

Formal vector fields の Lie 環の cohomology について

京大 理 蟹江 幸博

§ 0. 序

本稿では, Gelfand と Fuks によつて創始された ベクトル場の作る Lie 環の cohomology 理論の中で, formal vector fields に関する部分について述べる。元々この理論は, コンパクト Lie 群の表現全体とその分類空間の位相不変量を用いて表わすことの類似を, 非コンパクト群に対して行なう為の準備の例として始められたが (cf. [11] ~ [14]), 幾つかの具体的な結果を得てからは ([15] ~ [17]), もつと可微分多様体の微分不変量を求めるという意図の方が重要になっている。

一般に 位相的 Lie 環 L と L -module T があるとき, 表現 T に係数を持つ cohomology $H^*(L; T)$ とは, 次の complex $\{C^q(L; T), d^q(L; T)\}$ の homology である:

$$C^q(L; T) = \{ L \text{ 上の連続な } T \text{ 値交代線型写像} \} \quad (q \geq 0)$$
$$X, X_1, \dots, X_{q+1} \in L, \quad \omega \in C^q(L; T) \quad (q \geq 0)$$

に對し

$$(dw)(X_1, X_2, \dots, X_{g+1}) = \sum_{1 \leq i \leq g+1} (-1)^i X_i \cdot \omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{g+1}) \\ - \sum_{1 \leq i < j \leq g+1} (-1)^{i+j-1} \omega[X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{g+1}$$

$$(dt)(X) = X \cdot t \quad \text{for } t \in C^0(L; T) = T$$

(有限次元 Lie 環の cohomology については. [5] ~ [9])

M を n 次元コンパクト oriented C^∞ -多様体, $\mathcal{O}(M)$ を M 上の C^∞ -vector 場全体の作る Lie 環とする。その時問題はまず、

$\mathcal{O}(M)$ の trivial 表現に係数を持つ cohomology $H^*(\mathcal{O}(M); \mathbb{R})$ を計算することである。Gel'fand と Fuks は [17] で 各 $g \geq 0$ に対して $\dim H^g(\mathcal{O}(M); \mathbb{R}) < \infty$ を示し, $\dim L = \infty$ の

ときにも cohomology を扱うことが出来ることを示した。それは $M = S^1$ の場合しか完全には計算されていない (cf [15], [17]) (cf. $H^*(\mathcal{O}(S^1); \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}[\alpha_2] \otimes \Lambda(\alpha_3)$)。しかし,

$C^*(\mathcal{O}(M); \mathbb{R})$ には ある意味で $H^*(\mathcal{O}(M); \mathbb{R})$ を multiplicative に生成する, diagonal と呼ばれる subcomplex が存在し, その homology $H_\Delta^*(\mathcal{O}(M); \mathbb{R})$ も勿論 微分不変量である。

Gel'fand と Fuks は $H_\Delta^*(\mathcal{O}(M); \mathbb{R})$ に収束し E_2 -term が $H(M; \mathbb{R}) \otimes H(\mathcal{O}(n); \mathbb{R})$ と表わせる spectral sequence を構成した。(ここで $\mathcal{O}(n)$ は, $\sum_{i=1}^n p_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$; $p_i \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ の形をした $\mathbb{R}^n$ の原素に於ける formal vector fields 全体を表

ゆえ、 $[\sum_i P_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_j g_j \frac{\partial}{\partial x_j}] = \sum_i (\sum_j P_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial P_i}{\partial x_j}) \frac{\partial}{\partial x_i}$
 によつて Lie 環を作る。) この spectral sequence は、 M の
 rational Pontryagin class が消えているとき (特に M が paral-
 lelizable であるとき) trivial になり ([23]~[25]), その
 時 $H_\Delta^*(\mathcal{O}(M); \mathbb{R})$ の additive base により $H^*(\mathcal{O}(M); \mathbb{R})$ は乗法
 的に生成される ([20])。最近 Losik と Guillemin により
 $H_\Delta^*(\mathcal{O}(M); \mathbb{R})$ は、 M から構成されるある principal bundle の
 real cohomology として説明されている ([26], [28])。

第二の問題として、表現が trivial でない場合 (例えば、関
 数の空間や、外微分型式の空間など ([30], [31]), $H_\Delta^*(\mathcal{O}(M); T)$
 を計算するところがあるが、この場合も diagonal complex の
 homology には有効な手段がある。つまり、 $H_\Delta^*(\mathcal{O}(M); T)$ に
 収束する spectral sequence で $H(M; \mathbb{R})$ と、 T の formal な
 対応物に係数をもつ $\mathcal{O}(n)$ の cohomology との tensor 積を E_2 -
 term にともつものが構成出来る ([31])。それにより、多くの場
 合にその有限次元性を示すことが出来る ([32], [33], [44])。

第三の問題として $\mathcal{O}(M)$ の subalgebras (例えば M のあ
 る subset A の上で消えている vector 場全体、 M が付加的な構
 造をもつ時 その構造と compatible な vector 場全体など) の、
 cohomologies の計算がある。一点で消えている vector 場の Lie
 環は、 H_Δ から $H/\wedge$ の step の補助手段として用ゐることが出

来, 一, 二の問題の多くの場合に H の有限次元性を示すことが出来る ([35] ~ [37]). 構造を持つ vector 場の場合には現在の所 特殊な場合の一次元 cohomology が消えるという結果 ([38], [39]) を除いて, formal な対応物しか問題にされていない。

以上の問題に於いて その formal な対応物が非常に重要な役割を果たしており, また この理論の典型的な議論をそこに見ることが出来るので, 本稿では 種々の構造を持つ formal vector fields を考慮しつつ, $\mathcal{O}(M)$ の cohomologies について述べることにした。また $H^*(\mathcal{O}(M); \mathbb{R})$ と, foliation の characteristic class ([45]) との関係が発見され ([46], [47]), foliation の研究にこの理論を応用することが考えられている ([47] ~ [51])。筆者はここで 多様体上のある構造に附随した characteristic class の構成が, もしくはその構造をもつ formal vector fields の Lie 環の $\mathbb{R}$ 係数の cohomology から得られる可能性を指摘しておきたい。また Gontyarchuk が代数曲線上でや, たように ([52]), $\mathbb{C}$ 多様体だけでなく, algebraic variety の上にもこの理論を構築することも考えられてよい問題であるう。これには 第三の問題で A を chered submanifold としての議論が有用であるかも知れない。

§ 1. 種々の定義

L を $\mathbb{R}$ 上の Lie 環とし, L_0 を余次元有限の部分環とする。
 L の部分空間の族 $\{L_p\}_{p \in \mathbb{Z}}$ を, $L_{-p} = L$, $L_0 = L$, $L_p = \{X \in L_{p-1}; [X, L] \subset L_{p-1}\}$, ($p > 0$) と定めたとき,
 $L_p \supset L_{p+1}$, $[L_p, L_q] \subset L_{p+q}$, ($p, q \in \mathbb{Z}$) という性質
 を満たすので, この filtration によって L の位相を定めれば,
 L は位相的 Lie 環となる。更に $\bigcap_p L_p = \{0\}$ であり, L
 がこの位相で complete であるとき (L, L_0) を TLA (transitive
 Lie 環) と呼ぶ。 $\dim L = \infty$ のとき $TLA(L, L_0)$ は
 infinite type であるという。(以下, infinite type だけを扱う)

定義 $TLA(L, L_0)$ が primitive

$\iff L_0$ が L の極大部分環

$TLA(L, L_0)$ が irreducible (既約)

$\iff L_0$ の L/L_0 への自然な表現が既約

$\mathbb{R}$ 上の primitive TLA は分類されていて, 既約でないものは
 実及び複素の contact TLA しかない ([55])。また 既約
 なものも分類されていて ([54]), 次のように書かれる。 n
 $= \dim L/L_0$ とすれば $L/L_0 \cong V (= \mathbb{R}^n)$ 。 $\varphi = L_0/L$
 は Lie 環となり, φ は V に faithful な表現を持っている (i.e.
 $\varphi \subset V \otimes V^*$)。 φ の部分環 f に対して prolongation

$$f^{(p)} = (f \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_p) \cap V \otimes S^{p+1}(V^*)$$

が定義されて

$$\mathfrak{g}^P (= L_P / L_{P+1}) \cong \mathfrak{g}^{(P)}, \quad (P \geq 1)$$

となり, しかも $\mathfrak{g} = \mathfrak{f}$ か または $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{z}$ (ここで $\mathfrak{z}$ は $\mathfrak{g}$ の center) となっている。このとき, $\mathfrak{f}$ になり得るものは $\mathfrak{gl}_R, \mathfrak{gl}_C, \mathfrak{sl}_R, \mathfrak{sl}_C, \mathfrak{sp}_R, \mathfrak{sp}_C$ であって, 既約な TLA は 全部で 12 の type がある。

今 $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = V \otimes V^*$ とすれば, $\mathfrak{g}^{(P)} = V \otimes S^{P-1}(V^*)$ となるから,

$$\begin{aligned} L &\cong \sum_{P \geq 1} \mathfrak{g}^P = \sum_{P \geq 0} V \otimes S^P(V^*) \\ &\cong V \otimes \sum_{P \geq 0} S^P(V^*) \cong \mathbb{R}[[V]] \otimes V \end{aligned}$$

(ここで $\mathbb{R}[[V]]$ は V 上の formal series の作りの algebra)。任意の $v \in V$ に対し, V^* 上では内積となるような $\mathbb{R}[[V]]$ 上の derivation D_v が存在し, それによつて定まる $\mathbb{R}[[V]] \otimes V$ 上の Poisson bracket が L の $[,]$ となる。 V の base を $e_1, \dots, e_n$, V^* の dual base を $\xi^1, \dots, \xi^n$ としたとき L の元は $\sum_{i=1}^n p_i(\xi) e_i$, (p_i は n 変数の formal series) と書き表わされ,

$$\left[\sum_{i=1}^n p_i(\xi) e_i, \sum_{j=1}^n q_j(\xi) e_j \right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(p_i \frac{\partial q_j}{\partial \xi_i} - q_j \frac{\partial p_i}{\partial \xi_j} \right) e_i$$

を得, L は formal vector fields の作りの Lie 環 $\alpha(n)$ と同一視される。

同様にして 例えば $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ のとき L は volume を保つ formal vector 場の作りの Lie 環となり, $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$

のとき L は formal Hamiltonian vector 場の作る Lie 環となり、
 また 例えば $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{f} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ のとき L は 定
 数倍を除いて volume element を保つ formal vector 場の作る Lie
 環となり、構成は違うが $\text{contact } T L A$ は contact formal
 vector 場の作る Lie 環 となることが知られている。

さて $C^*(L; T)$ の homology を求めるのだが、 $\mathfrak{f}$ が L の
 連続射影の像であるような部分環であるとき Hochschild と
 Serre は $C^*(L; T)$ に 次のような filtration $C^*(L; T) =$
 $A^0 \supset A^1 \supset \dots \supset A^p \supset A^{p+1} \supset \dots$ を導入し、spectral
 sequence $\{E_r^{p,q}, d_r^{p,q}\}$ を構成した ([6]):

$$A^p = \sum_{q \geq 0} A^{p,q}, \quad (\text{当然, } A^{0,q} = C^q(L, T))$$

$$A^{p,q} = \left\{ \omega \in C^{p+q}(L; T) ; X_1, \dots, X_{q+1} \text{ のうち } q+1 \text{ 個か} \right. \\ \left. \mathfrak{f} \text{ に属すれば, } \omega(X_1, \dots, X_{q+1}) = 0 \right\}$$

すると E_1 -term は次のように表わされる ([6] Th 2 の Cor):

$$E_1^{p,q} \cong H^q(\mathfrak{f}; A^{p,0})$$

ここで,

$$A^{p,0} = \{ \omega \in C^p(L; T) ; i(X)\omega = 0, \forall X \in \mathfrak{f} \} \\ (\cong C^p(L/\mathfrak{f}; T)).$$

また $\mathfrak{f}^\perp$ を $\mathfrak{f}$ に直交している L の ideal L^* の部分空間
 とすれば, $\mathfrak{f}$ の L^* での adjoint 表現は $\mathfrak{f}^\perp$ を不変にする。

そこで $\mathfrak{z}$ が $\mathfrak{z}^\perp$ に reductive に働いていると仮定すれば, E_2 term も書き表わすことが出来る。 $C^*(L, \mathfrak{z}; T) = \{\omega \in C(L; T); i(X)\omega = 0, \theta(X)\omega = 0, \forall X \in \mathfrak{z}\}$ は, $C^*(L; T)$ の subcomplex となり, この homology を $H^*(L, \mathfrak{z}; T)$ と表わせば, ([6]. Th 11 の Cor)

$$E_2^{p,q} \cong H^q(\mathfrak{z}; \mathbb{R}) \otimes H^p(L, \mathfrak{z}; T)$$

最後に $\mathfrak{g}$ の Weil algebra $W(\mathfrak{g})$ について思い出しておく ([23])。Weil algebra $W(\mathfrak{g}) = \Lambda(\mathfrak{g}^*) \otimes S(\mathfrak{g}^*)$ (ここで Λ は exterior algebra, S は symmetric algebra を表わす) は 次のような graded structure を持つ。

$$W(\mathfrak{g}) = \sum_{p \geq 0} W^p = \sum_{p \geq 0} \sum_{r+s=p} \Lambda^r(\mathfrak{g}^*) \otimes S^s(\mathfrak{g}^*)$$

$i(X), \theta(X)$ は $\Lambda(\mathfrak{g}^*)$ 上で定義されているので, $i(X)$ は $S(\mathfrak{g}^*)$ 上で 0 であるような antiderivation, $\theta(X)$ は $S'(\mathfrak{g}^*)$ 上で $\Lambda'(\mathfrak{g}^*)$ でと同じように定め それを derivation として $W(\mathfrak{g})$ に拡張しておく。 $W(\mathfrak{g})$ は differential δ を持ち, graded differential algebra となる。即ち $\gamma \in \Lambda'(\mathfrak{g}^*)$ に対しては $\delta\gamma = d_{\mathfrak{g}}\gamma + h(\gamma)$, $\tilde{\gamma} \in S'(\mathfrak{g}^*)$ に対しては $\theta(X)\delta = \delta\theta(X)$ が成り立つように定義することによ, δ は $W(\mathfrak{g})$ の differential として一意の拡張を持つ。(ここで $d_{\mathfrak{g}}$ は complex $\Lambda(\mathfrak{g}^*)$ の differential で, h は $\gamma \in \Lambda'(\mathfrak{g}^*)$ と

同じ $S'(g^*)$ の元を表わす線型写像で, $\mathcal{F} = h(\gamma)$ とおく.)

§ 2. $H^*(\alpha(n); \mathbb{R})$ の計算

complex $C^i(L; \mathbb{R})$ の cochain ω を考えると 連続性から, X_i の一つが充分大きな n に対して L_p に属せば, $\omega(X_1, \dots, X_p) = 0$ となる。従って,

$$C^i(L; \mathbb{R}) = \sum_{p \geq -1} (g^p)^* \cong \sum_{p \geq 0} S^p(V) \otimes V^*$$

$$C^i(L; \mathbb{R}) = \bigwedge^i C^1(L; \mathbb{R})$$

$$= \sum_{P_1 + P_0 + P_{-1} + \dots = i} \bigoplus \bigwedge^{P_1} (g^{-1})^* \wedge \bigwedge^{P_0} (g^0)^* \wedge \bigwedge^{P_{-1}} (g^{-1})^* \wedge \dots$$

($g_{(P_1, P_0, P_{-1}, \dots)}$ とおくと, これは g^0 -不変である)。

今 $\alpha = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \in \alpha(n) = \alpha$ と取れば

$$[\alpha, \sum P_i e_i] = \sum_i \left(\sum_j \xi_j \frac{\partial P_i}{\partial \xi_j} - P_i \right) e_i \quad \text{となり, 従って } g^p =$$

$$\{ X \in \alpha; [\alpha, X] = pX \}, \quad (p \geq -1) \quad \text{となっており,}$$

このことだけから $\dim H^*(\alpha; \mathbb{R}) < \infty$ が分る。nontrivial center を持つ既約な TLA は この α の役割を果たす元を含んでおり

また contact TLA も同種の元を含んでいることにより,

$\dim H^*(L; \mathbb{R}) < \infty$ が従う ([40])。

実際: cochain $\omega \in C^*(L; \mathbb{R})$ が, $\theta(\alpha) \omega = -r \omega$ を満たすとき weight r を持つと言うことにすれば, $\omega \in g_{(P_1, P_0, P_{-1}, \dots)}$

は weight $-P_1 + P_0 + 2P_2 + \dots$ を持つ。weight r の cochains

は, α -stable な subcomplex C_r を作り, $C^*(L; \mathbb{R}) = \sum_1 \oplus C_r$

となる。更に $r \neq 0$ のとき complex C_r は acyclic とな

る。(i) $\omega \in C_r$ が cocycle なら, $-r\omega = \theta(\alpha)\omega = d(i(\alpha)\omega)$ 従って 包含写像 $C_0 \hookrightarrow C^*(L; \mathbb{R})$ は homology の同型を導く。そして complex C_0 は各次数に対し有限次元であり, $n^2 + 2n$ を越える次数に対しては 0 であるから, $\dim C_0 < \infty$ である。

$C^*(L; \mathbb{R})$ に収束する spectral sequence を作る為に, 部分環 $\mathfrak{g}^0$ に関する Hochschild-Serre の filtration を考えれば,

$$E_1^{p,q} \cong H^q(\mathfrak{g}^0; A^{p,0})$$

となり, L を nontrivial centre を持つ既約な $T L A$ とすると

$$A^{p,0} \cong \sum_{P_1+P_2+\dots=P} \bigoplus \underbrace{\wedge^{P_1}(\mathfrak{g}^0)^* \wedge \wedge^{P_2}(\mathfrak{g}^0)^* \wedge \dots}_{\mathfrak{g}^{(P_1, 0, P_2, \dots)}} \quad "$$

であり, 各 $\mathfrak{g}^{(P_1, 0, P_2, \dots)}$ は $\mathfrak{g}^0$ -不変で 且 $\theta(H)$ に関して semi-simple である。従って $A^{p,0}$ は その $\mathfrak{g}^0$ -不変元全体 $B^P (= \{ \omega \in C^p(L; \mathbb{R}); i(X)\omega = 0, \theta(X)\omega = 0, \forall X \in \mathfrak{g}^0 \})$ で置きかえてよい ([5], または [9])。 $B = \sum_{P \geq 0} B^P$ といっておく。

Gel'fand と Fuks が $L = \mathfrak{sl}(n)$ のときに採った方法は ([18]), $A^{p,0}$ の元が $\theta(H)$ 不変であることを示して $A^{p,0}$ の $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ 不変元はまた $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ 不変であることを示し, $A^{p,0}$ の $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ 不変元を H. Weyl の invariant theory ([0]) を利用することにより決定し, A. Borel の定理 ([1]) を使う方法であった。

ところで $Sp(n, \mathbb{R})$ の vector invariants も Weyl によって決定されていることによつて ([4]), この方法は nontrivial center を持つ既約な $T \subset A$ に対して $H^*(L; \mathbb{R})$ の計算を可能にする一般的な方法となる ([4]). しかし $L = \mathfrak{o}$ の場合には (本質的には同じことだが) Weil algebra を使うことによつて Weyl を直接に引用する必要がなくなり, transgression を定める Borel の定理も Weil algebra でのそれで代用することが出来る. ($L = \mathfrak{o}$ でなくとも多くの場合には可能である.)

以下, $L = \mathfrak{o} = \mathfrak{o}(n)$, $\mathfrak{g}^0 \cong \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. π を $\mathfrak{o}$ から $\mathfrak{g}^0$ への連続射影 $\pi(X) = X^0$ とする (ここで, $X \in \mathfrak{o}$ に対しその $\mathfrak{g}^p$ 成分を X^p と書く). π は $\mathfrak{o}$ 上の $\mathfrak{g}$ -値 connection form であり, その curvature form Π は, $\Pi(X, Y) = [Y^1, X^{-1}] - [X^1, Y^{-1}]$ となる. H. Cartan [2] によつて, この connection form は graded algebras としての準同型 (Weil 写像)

$$\varphi: W = W(\mathfrak{g}) = \Lambda(\mathfrak{g}^*) \otimes S(\mathfrak{g}^*) \longrightarrow C^*(\mathfrak{o}; \mathbb{R})$$

を定める. $Y \in \Lambda^1(\mathfrak{g}^*)$ に対しては $\varphi(Y)X = Y \pi(X)$, $\tilde{Y} \in S^1(\mathfrak{g}^*)$ に対しては $\varphi(\tilde{Y})(X, Y) = \tilde{Y} \Pi(X, Y)$ となっている. 従つて (i) $\varphi(\Lambda^p \mathfrak{g}^*) \subset \Lambda^p(\mathfrak{g}^0)^*$, (ii) $\varphi(S^p(\mathfrak{g}^*)) \subset \Lambda^p(\mathfrak{g}^{-1})^* \wedge \Lambda^p(\mathfrak{g}^1)^*$ となる. 故に $\ker \varphi$ は $\sum_{r \geq n} S^r(\mathfrak{g}^*)$ で生成された W の ideal J である. J はま

た W の subcomplex であり quotient complex $W_{2n} = W/J$ に移って, 準同型 $\psi: W_{2n} \longrightarrow C^*(\mathcal{O}; \mathbb{R})$ を得, 次の定理が示される.

定理 1 (Weyl を引用する部分に対応して)

ψ は $H^*(W_{2n}) \cong H^*(\mathcal{O}; \mathbb{R})$ との同型を導く

(2) により,

系 1 ([21])

$H^*(\mathcal{O}; \mathbb{R})$ のすべての cohomology class は, その値が (arguments の) formal vector fields の 2-jet にしか依らない cocycles を含む。

定理の証明は complex W_{2n} に $C^*(\mathcal{O}; \mathbb{R})$ での filtration と compatible なものを与えることによる。即ち,

$$U^{p,q} = \left\{ w \in W_{2n}^{p,q}; \quad i(X_1) \cdots i(X_{q+1})w = 0 \right. \\ \left. \forall X_1, \dots, X_{q+1} \in \mathcal{O} \right\}$$

とおけば それから得られる spectral sequence は $U^{p,0} = 0$

$$(p: \text{奇数 または } p > 2n), = S^{\frac{p}{2}}(\mathcal{O}^*) \quad (p = 2r \leq 2n)$$

であることから

$$E_1^{p,q} \cong H^q(\mathcal{O}; I_S^r(\mathcal{O}^*)) \quad (p = 2r \leq 2n)$$

$$\cong 0 \quad (p: \text{奇数 または } p > 2n)$$

となる (ここで $I_S^r(\mathcal{O}^*)$ は $S^r(\mathcal{O}^*)$ の $\mathcal{O}$ -不変元全体,

$I_S(y^*)_n = \sum_{r \leq n} I_S^r(y^*)$ 。従ってまた $E_1^{p,q} \cong E_2^{p,q}$ である。そこで二つの方法 (本質的には全く同じ) が生じる。一つは B の形を決めて (線型代数の議論で済み, $B^{2r+1} = 0$, $B^{2r} \subset \wedge^r(y^*)^* \wedge \wedge^r(y^*)^*$ となる), E_1 -term での同型を言う方法,

命題 1 (C. Godbillon [34])

$\psi: W_{2n} \longrightarrow C^*(\mathcal{O}; \mathbb{R})$ は

$I_S(y^*)_n \subseteq B$ との同型を導く

であり, もう一つは, $H^*(\mathcal{O}, y^\perp; \mathbb{R})$ を (Young 図式と置換の性質を用いて) 決定し, E_2 -term での同型を言う方法 ($C^*(\mathcal{O}; \mathbb{R})$ の方の spectral sequence の E_2 -term は $H(y; \mathbb{R}) \otimes H^*(\mathcal{O}, y^\perp; \mathbb{R})$ であつたことに注意)

命題 2 (V. Guillemin [28])

ψ は $I_S(y^*)_n \subseteq H^*(\mathcal{O}, y^\perp; \mathbb{R})$ との同型を導く

である。

§3. $H(W_{2n})$ の決定と topological interpretation

complex W_{2n} の homology を定めれば良いことになつたが, これについては H. Cartan [3] により次のことが分つてゐる:

- (1) 元 $u_q \in E_1^{0, 2q-1} \cong H^{2q-1}(y; \mathbb{R})$, ($q = 1, 2, \dots, n$) が存在して $E_1^0 \cong \sum_r E_1^{0,r}$ は $\wedge(u_1, \dots, u_n)$ と同型となり,

- (2) 各 u_i の代表元 $w_i \in U^{0, 2g-1}$ とし $c_i = dw_i \in U^{2i, 0}$ とするものがとれ (c_i は df -不変となり, $\deg c_i = 2g$ と思ったとき),
- (3) $I_S(df^*)_n \cong \mathbb{R}[c_1, \dots, c_n]_{2n}$ ($= \{ c_i$ によって $2n$ 次までの polynomials $\}$) とする。

そこで graded differential algebra $\wedge(u_1, \dots, u_n) \otimes \mathbb{R}[c_1, \dots, c_n]$ (ここで, $du_i = c_i$) の homology を計算すればよいことになる,

定理 2

$v_{i_1, \dots, i_\ell, j_1, \dots, j_m} = (u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_\ell}) \otimes (c_{j_1} c_{j_2} \dots c_{j_m})$
 とおけば (ここで index はいつ $1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n$,
 $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_m \leq n$, $|j| = j_1 + \dots + j_m \leq n$ を満たす
 ようにとる), これは $i_1 + |j| > n$ を満たすとき
cocycle となる。

更に $i_1 \leq j_1$ を満たす cocycles $v_{i_1, \dots, i_\ell, j_1, \dots, j_m}$ の
cohomology class は $H^*(W_{2n}; \mathbb{R})$ の (additive) base
 をなす。

この証明は r に関する induction により, spectral sequence
 の E_{2r} -term の base とし, $i_1 < r$, $i_1 + |j| > n$, $i_1 \leq j_1$
 を満たすか または $i_1 \geq r$, $j_1 \geq r$ を満たすよ

うな $v_{i_1, \dots, i_l, j_1, \dots, j_m}$ の class がとれることを示せばよい。更にここで、 $H^*(\mathfrak{o}(n); \mathbb{R})$ の non zero 元 の filtration 次数を見ることにより、

系 2

algebra $H^*(\mathfrak{o}(n); \mathbb{R})$ の積は trivial である。

こうして $H^*(\mathfrak{o}(n); \mathbb{R})$ は完全に定まるのだが、これにはまた topological な説明を与えることが出来る ([18])。 B_U を ユニタリ群 $U(n)$ の分類空間とし $p: E_U \rightarrow B_U$ を 普遍 $U(n)$ 主-bundle とする。 $[B_U]_{2n}$ を B_U の $2n$ 切片とすると $X_n = p^{-1}([B_U]_{2n})$ とおけば、

定理 3

$$H^*(\mathfrak{o}(n); \mathbb{R}) \cong H^*(X_n; \mathbb{R})$$

[証明]

$\mathfrak{u}(n)$ を $U(n)$ の Lie 環とすると $\mathfrak{u}(n) \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{gl}(n; \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} \cong \mathfrak{u}(n) \otimes \mathbb{C}$ だから、 $W(\mathfrak{u}(n)) \otimes \mathbb{C} \cong W(\mathfrak{u}(n)) \otimes \mathbb{C}$ となる。 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_U$ を E_U 上の de Rham complex とせよ。 E_U に connection を一つ定めれば Weil 写像 $\varphi_U: W(\mathfrak{u}(n)) \rightarrow \mathcal{E}$ を得る。 $W(\mathfrak{u}(n))_{2n}$ に W_{2n} で同じ filtration を入れておき、 $\mathcal{E}_{2n} = \mathcal{E} / \mathcal{B}_{2n}$ とおくと (ここで $\mathcal{B}_{2n}$ は 次数 $> 2n$ の B_U 上の forms を p で引き戻して得られる forms

の生成する ideal である), 写像 $\tilde{\varphi}: W(\mathcal{U}(M))_{2n} \longrightarrow E_{2n}$ が定まる。そこで E_{2n} の Leray-Serre の spectral sequence (例えば [10]) と, $W(\mathcal{U}(M))_{2n}$ の spectral sequence を考えれば, その E_2 -term は同型であり, 従って $\tilde{\varphi}$ は homology の同型を導く。一方 complex E_{2n} の homology は $H^*(X_n; \mathbb{R})$ であるから, $H^*(W_{2n}; \mathbb{C}) \cong H^*(X_n; \mathbb{C})$ を得る。従って $H^*(\mathcal{U}(M); \mathbb{R}) \subset H^*(X_n; \mathbb{R})$ とは vector space としては同型である。ところで X_n が n -普遍 $U(n)$ -bundle であることから $H^*(X_n; \mathbb{R})$ の積は trivial であり, 一方 $H^*(\mathcal{U}(M); \mathbb{R})$ も系 2 によって同様であるから algebra として同型となる。

L が nontrivial center を持つ既約な $T L A$ のときにも同様の topological な説明がある ([41])。コンパクト Lie 群 H をその Lie 環の複素化が $\mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}$ と同型となるようにとり, Z を $\mathfrak{z}$ に対応する torus とせよ (これは $\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{z}$ の場合で, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ ならば以下 Z の分は不要)。 B_H を H の分類空間とし, $p: E_H \longrightarrow B_H$ を普遍 H 主-bundle とせよ。 $Y_L = Z \times p^{-1}([B_H]_{2n})$ とおく (ここで $[B_H]_{2n}$ は B_H の $2n$ 切片), $H^*(L; \mathbb{R}) \cong H^*(Y_L; \mathbb{R})$ が得られる。

§ 4. $H^*(L; \Omega^*)$ について

本節では nontrivial center を持つ既約な TLA を扱う。

L の nontrivial 表現に係数を持つときの cohomology $H^*(L; T)$ を求めるとき、表現 T が L_0 の表現から誘導される場合を考慮しよう。

N を有限次元 L_0 -module とする。 $[L], [L_0]$ をそれぞれ L, L_0 の包絡環とするとき $\mathfrak{g}^+$ は L_0 に supplementary な L の可換部分環故 vector space として $[L] = [L_0] \otimes S(V)$ となり、従って L の induced module $\tilde{N} = \text{Hom}_{[L_0]}([L], N)$ は $\mathcal{R}[[V]] \otimes N$ と同型となる。このとき L の元が $\tilde{N}$ への act の仕方は、 $X \in L, n \in N, a(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{r \geq 0} a_r \xi^r \in \mathcal{R}[[V]]$ に対して、

$$X(an) = (Xa)n + \sum_{r \geq 0} \sum_{\mathfrak{g} \in \mathfrak{g}^+} \frac{a_{r-\mathfrak{g}}}{r!} \xi^r \left(\left[\frac{\partial^{\mathfrak{g}} X}{\partial \xi^{\mathfrak{g}}} \right] \cdot n \right)$$

となる (ここで $\tilde{X}$ は X の L_0 成分を表わす)。([31] にこの action の式があるが間違っている。) ここで特に $N = \Lambda(V^*)$ とすると、 N は $\mathfrak{g}^0$ -module となり 射影 $L_0 \rightarrow \mathfrak{g}^0$ によって N を L_0 -module と見ることが出来、そのとき $\tilde{N} \cong \Omega^*$ となることが確かめられる (ここで、 Ω^* は V 上の formal exterior differential forms 全体の空間で、自然な作用によって L -module である)。すると Cartan-Eilenberg [4] により

$$H^*(L; \Omega^*) \cong H^*(L_0; \Lambda(V^*))$$

となる。そこで右辺を計算するのだが、その前に $C^*(L_0; \Lambda(V^*))$ が subcomplex $C^p(L_0; \Lambda^q(V^*))$ によって bigraded differential algebra になることに注意しておく。

定理 4

$H^*(B_H; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}[\gamma_1, \dots, \gamma_n]$ ($\deg \gamma_i = 2k_i$) という形であつたら

$$H^*(L; \Omega^*) \cong H^*(\mathfrak{g}; \mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}[\tau_1, \dots, \tau_p]_n$$

となる。ここで、

$$\deg \tau_i = k_i, \quad \tau_i \in H^{k_i}(L; \Omega^{k_i})$$

[証明]

$H^*(L; \Omega^0) \cong H^*(L_0; \mathbb{R}) \cong H^*(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ は容易。他の部分は $L = \Omega$ の場合にだけ示す (他も同様)。 L_0 の部分環 $\mathfrak{g}^0 \cong \mathfrak{g}$ に附随した Hochschild Serre の spectral sequence の E_1 -term は

$$E_1^{p,q} \cong H^q(\mathfrak{g}; \mathbb{R}) \otimes D^p$$

ここで、 $D^p = \{\omega \in C^p(L_0; \Lambda(V^*)) ; i(X)\omega = 0, \theta(X)\omega = 0, \forall X \in \mathfrak{g}\}$ である。すると、

$$D^p \cap C^p(L_0; \Lambda^r(V^*))$$

$$\cong \sum_{p_1+p_2+\dots+p_r=p} \oplus \{ \Lambda^r(V^*) \wedge \Lambda^{p_1}(\mathfrak{g}')^* \wedge \Lambda^{p_2}(\mathfrak{g}')^* \wedge \dots \text{ の } \mathfrak{g}\text{-不変元} \}$$

となり

命題1の証明と同様にして algebra として $D^p \cong B^{2p}$ が分る (ここで B^{2p} は $\wedge^p(q^{-1})^* \wedge \wedge^p(q^1)^*$ の q -不変元の空間である)。また $H^*(q; \mathbb{R})$ の class を表わす cocycle ω は $C^*(L_0; \wedge(V^*))$ の元として d をとったとき, D^p の nonzero な元を表わし得ないので, $d_r = 0$ ($\forall r \geq 1$) となり, $E_1 \cong H^*(L_0; \wedge(V^*))$ である。

§5. 補足 (他の TLA について)

本稿では専ら nontrivial center を持つ既約な TLA の cohomology を考えたが, その cohomology class は 系1でと同じ 顕著な性質 即ち, その値が arguments の 2-jets にしか依らない cocycle がとれるという性質を持っている。しかし center を持たないようなもの 例之は Hamiltonian formal vector fields の作る Lie 環では 2-jets だけでは値の定まらないような cocycles しかとれない class が存在する。この Lie 環には α のような元が存在しないから homology をとれば同じになる有限次元 subcomplex を作ることは出来ないが, 同種の定義による subcomplex は有限次元となる。問題はそれに supplementary な subcomplex であって, Gel'fand 達はそれが acyclic になると期待していたのだが, 電子計算機を用いた計算により その中に上述の元が存在することを発見した ([42])。それは同時に, volume を保つ vector fields の Lie 環の場合に

も同じ事情が起こることを示している。そして $\dim H^*(L; \mathbb{R})$ が有限であるかどうかは未解決であり、この事情は center を持たない TLA に対する本質的な困難である。しかし、co-homology の有限次元性の分っている contact TLA の場合に $H^*(L; \mathbb{R})$ を求めることは難しいことではない。

また $\Omega(n)$ の部分環 L_R ($R > 0$) に対して $\dim H^q(L_R; \mathbb{R}) < \infty$ ($q \geq 0$) が予想されていたが ([22]), $n=1$ の場合にはその形も定まり有限次元性を示すことが出来る ([44])。

Bibliography

[A] 一般的文献と有限次元 Lie 環の cohomology

0. H. Weyl : The Classical Groups; their invariants and representation, Princeton Univ. Press, 2nd ed. (1946).
1. A. Borel : Sur la cohomologie des espaces fibres principaux et des espaces homogenes de groupes de Lie compacts, Ann. of Math., 57-1 (1953), 115-207.
2. H. Cartan : Notions d'algebre differentielle; application aux groupes de Lie et aux groupes de Lie et aux varietés où opère un groupe de Lie, Colloque de Topologie (espaces fibrés), (1950), 15-27.
3. H. Cartan : La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal, Colloque de Topologie (espaces fibrés), (1950), 57-71.
4. H. Cartan - S. Eilenberg : Homological Algebra, Princeton Univ. Press (1956).
5. C. Chevalley - S. Eilenberg : Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras, Trans. A.M.S., 63 (1948), 85-124.
6. G. Hochschild - J. P. Serre : Cohomology of Lie algebras, Ann. of Math., 57 (1953), 591-603.
7. J. L. Koszul : Homologie et cohomologie des algèbres de Lie, Bull. Soc. Math. France 78 (1950), 65-127.
8. J. L. Koszul : Sur la structure multiplicative de l'anneau de cohomologie des espaces homogènes, Colloque de Topologie (espaces fibrés), (1950), 73-81.
9. Seminaire "Sophus Lie", 1954/1955.
10. J. T. Schwartz : Differential Geometry and Topology; Gordon & Breach Sc. Pub., New York (1968).

[B] $\alpha(M) \times \alpha(n)$ の cohomology (trivial 表現)

11. I. M. Gel'fand - D. B. Fuks : Cohomology of Lie groups with real coefficients, DAN, SSSR, 176 (1967).
12. I. M. Gel'fand - D. B. Fuks : Topological invariants of non-compact Lie groups related to infinitesimal representations, DAN, SSSR (1967).

13. I. M. Gel'fand - D. B. Fuks : Topology of noncompact Lie groups, F. A. 1-4(1967), 33-45.
14. I. M. Gel'fand - D. B. Fuks : On classifying spaces for principal bundles with Hausdorff bases, DAN,SSSR, 181-3(1968).
15. I. M. Gel'fand - D. B. Fuks : The cohomologies of the Lie algebra of vector fields in a circle, F. A. 2-4(1968), 92-93.
16. I. M. Gel'fand - D. B. Fuks : Cohomologies of Lie algebras of vector fields, F. A. 3-2(1968), 87.
17. I. M. Gel'fand - D. B. Fuks : Cohomologies of Lie algebras of of tangential vector fields of a smooth manifold, F. A. 3-3(1969), 32-52.
18. I. M. Gel'fand - D. B. Fuks : Cohomologies of the Lie algebra of formal vector fields, Izv. Akad. Nauk, SSSR, 34-2(1970).
19. I. M. Gel'fand - D. B. Fuks : On cohomologies of a Lie algebra of smooth vector fields, (Soviet Math. Dokl. 11-1(1970), 268-271).
20. I. M. Gel'fand - D. B. Fuks : Cohomologies of Lie algebra of tangential vector fields II. F. A. 4-2(1970), 23-31.
21. I. M. Gel'fand - D. B. Fuks : On cycles, representing cohomology classes of Lie algebras of formal vector fields, Usp. Math. Nauk SSSR, 25-5(1970), 70-71.
22. I. M. Gel'fand : The cohomology of infinite dimensional Lie algebras; some questions of integral geometry, Actes Congrès intern. math. 1(1970), 95-111. Nice.
23. I. M. Gel'fand - D. A. Kazdan : Some problems of differential geometry and computations of cohomologies of Lie algebra of vector fields, DAN,SSSR, 200(1971), 269-272.
24. I. M. Gel'fand - D. A. Kazdan - D. A. Fuks : Actions of infinite-dimensional Lie algebras, F. A. 6-1(1972), 10-15.
25. M. V. Losik : On cohomologies of Lie algebras of vector fields with coefficients in trivial identity representations, F. A. 6-1, (1972), 24-36.
26. M. V. Losik : Topological interpretation of homologies of diagonal complexes of Lie algebras of vector fields with trivial identity representations, F. A. 6-3(1972), 79-80.

- 27. V. W. Guillemin : Remarks on some results of Gelfand and Fuks,
Bull. A.M.S. 78-4(1972), 539-540.
- 28. V. W. Guillemin : Cohomology of vector fields on a manifold,
Advances in Math., 10(1973), 192-220.
- 29. J. Vey : Sur la cohomology de l'algebra des champs de vecteurs
sur une varieté, C. R. Acad. Sc. Paris, 273(1971), 850-852.

[C] $\alpha(M)$ と $\alpha(n)$ の cohomology (nontrivial 係数)

- 30. M. V. Losik : On the cohomologies of infinite-dimensional Lie
algebras of vector fields, F. A. 4-2(1970), 43-53.
- 31. I. M. Gel'fand - D. B. Fuks : Cohomologies of Lie algebras of
vector fields with nontrivial coefficients, F. A. 4-3(1970),
10-25.
- 32. K. Shiga : Stable range of some differential complexes, (preprint).
- 33. M. V. Losik : On cohomologies of Lie algebras of vector fields
with nontrivial coefficients, F. A. 6-4(1972), 44-46.
- 34. C. Godbillon : Cohomologies d'algèbres de Lie de champs de vecteurs
formels, Seminaire Bourbaki, n 421, 1972-73.

[D] $\alpha(M)$ または $\alpha(n)$ の 部分環の cohomology

- 35. V. N. Reshetnikov : On two cohomologies of Lie algebras of vector
fields on a circle, Usp. Math. Nauk, 26-1(1971), 229-230.
- 36. V. N. Reshetnikov : Cohomologies of Lie algebras of vector fields
on manifolds, vanishing at a given point, Usp. Math. Nauk,
27-1(1972), 251-252.
- 37. V. N. Reshetnikov : On cohomologies of Lie algebras of vector
fields on manifolds with nontrivial coefficients, Dan, SSSR,
208-5(1973), 1041-1043.
- 38. V. I. Arnol'd : One dimensional cohomologies of Lie algebras of
divergence-free vector fields and rotation number of dynamical
systems, F. A. 3-4(1969), 77-78.
- 39. B. I. Rozenfel'd : One dimensional cohomologies of Lie algebras of
contact vector fields, F. A. 4-2(1970), 91-92.
- 40. I. M. Gel'fand - D. B. Fuks : Upper bounds for cohomologies of
infinite Lie algebras, F. A. 4-4(1970), 70-71.

41. B. I. Rozenfel'd : Cohomologies of some infinite dimensional Lie algebras, F. A. 5-4(1971), 84-85.
42. I. M. Gel'fand - D. I. Kalinin - D. B. Fuks : On cohomologies of Lie algebras of Hamiltonian formal vector fields, F. A. 6-3 (1972), 25-29.
43. L. V. Gontyareba : Cohomologies of Lie algebras of formal vector fields on a line, Usp. Math. Nauk. 5(1972), 231-232.
44. L. V. Gontyareba : Cohomologies of Lie algebras of formal vector fields on a line, F. A. 7-2(1973), 6-14.

[E] foliation の図体について

45. C. Godbillon - J. Vey : Un invariant des feuilletages de codimension un, C. R. Acad. Sc. Paris, Juin 1971
46. I. N. Bernstein - B. I. Rozenfel'd : On characteristic classes of foliations, F. A. 6-1(1972), 68-69.
47. A. Haefliger : Sur les classes caracteristiques des feuilletages, Seminaire Bourbaki, n 412, 1971-72.
48. R. Bott - A. Haefliger : On characteristic classes of $\mathbb{P}^n$ -foliations, Bull. A.M.S. 78-6(1972), 1039-1044.
49. S. M. Vishik : On Characteristic classes and singularities of foliations, F. A. 6-4(1972), 71-72.
50. S. M. Vishik : Singularities of analytic foliations and characteristic classes, F. A. 7-1(1973), 1-15.
51. D. B. Fuks : Characteristic classes of foliations, Usp. Math. Nauk, 28-2(1973), 3-17.

[F] 代数多様体の上で

52. L. V. Gontyareba : On cohomologies of Lie algebras of vector fields on algebraic curves, Usp. Math. Nauk, 27-1(1972), 243-244.

[G] 無限 Lie 環の分類

53. S. Kobayashi - T. Nagano : On filtered Lie algebras and geometric structures, III and IV, J. Math. Mech. 14(1965), 679-706, and 15(1966), 163-175.
54. Y. Matsushima : Sur les algebras de Lie linéaires semi-involutives, Colloque de Topologie de Strasbourg(1954), 1-17.

55. T. Morimoto - N. Tanaka : The classification of the real primitive infinite Lie algebras, J. Math. of Kyoto Univ. 10-2(1970), 207-243.

ここで, F. A. は Functional Analysis and its Application の略である。文中の引用は数字に「」をつけた。