\text{rat}}$ から $\mathbb{H}_{n,h}^{\text{rat}}$ への準同型は単射;

$$\begin{aligned} s_i &\mapsto s_i, \\ x_j^\vee &\mapsto X_j \\ y_j^{\text{rat}} &\mapsto X_j^{-1} \left(y_j^{\text{deg}} - \sum_{1 \leq k < j} s_{kj} + \frac{n-1}{2} \right). \end{aligned}$$

ここで, $X_1 = \pi s_{n-1} \cdots s_1, X_j = \pi^{j-1} X_1 \pi^{-j+1}$ である.

特に,

$$y_j^{\text{deg}} = X_j y_j^{\text{rat}} + \sum_{1 \leq k < j} s_{kj} - \frac{n-1}{2}$$

なので, y_j^{rat} が 0 で作用しているとき, y_j^{deg} は ρ_j で作用していることに注意する.

3.3 v -Schur 環

H_n を v をパラメータとする A 型 Hecke 環とする. n の composition $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ に対し, Young 部分群 $\mathfrak{S}_{\mu_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\mu_n}$ を考える. $m_\mu = \sum_{w \in \mathfrak{S}_\mu} T_w \in H_n$ とおくとき, 左 H_n -加群

$$M = \bigoplus_{\mu} H_n m_\mu$$

を permutation module という. v -Schur 環 $\mathbb{S}(n)$ とは,

$$\mathbb{S}(n) = \text{End}_{H_n}(M)$$

で定義される [DJ]. 自然な関手

$$\mathcal{S} : \mathbb{S}(n)\text{-mod} \rightarrow H_n\text{-mod}; N \mapsto M \otimes_{\mathbb{S}(n)} N$$

を考えることができる. v が 1 のべき根でないとき, $\mathbb{S}(n)$ は既約表現の完全代表系 $\{W^\lambda | \lambda \vdash n\}$ を持ち, $S^\lambda = M \otimes_{\mathbb{S}(n)} W^\lambda$ が成り立つ. v が 1 のべき根のときは, $\mathbb{S}(n)$ が cellular algebra であること [GL] を使って, $\{L^\lambda := W^\lambda / \text{rad } W^\lambda | \lambda \vdash n\}$ が既約表現の完全代表系を与える.

他方, $U_v(\mathfrak{gl}_n)$ のベクトル表現 $\mathbb{C}^n$ のテンソル積表現 $(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$ に対し, $U_v(\mathfrak{gl}_n) \rightarrow \text{End}((\mathbb{C}^n)^{\otimes n})$ の像が $\mathbb{S}(n)$ と同型になることが示されている [BLM].

特に, これらの対応で, $\mathbb{S}(n)$ -加群 $W^{(1^n)}$ は, $U_v(\mathfrak{gl}_n)$ の determinant 表現, 対称群の符号表現にそれぞれ対応している.

3.4 $\mathcal{O}, \mathcal{O}^{\text{deg}}, \mathcal{O}^{\text{rat}}, \mathbb{S}(n)\text{-mod}$ の関係

ここまでに導入した 4 つの圏の同値性に関する結果をまとめて述べる.

定理 3.9 ([VV2], [Lus]). $\chi \in \mathfrak{h}^*$ が条件

$$\text{任意の } \eta \in P \text{ に対し } (\eta|\chi) \in \mathbb{Z} \text{ かつ } (\delta|\chi) \in \mathbb{Z},$$

を満たすとき, 圏 ${}^x\mathcal{O}_{(\ell,r)}$ と ${}^x\mathcal{O}_{r/\ell}^{\text{deg}}$ は圏同値. さらにこの圏同値により, DAHA $\mathcal{H}_n^{(\ell,r)}$ の多項式表現 $V_n^{(\ell,r)}$ は, $\mathbb{H}_{n,r/\ell}^{\text{deg}}$ の標準加群 $\Delta_h^{\text{deg}}(\text{triv})$ に対応する.

定理 3.10 ([鈴木]).

- (1) 標準加群 $\Delta_h^{\text{deg}}(\lambda), \Delta_h^{\text{rat}}(\lambda)$ は unique simple quotient を持つ. それらを $L_h^{\text{deg}}(\lambda), L_h^{\text{rat}}(\lambda)$ とかく.
- (2) 埋め込み $\mathbb{H}_{n,h}^{\text{rat}} \hookrightarrow \mathbb{H}_{n,h}^{\text{deg}}$ から自然に定義される誘導関手

$$\mathcal{O}_h^{\text{rat}} \rightarrow \mathcal{O}_h^{\text{deg}}; M \mapsto \mathbb{H}_{n,h}^{\text{deg}} \otimes_{\mathbb{H}_{n,h}^{\text{rat}}} M$$

は fully faithful かつ完全.

- (3) (2) の誘導関手は標準加群を標準加群に移し, その unique simple quotient を unique simple quotient に移す;

$$\Delta^{\text{deg}}(\lambda) = \mathbb{H}_{n,h}^{\text{deg}} \otimes_{\mathbb{H}_{n,h}^{\text{rat}}} \Delta^{\text{rat}}(\lambda), \quad L^{\text{deg}}(\lambda) = \mathbb{H}_{n,h}^{\text{deg}} \otimes_{\mathbb{H}_{n,h}^{\text{rat}}} L^{\text{rat}}(\lambda).$$

特に, $[\Delta^{\text{deg}}(\lambda) : L^{\text{deg}}(\mu)] = [\Delta^{\text{rat}}(\lambda) : L^{\text{rat}}(\mu)]$.

定理 3.11 ([Rou]). $v = \sqrt[n]{1}$ のとし, $\mathbb{S}(n)\text{-mod}$ を考える. $h \neq \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ ならば, 圏 $\mathcal{O}_h^{\text{rat}}$ と圏 $\mathbb{S}(n)\text{-mod}$ は圏同値で, $h > 0$ のとき, 標準加群 $\Delta_h^{\text{rat}}(\lambda)$ は, Weyl 加群 $W^{\lambda'}$ に移る. ここで, λ' は λ の転置である.

4 v -Schur 環における LLT-有木型定理

4.1 量子展開環 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ と Fock 空間

4.1.1 量子展開環 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$

$[n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$ とおく. $A = (a_{ij})_{0 \leq i \leq \ell-1}$ を $A_{\ell-1}^{(1)}$ 型 Cartan 行列, すなわち, $\ell \geq 3$ のとき

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \\ -1 & i \equiv j \pm 1 \pmod{\ell} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

$\ell = 2$ のとき, $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ とする.

定義 4.1. 量子展開環 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ とは, 生成元

$$E_i, F_i, K_i \quad (0 \leq i \leq \ell-1),$$

と基本関係式

$$\begin{aligned} K_i K_j &= K_j K_i, \\ K_i E_j &= q^{a_{ij}} E_j K_i, \\ K_i F_j &= q^{-a_{ij}} F_j K_i, \\ E_i F_j - F_j E_i &= \delta_{i,j} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}}, \\ E_i E_j &= E_j E_i \quad (\text{if } i \neq j \pm 1), \\ F_i F_j &= F_j F_i \quad (\text{if } i \neq j \pm 1), \end{aligned}$$

および q -Serre 関係式

$$\begin{aligned} \text{if } \ell \geq 3, \quad & E_i^2 E_{i\pm 1} - (q + q^{-1}) E_i E_{i\pm 1} E_i + E_{i\pm 1} E_i^2 = 0, \\ & F_i^2 F_{i\pm 1} - (q + q^{-1}) F_i F_{i\pm 1} F_i + F_{i\pm 1} F_i^2 = 0, \\ \text{if } \ell = 2, \quad & E_i^3 E_{i\pm 1} - [3] E_i^2 E_{i\pm 1} E_i + [3] E_i E_{i\pm 1} E_i^2 - E_{i\pm 1} E_i^2 = 0, \\ & F_i^3 F_{i\pm 1} - [3] F_i^2 F_{i\pm 1} F_i + [3] F_i F_{i\pm 1} F_i^2 - F_{i\pm 1} F_i^2 = 0, \end{aligned}$$

で定義される $\mathbb{C}(q)$ 上の結合代数である. (基本関係式の添え字は $\text{mod } \ell$ で考える.)

$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ は, 次の余積で Hopf 代数となる;

$$\begin{aligned} \Delta^-(E_i) &= 1 \otimes E_i + E_i \otimes K_i^{-1}, \\ \Delta^-(F_i) &= F_i \otimes 1 + K_i \otimes F_i, \\ \Delta^-(K_i) &= K_i \otimes K_i. \end{aligned}$$

別の余積

$$\begin{aligned}\Delta^+(E_i) &= E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i, \\ \Delta^+(F_i) &= F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i, \\ \Delta^+(K_i) &= K_i \otimes K_i.\end{aligned}$$

もあり, こちらは後で upper 大域基底の計算に利用する.

4.1.2 Fock 空間

$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ の Fock 空間を [KMS] に従って導入する. $V = \mathbb{C}^\ell$ の基底を $v_1, \dots, v_\ell$ とし, $V(z) = V \otimes \mathbb{C}(q)[z, z^{-1}]$ の基底を $u_{j-al} = z^a v_j$ ととる. このとき, $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ の作用が

$$\begin{aligned}E_i u_m &= \delta(m-1 \equiv i \bmod \ell) u_{m-1}, \\ F_i u_m &= \delta(m \equiv i \bmod \ell) u_{m+1}, \\ K_i u_m &= q^{\delta(m \equiv i \bmod \ell) - \delta(m \equiv i+1 \bmod \ell)} u_m.\end{aligned}$$

で定義される. $V(z)$ を evaluation module という.

$I = (\dots, i_2, i_1, i_0)$ を

$$i_0 > i_1 > i_2 > \dots, \quad i_k = -k + 1 \quad (k \gg 0)$$

を満たす整数の半無限列とし,

$$u_I = \dots \wedge u_{i_2} \wedge u_{i_1} \wedge u_{i_0}.$$

とおく. ここで wedge 積は

$$\begin{aligned}u_k \wedge u_m &= -u_m \wedge u_k \quad (k \equiv m \bmod \ell), \\ u_k \wedge u_m &= -q u_m \wedge u_k \\ &\quad + (q^2 - 1) \{ u_{m-i} \wedge u_{k+i} - q u_{m-\ell} \wedge u_{k+\ell} + q^2 u_{m-\ell+i} \wedge u_{k+\ell+i} - \dots \} \\ &\quad (m - k \equiv i \bmod \ell, 0 < i < \ell).\end{aligned}$$

と定義する. さらに,

$$\text{vac}_{-k} = \dots \wedge u_{-(k+2)} \wedge u_{-(k+1)} \wedge u_{-k}.$$

とおき,

$$E_i \text{vac}_{-k} = 0, \tag{4.1}$$

$$F_i \text{vac}_{-k} = \begin{cases} \text{vac}_{-k-1} \wedge u_{-k+1} & (i \equiv -k \bmod \ell) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \tag{4.2}$$

$$K_i \text{vac}_{-k} = \begin{cases} q \text{vac}_{-k} & (i \equiv -k \bmod \ell) \\ \text{vac}_{-k} & \text{otherwise} \end{cases}, \tag{4.3}$$

によって $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ の作用を定義する.

定義 4.2. $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ の Fock 空間とは, $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -加群

$$\mathcal{F} = \bigoplus_I \mathbb{C}(q)u_I,$$

のことを言う. ここで I は, $i_k = -k + 1$ ($k \gg 0$) を満たす半無限列すべてを動く.

命題 4.3. $\mathcal{F}$ は, 対応

$$|\lambda = (\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \cdots)\rangle \mapsto \cdots u_{\lambda_2-2} \wedge u_{\lambda_1-1} \wedge u_{\lambda_0}.$$

により, Fock 空間の林実現 (e.g. [有木 2]) に一致する. 以下, 適宜この同一視で $\mathcal{F} = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}} \mathbb{C}(q)|\lambda\rangle$ とみなす.

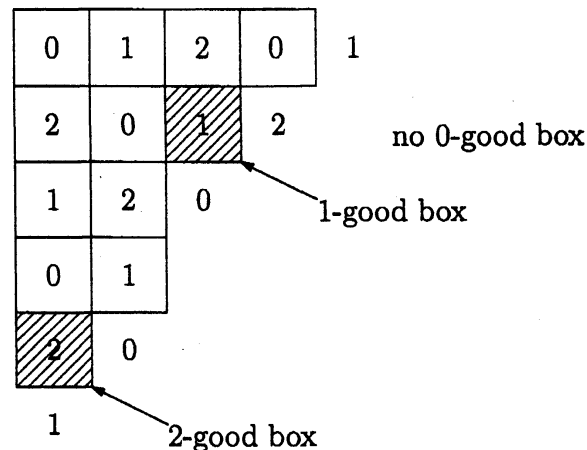
4.2 Fock 空間の結晶基底—Misra-三輪の定理—

まず組み合わせ論的な用語を定義する. $\mathcal{P}$ を分割全体の集合とする.

定義 4.4.

- (1) 分割 λ に対し, $x \in \lambda$ の content とは $c(x) = \text{col}(x) - \text{row}(x)$ のことをいい, $c(x) \bmod \ell$ を x の ℓ -residue という.
- (2) 分割 μ が, 分割 λ から x を除去して得られるとき, x は λ の removable box であるという. 逆に, λ が μ に x を付加して得られる場合, x は μ の addable box であるという. ℓ -residue が i の removable box [resp. addable box] を i -removable box [resp. i -addable box] という.
- (3) λ の i -addable box と i -removable box を下から上へ読み出してできる A, R の列から, AR の組を取り除けるだけ取り除いて出来る $R \cdots RA \cdots A$ の形の列を考える. この列の最も右にある R に対応する i -removable box を i -good box という.

$$\lambda = (4, 3, 2, 2, 1), \ell = 3$$



R を 0 に極を持たない有理関数からなる $\mathbb{C}(q)$ の部分環とする.

$$L = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}} R|\lambda\rangle, \quad B = \{|\lambda\rangle \pmod{qL}\}.$$

とおく.

定理 4.5 (Misra-三輪 [MM],[有木 2]). (L, B) は, 次で定義される柏原作用素 $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ ($1 \leq i \leq \ell-1$) により, Fock 空間 $\mathcal{F}$ の結晶基底となる;

- (1) λ が i -good box を持たないとき, $\tilde{e}_i|\lambda\rangle = 0 \pmod{qL}$.
- (2) x が λ の i -good box のとき, $\mu = \lambda \setminus \{x\}$ とし,

$$\tilde{e}_i|\lambda\rangle = |\mu\rangle \pmod{qL}, \quad \tilde{f}_i|\mu\rangle = |\lambda\rangle \pmod{qL}.$$

- (3) $\mu \cup \{x\}$ において x が i -good box となるような i -addable box x が μ に存在しないとき, $\tilde{f}_i|\mu\rangle = 0 \pmod{qL}$.

4.3 Fock 空間の大域基底

定義 4.6. [KMS] に従って, $\mathcal{F}$ 上の作用素 B_k ($k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$) を次で定義する;

$$B_k u_I = (\cdots \wedge u_{i_2} \wedge u_{i_1} \wedge u_{i_0 - \ell k}) + (\cdots \wedge u_{i_2} \wedge u_{i_1 - \ell k} \wedge u_{i_0}) + (\cdots \wedge u_{i_2 - \ell k} \wedge u_{i_1} \wedge u_{i_0}) + \cdots.$$

4.3.1 lower 大域基底

命題 4.7. 次を満たす $\mathcal{F}$ 上の bar involution $\bar{\cdot} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ が一意的に存在する;

- (1) $\overline{F_i v} = F_i \bar{v}$ ($v \in \mathcal{F}, 0 \leq i \leq \ell-1$),
- (2) $\overline{B_k v} = B_k \bar{v}$ ($k > 0$),
- (3) $\overline{\text{vac}_0} = \text{vac}_0$.
- (4) $\overline{q v} = q^{-1} \bar{v}$.

定理 4.8. $\mathcal{F}$ 上の基底 $\{G^{\text{low}}(\mu) \in \mathcal{F} | \mu \in \mathcal{P}\}$ であって, 次の条件を満たすものが唯一つ存在する. この基底を $\mathcal{F}$ の lower 大域基底という.

- (1) ("bar 不変性") $\overline{G^{\text{low}}(\mu)} = G^{\text{low}}(\mu)$.
- (2) μ を n の分割とすると,

$$G^{\text{low}}(\mu) = |\mu\rangle + \sum_{\mu \triangleleft \lambda \in \mathcal{P}_n} d_{\lambda\mu}(q) |\lambda\rangle,$$

を満たす $d_{\lambda\mu}(q) \in q\mathbb{Z}[q]$ が存在する. ここで, 順序 $\triangleright$ は dominance ordering である.

4.3.2 upper 大域基底

$\{|\lambda\rangle\}_{\lambda \in \mathcal{P}}$ を $\langle \lambda | \mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$ に関する $\{|\lambda\rangle\}_{\lambda \in \mathcal{P}}$ の双対基底とする. このとき, $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_\ell})$ -加群

$$\mathcal{F}^\vee = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}} \mathbb{C}(q) \langle \lambda |$$

は, 余積 Δ^+ と (4.1), (4.2), (4.3) から定まる $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_\ell})$ -加群 $\bigoplus_I \mathbb{C}(q) u_I$ に同型である.

命題 4.9. 次の条件を満たす $\mathcal{F}^\vee$ 上の bar involution $\bar{\cdot} : \mathcal{F}^\vee \rightarrow \mathcal{F}^\vee$ が唯一つ存在する;

- (1) $\overline{F_i v} = F_i \bar{v}$ ($v \in \mathcal{F}^\vee$, $0 \leq i \leq \ell - 1$),
- (2) $\overline{B_k v} = B_k \bar{v}$ ($k < 0$),
- (3) $\overline{\text{vac}_0} = \text{vac}_0$.
- (4) $\overline{q v} = q^{-1} \bar{v}$

定理 4.10. $\mathcal{F}^\vee$ の基底 $\{G^{\text{up}}(\mu) \in \mathcal{F}^\vee | \mu \in \mathcal{P}\}$ であって, 次の条件を満たすものが唯一つ存在する. この基底を $\mathcal{F}^\vee$ の upper 大域基底という.

- (1) ("bar 不変性") $\overline{G^{\text{up}}(\mu)} = G^{\text{up}}(\mu)$.

- (2) λ を n の分割とすると,

$$\langle \lambda | = G^{\text{up}}(\lambda) + \sum_{\lambda \triangleright \mu \in \mathcal{P}_n} d_{\lambda\mu}(q) G^{\text{up}}(\mu).$$

を満たす $d'_{\lambda\mu}(q) \in q\mathbb{Z}[q]$ が存在する. さらに, $d'_{\lambda\mu}(q)$ は $d_{\lambda\mu}(q)$ に一致する. 特に, $\{G^{\text{up}}(\mu)\}$ は $\{G^{\text{low}}(\mu)\}$ の双対基底である.

4.4 LLT-有木型定理

Fock 空間における lower 大域基底と結晶基底の展開式

$$G^{\text{low}}(\mu) = |\mu\rangle + \sum_{\mu \triangleleft \lambda \in \mathcal{P}_n} d_{\lambda\mu}(q) |\lambda\rangle,$$

の係数 $d_{\lambda\mu}(q)$ を, q -crystallized decomposition number と呼ぶ. v -Schur 環における LLT-有木型定理は, $q \rightarrow 1$ の特殊化で分解係数が得られることを主張している.

定理 4.11 (Varagnolo-Vasserot [VV1]). $d_{\lambda\mu}(1) = [W^{\lambda'}, L^{\mu'}]$ が成り立つ.

5 q -分解係数 $d_{(n),\mu}$

5.1 主定理

Fock 空間における大域基底に関する定理 4.8, 定理 4.10 と Varagnolo-Vasserot による LLT-有木型定理により, $W^{(1^n)}$ の組成因子を計算するためには, $\langle (n) |$ の upper 大域基底に関する展開を計算すれば良いことが従う.

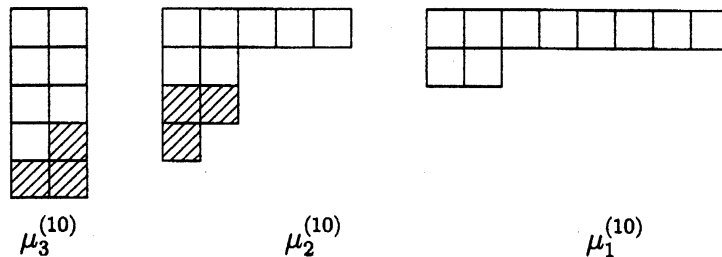
定義 5.1. $N = \lfloor \frac{n}{\ell} \rfloor$ とおき, n の分割 $\mu_i^{(n)}$ ($1 \leq i \leq N$) を

$$\mu_i^{(n)} = \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{1.5cm}}^{\ell-1} \quad \overbrace{\hspace{2.5cm}}^{(N-i)\ell} \\ \boxed{\hspace{1.5cm}} \quad \boxed{\hspace{2.5cm}} \\ \boxed{\hspace{1.5cm}} \end{array} \quad (1 \leq i \leq N)$$

の形で定義する. また $\mu_0^{(n)} = (n)$ とする.

Remark 3. ここで定義した一連の分割は, rim ℓ -hook を下から順に取り除いていくことにより得られる.

$$\mu_3^{(10)} = (2^5), \mu_2^{(10)} = (5, 2^2, 1), \mu_1^{(10)} = (8, 2), \mu_0^{(10)} = (10).$$



定理 5.2 (Enomoto). $\langle (n) |$ の upper 大域基底による展開は

$$\langle (n) | = \sum_{i=0}^N q^i G^{\text{up}}(\mu_i^{(n)}),$$

となる. すなわち, $d_{(n), \mu}(q) = \begin{cases} q^i & \text{if } \mu = \mu_i^{(n)} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ である. 従って, 分解係数について

$$[W^{(1^n)} : L^\mu] = \begin{cases} 1 & \text{if } \mu' = \mu_i^{(n)} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成立する.

5.1.1 証明のための補題

補題 5.3 (Kashiwara [柏原]). $E_i \in U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_n})$ の G^{up} への作用は

$$E_i G^{\text{up}}(\mu) = [\varepsilon_i(\mu)] G^{\text{up}}(\tilde{e}_i \mu) + \sum_{\varepsilon_i(\nu) < \varepsilon_i(\mu) - 1} b_{\mu\nu}^i G^{\text{up}}(\nu)$$

で与えられる. ここで, $\varepsilon_i(\mu) = \max\{k \geq 0 \mid \tilde{e}_i^k \mu \neq 0\}$ である. 特に, $\varepsilon_i(\mu) = 1$ なら, $E_i G^{\text{up}}(\mu) = G^{\text{up}}(\tilde{e}_i \mu)$ が成り立つ.

補題 5.4. $x \in \bigcap_j \text{Ker}(E_j) \subset \mathcal{F}^\vee$ とすると, x は G^{up} によって, $x = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} b_{x,\lambda} G^{\text{up}}(\ell\lambda)$ と展開される.

補題 5.5 (Kashiwara [柏原]). 次の展開式が成り立つ;

$$\begin{aligned} & G^{\text{low}}(\text{vac}_{-m-1} \wedge u_{\ell\lambda_m-m} \wedge \cdots \wedge u_{\ell\lambda_1-1} \wedge u_{\ell\lambda_0}) \\ &= \sum a_{j_m, j_{m-1}, \dots, j_0}(q) \text{vac}_{-m-1} \wedge u_{j_m+\ell\lambda_m-\ell m} \wedge u_{j_{m-1}+\ell\lambda_{m-1}-\ell(m-1)} \wedge \cdots \wedge u_{j_0+\ell\lambda_0} \end{aligned}$$

但し, 和は

$$(0, \ell-1, 2(\ell-1), \dots, m(\ell-1)) \leq (j_m, j_{m-1}, \dots, j_0) \leq (m(\ell-1), (m-1)(\ell-1), \dots, 0)$$

および

$$(-m, -m+1, \dots, 0) \leq (j_m + \ell\lambda_m - \ell m, j_{m-1} + \ell\lambda_{m-1} - \ell(m-1), \dots, j_0 + \ell\lambda_0)$$

を満たす $(j_m, j_{m-1}, \dots, j_0)$ をすべて動く.

系 5.6.

- (1) $|(n)\rangle$ は $G^{\text{low}}(\ell\lambda)$ ($\lambda \in \mathcal{P}$) の展開に現れない.
- (2) $G^{\text{up}}(\ell\lambda)$ は $\langle(n)|$ の展開に現れない.

補題 5.7. 柏原作用素 $\tilde{e}_i$ の $\mu_i^{(n)}$ への作用は次で与えられる.

- (1) $n \not\equiv 0 \pmod{\ell}$ のとき,

$$\tilde{e}_j(\mu_i^{(n)}) = \begin{cases} 0 & \text{if } j \not\equiv n-1 \\ \mu_i^{(n-1)} & \text{if } j \equiv n-1 \end{cases} \quad (0 \leq i \leq N)$$

が成り立つ.

- (2) $n \equiv 0 \pmod{\ell}$ のとき,

$$\tilde{e}_j(\mu_i^{(n)}) = \begin{cases} 0 & \text{if } j \not\equiv n-1 \\ \mu_{i-1}^{(n-1)} & \text{if } j \equiv n-1 \end{cases} \quad (1 \leq i \leq N)$$

および $\tilde{e}_j\mu_0^{(n)} = 0$ ($0 \leq j \leq \ell-1$) が成り立つ.

- (3) 特に

$$\varepsilon_j(\mu_i^{(n)}) = \begin{cases} 1 & \text{if } j \equiv n-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1 \leq i \leq N)$$

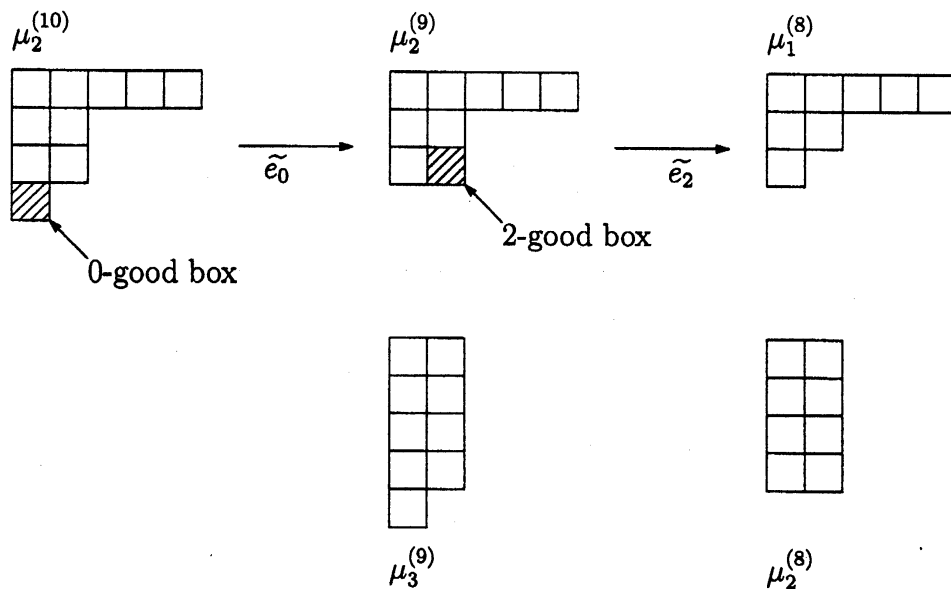
および

$$\varepsilon_j(\mu_0^{(n)}) = \begin{cases} 1 & \text{if } j \equiv n-1 \text{ and } n \not\equiv 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ.

例 5.8. $n = 10, \ell = 3$ の場合を考える.

$$\begin{aligned}\tilde{e}_0 \mu_2^{(10)} &= (5, 2, 2) = \mu_2^{(9)}, \\ \tilde{e}_0 \mu_2^{(9)} &= (5, 2, 1) = \mu_1^{(8)}.\end{aligned}$$



5.1.2 証明の方針

まず, 補題 5.3 と補題 5.7 を使って

$$D_n := \text{vac}_{-1} \wedge u_n - \sum_{i=0}^N q^i G^{\text{up}}(\mu_i^{(n)}) \in \bigcap_{j=0}^{\ell-1} \text{Ker}(E_j)$$

を n に関する帰納法で証明する. すると補題 5.4 により D_n は $G^{\text{up}}(\ell\lambda)$ で展開されるが, 系 5.6 により, $D_n = 0$ 以外は矛盾である.

参考文献

- [有木 1] S. Ariki, "On the decomposition numbers of the Hecke algebra of $G(m, 1, n)$ ", J. Math. Kyoto Univ. 36 (1996), no. 4, 789–808
- [有木 2] S. Ariki, "Representations of quantum algebras and combinatorics of Young tableaux", University Lecture Series, 26. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002
- [BLM] A. Beilinson, G. Lusztig, R. MacPherson, "A geometric setting for the quantum deformation of GL_n ", Duke math. J., 61, 1990, 655–677
- [Ch] I. Cherednik, "Double Affine Hecke Algebras", London Mathematical Society Lecture Note Series, 2005

- [DJ] R. Dipper, G. James, “*The q -Schur algebra*”, Proc. AMS (3), 59, 1989, 23-50
- [GGOR] V. Ginzburg, N. Guay, E. Opdam, R. Rouquier, “*On the category O for rational Cherednik algebras*”, Invent. Math. 154 (2003), no. 3, 617–651, math.RT/0212036
- [GL] J. Graham, G. Lehrer, “*Cellular algebras*”, Invent. Math., 123, 1996, 1-34
- [柏原] M. Kashiwara, “*On Level Zero Representations of Quantized Affine Algebras*”, Duke Math. J. 112 (2002), no. 1, 117–175, math.QA/0010293
- [笠谷] M. Kasatani, “*Subrepresentations in the Polynomial Representation of the Double Affine Hecke Algebra of type GL_n at $t^{k+1}q^{r-1} = 1$* ”, Int. Math. Res. Not. 2005, no. 28, 1717–1742, math.QA/0501272
- [KMS] M. Kashiwara, T. Miwa, E. Stern, “*Decomposition of q -deformed Fock spaces*”, Selecta Math. (N.S.) 1 (1995), no. 4, 787–805, q-alg/9508006
- [LLT] A. Lascoux, B. Leclerc, J. Thibon, “*Hecke algebras at roots of unity and crystal bases of quantum affine algebras*”, Comm. Math. Phys. 181 (1996), no. 1, 205–263
- [Lus] G. Lusztig, “*Affine Hecke algebras and their graded version*”, J. Amer. Math. Soc. 2 (1989), no. 3, 599–635
- [Mat] A. Mathas, “*Iwahori-Hecke algebras and Schur algebras of the symmetric groups*”, University Lecture Series, 15. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999
- [宮地] H. Miyachi, “*Unipotent Blocks of Finite General Linear Groups in Non-defining Characteristic*”, unpublished
- [MM] K. C. Misra, T. Miwa, “*Crystal base for the basic representation of $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$* ”, Comm. Math. Phys. 134, 79-88, 1990
- [Rou] R. Rouquier, “ *q -Schur algebras and complex reflection groups, I*”, math.RT/0509252
- [鈴木] T. Suzuki, “*Rational and trigonometric degeneration of the double affine Hecke algebra of type A* ”, IMRN 2005:37 (2005) 2249-2262, math.RT/0502534
- [VV1] M. Varagnolo, E. Vasserot, “*On the decomposition matrices of the quantized Schur algebra*”, Duke Math. J. 100 (1999), no. 2, 267–297, math.QA/9803023
- [VV2] M. Varagnolo, E. Vasserot, “*From double affine Hecke algebras to quantized affine Schur algebras*”, Int. Math. Res. Not. 2004, no. 26, 1299–1333, math.RT/0307047