

# ON THE VARIETY OF SPECIAL LINEAR SYSTEMS OF DEGREE $g-1$ ON SMOOTH ALGEBRAIC CURVES

KYUNG-HYE CHO, CHANGHO KEEM AND AKIRA OHBUCHI

## 1. 準備

$C$  を複素数体  $\mathbb{C}$  上で定義された代数曲線として

$$\mathrm{Pic}^d(C) := \{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(C) \mid \deg(\mathcal{L}) = d\}$$

とする。  $r \in \mathbb{N}$   $r \geq 1$  を与えて

$$W_d^r(C) \stackrel{\text{集合として}}{:=} \{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^d(C) \mid \dim \Gamma(C, \mathcal{L}) \geq r+1\}$$

と置く。正確には  $\mathcal{L}$  を  $C \times \mathrm{Pic}^d(C)$  の上の次数  $d$  の Poincaré bundle とする。即ち勝手な  $L \in \mathrm{Pic}^d(C)$  に対して  $\mathcal{L}|_{C \times \{L\}} \cong L$  を満たしている。  $E$  を  $C$  上の次数  $m \geq 2g-d-1$  の divisor として  $\Gamma = E \times \mathrm{Pic}^d(C)$  と置き、又  $\nu: C \times \mathrm{Pic}^d(C) \rightarrow \mathrm{Pic}^d(C)$  を projection とする。標準的な exact sequence

$$0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{L}(\Gamma)/\mathcal{L} \rightarrow 0$$

について  $\nu_*$  を取ると base change theorem に従って  $R^1\nu_*\mathcal{L}(\Gamma) = 0$  である事が解るので、

$$0 \rightarrow \nu_*\mathcal{L} \rightarrow \nu_*\mathcal{L}(\Gamma) \xrightarrow{\sim} \nu_*(\mathcal{L}(\Gamma)/\mathcal{L}) \rightarrow R^1\nu_*\mathcal{L} \rightarrow 0$$

が解り、更に再び base change theorem によって  $\nu_*(\mathcal{L}(\Gamma)/\mathcal{L})$  及び  $\nu_*\mathcal{L}(\Gamma)$  は locally free になる。ここで

$$W_d^r(C) := (\mathrm{Pic}^d(C))_{m+d-g-r}(\gamma)$$

と定義する (詳しくは [ACGH] pp.154-159 を参照)。標準的な cup product map を

$$\mu_0: \Gamma(C, L) \otimes \Gamma(C, \omega \otimes L^{\otimes -1}) \rightarrow \Gamma(C, \omega)$$

とする。又、

$$\Gamma(C, \omega) \times H^1(C, \mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{C}$$

を Serre duality の pairing として以下が知られる ([ACGH] p.189 (4.2) Proposition 参照)。

**命題.**  $L \in W_d^r(C) \setminus W_d^{r+1}(C)$  ( $r \geq d-g$ )  $\Rightarrow T_L(W_d^r(C)) \cong (\mathrm{im} \mu_0)^\perp \subset H^1(C, \mathcal{O})$ .

今  $L \in W_d^r(C) \setminus W_d^{r+1}(C)$  に対して

$$\Gamma(C, L) \otimes \Gamma(C, \omega \otimes L^{\otimes -1}) \xrightarrow{\mu_0} \Gamma(C, \omega)$$

である場合

$$\dim T_L(W_d^r(C)) = g - (r+1)(g-d+r)$$

である。この右辺の値は Brill-Noether 数として知られる数で  $\rho$ ,  $\rho(d, g, r)$  或いは  $\rho(W_d^r(C))$  の様に記述される。ここで以下の事実が知られている ([ACGH] の参考文献を参照されたい)。

**定理.** (*Kempf, Kleimann-Laksov*).  $C$  が種数  $g$  の非特異代数曲線で  $r \geq d - g$  とする。この時に

$$\rho(W_d^r(C)) \geq 0 \Rightarrow W_d^r(C) \neq \emptyset$$

が成立する。又、この時に  $W_d^r(C)$  の勝手な component  $X$  は  $\dim(X) \geq \rho(W_d^r(C))$  を満たす。

**定理.** (*Griffith, Harris*).  $C$  が種数  $g$  の一般の非特異代数曲線で  $r \geq d - g$  とする。この時に

$$\rho(W_d^r(C)) < 0 \Rightarrow W_d^r(C) = \emptyset$$

が成立する。

**定理.** (*Gieseker, Fulton-Lazarsfeld*).  $C$  が種数  $g$  の一般の非特異代数曲線で  $r \geq d - g$  とする。この時に

$$\rho(W_d^r(C)) \geq 1 \Rightarrow W_d^r(C) \text{ は非特異な既約多様体}$$

が成立する。

以上の定理では  $r \geq d - g$  の仮定が付いているが、これは  $(d, r)$  が line bundle  $\mathcal{L}$  の  $(\deg \mathcal{L}, \dim |\mathcal{L}|)$  であれば Riemann-Roch の定理によって導かれる不等式であるから自然な仮定である。一方、上からの評価として以下が知られる。

**定理.** (*H. Martens*).  $C$  が種数  $g$  の非特異代数曲線であるとする。この時、

$$d \leq g + r - 2, r \geq 1 \Rightarrow \dim(W_d^r(C)) \leq d - 2r$$

が成立する。又、等号が成立する必要充分条件は  $C$  が hyperelliptic curve である時である。

**定理.** (*Mumford*).  $C$  が種数  $g$  の非特異代数曲線であり、 $d \leq g + r - 3, r \geq 1$  であるとする。この時

$$\text{ある component } X \subset W_d^r(C) \text{ があって } \dim(X) = d - 2r - 1$$

ならば

$C$  は trigonal, bielliptic (楕円曲線の二重被覆) 又は平面 5 次曲線のいずれかが成立する。

以下の定理は主要部分は [K] による物であるが、他の人の結果を合わせて完全な物となっている。

**定理.** (*Ballico, Coppens, Keem, G. Martens, Mukai, Ohbuchi*).  $C$  が種数  $g$  の非特異代数曲線であり、 $d \leq g + r - 4, r \geq 1$  であるとする。この時

$$\text{ある component } X \subset W_d^r(C) \text{ があって } \dim(X) \geq d - 2r - 2 \geq 0$$

ならば

$C$  は hyperelliptic, trigonal, bielliptic,  $\mathbb{P}^1$  の四重被覆面、  
種数 2 の曲線の二重被覆面又は平面 6 次曲線のいずれか

が成立する。

ここにある一連の定理も  $(d, r)$  について仮定を付けているが、これについては一部考えなければならぬ場合が存在する。一般に

$$W_d^r(C) \cong W_{2g-2-d}^{r-d+g-1}(C)$$

が成立するから  $(d, r)$  についての仮定は  $(d, r)$  及び  $(2g - 2 - d, r - d + g - 1)$  についての仮定と考えられる。従って H. Martens の定理の仮定は、あらゆる special line

ON THE VARIETY OF SPECIAL LINEAR SYSTEMS OF DEGREE  $g-1$ 

bundle (i.e.  $h^1(\mathcal{L}) \neq 0$  である  $\mathcal{L}$ ) についての仮定と考えられ, Mumford の定理に於ては  $(d, r) = (g-1, 1)$  以外のあらゆる special line bundle についての仮定と考えられる。しかも Mumford の定理に於て  $(d, r) = (g-1, 1)$  である場合は  $\rho(d, g, r) = d-2r-1$  となっているので一般の曲線についての主張をしなくてはいけない場合であり, それ故に除外して考えるべき場合である。この意味で Mumford の定理も, あらゆる special line bundle についての主張と取る事が出来る。しかしながら  $d-2r-2$  次元の場合は同じく考えると  $(d, r) = (g-1, 2)$  以外は Mumford の定理と同様に考える事が出来るが  $(d, r) = (g-1, 2)$  の時は一般の曲線である場合でもなく, 又定理では主張されてない場合になる。ここではその  $(d, r) = (g-1, 2)$  の場合について, 曲線の完全な分類を与える事を目的とする。以下に於いて  $\dim W_d^r(C)$  と書いたら  $W_d^r(C)$  の component の中で最大次元の component の次元を表す物とする。主定理は以下の通りである。

**定理 A.**  $C$  を genus  $g \geq 7$  の代数曲線とする。  $\dim W_{g-1}^2(C) = g-7$ , であれば *trigonal*, *tetragonal*, 種数が 9 以上の種数 2 の代数曲線の二重被覆, それと平面六次曲線のいずれかである。

**定理 B.**  $C$  を genus  $g \geq 7$  の代数曲線とする。  $C$  が *trigonal*, 種数が 9 以上の種数 2 の代数曲線の二重被覆,  $g_8^3$  を持つ *tetragonal curve* ( $g=10$ ),  $g_6^2$  を持つ *tetragonal curve* ( $g \leq 10$ ), 平面六次曲線ならば  $\dim W_{g-1}^2(C) = g-7$  である。

**定理 C.** ( $g \geq 11$ ).  $C$  を  $g \geq 11$  の *tetragonal curve* で種数が 9 以上の種数 2 の代数曲線の二重被覆でないと仮定する。この時,

$$\dim W_{g-1}^2(C) \leq g-7$$

である。

**定理 C.** ( $g=9, 10$ ).  $C$  を  $g=9, 10$  の *tetragonal curve* で種数が 9 以上の種数 2 の代数曲線の二重被覆でないか,  $g=10$  で  $g_8^3$  を持たないか,  $g_6^2$  を持たないならば

$$\dim W_{g-1}^2(C) \leq g-7$$

である。

**定理 C.** ( $g=7, 8$ ).  $C$  を  $g=7, 8$  の *tetragonal curve* で  $g_6^2$  を持たないならば

$$\dim W_{g-1}^2(C) \leq g-7$$

である。

## 2. 補題と主定理の証明

以下の於いて定理 A, 定理 B, 定理 C の証明の概略を与える。以下は基本的である。

**命題 1.**  $C$  を genus  $g \geq 7$  の代数曲線とする。この時  $\dim W_{g-1}^2(C) = g-6$  である必要充分条件は  $C$  が *bielliptic* である事である。

KYUNG-HYE CHO, CHANGHO KEEM AND AKIRA OHBUCHI

**補題 2.**  $C$  を genus  $g \geq 7$  の代数曲線とする。この時  $C$  が種数 2 の代数曲線の二重被覆であって genus  $g \geq 9$  を満たすか, *trigonal* であるか,  $g_8^3$  を持つ *tetragonal curve* ( $g = 10$ ),  $g_6^2$  を持つ *tetragonal curve* ( $g \leq 10$ ), 平面六次曲線ならば  $\dim W_{g-1}^2(C) = g - 7$  である。

**証明.** 種数 2 の代数曲線の二重被覆である時は被覆を  $\pi : C \rightarrow E$  として,

$$\pi^* W_4^2(E) + W_{g-9}(C)$$

が求める locus であり *trigonal* の時は

$$2g_3^1 + W_{g-7}(C)$$

が求める locus である (Martens-Schleyer[MS] 参照)。  $g_8^3$  を持つ場合は

$$g_8^3 - P_1 + P_2 + \cdots + P_{g-7}$$

が求める locus となり  $g_6^2$  を持つ場合は

$$g_6^2 + P_1 + \cdots + P_{g-7}$$

が求める locus である。  $g \neq 10$  だと  $g_8^3$  を持つ *tetragonal* なら  $g_6^2$  を持つ事は容易であるし, birational な  $g_6^2$  を持つなら  $g \leq 10$  であり birational でない  $g_6^2$  を持つなら *trigonal* であるから仮定にある条件が導かれる。  $\square$

**補題 3.**  $C$  を genus  $g \geq 7$  の代数曲線とする。今種数 2 の代数曲線の二重被覆でなく, *trigonal* でもないとする。  $\dim W_{g-1}^2(C) = g - 7$  であり勝手な  $W_{g-1}^2(C)$  の  $g - 7$  次元の *component* に含まれる一般の元  $\mathcal{L}$  が *base-point-free* であるとする。今  $X$  を  $g - 7$  次元の  $W_{g-1}^2(C)$  の *component* すると, 一般の  $\mathcal{L} \in X$  は  $\mathcal{L}, K_C - \mathcal{L}$  が共に *birational* になる。

**証明.**  $\mathcal{L} \in X$  に対して  $\mathcal{L}$  が定義する写像  $\psi_{\mathcal{L}} : C \rightarrow \mathbb{P}^2$  が birational でないとする。もし  $\psi_{\mathcal{L}}$  が一般の  $\mathcal{L}$  に対して *rational* であるとするなら

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\psi_{\mathcal{L}}} & C_{\mathcal{L}} \subset \mathbb{P}^2 \\ \rho \searrow & & \nearrow \\ & \mathbb{P}^1 & \end{array}$$

で  $\psi_{\mathcal{L}}$  が二次元の complete linear system で定義されるので  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$  は  $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)|$  で定義される。従って  $\mathcal{L} \cong \rho^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$  であり  $\rho^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) = g_{(g-1)/2}^1$  となる。それ故

$$g - 7 = \dim X \leq \dim W_{\frac{g-1}{2}}^1(C) = \frac{g-1}{2} - 2 - 2v$$

となり矛盾。  $\mathcal{L}$  に対して *rational* でないなら de Franchis' の定理に従う。  $\square$

以下の補題は重要である。

ON THE VARIETY OF SPECIAL LINEAR SYSTEMS OF DEGREE  $g-1$ 

**補題 4.**  $C$  を genus  $g \geq 7$  の代数曲線で  $\dim W_{g-1}^2(C) = g-7$  であるとする。今勝手な  $W_{g-1}^2(C)$  の  $g-7$  次元の component  $X$  の一般の元が base-point-free であると仮定する。更に一般の元  $\mathcal{L} \in X$  は  $\mathcal{L}$  と  $\omega_C \otimes \mathcal{L}^{-1}$  が共に birationally であるとも仮定する。この時に以下が成立する。

(i)  $\dim W_{g-3}^1(C) \geq g-7$ .

(ii) もし  $\dim W_{g-3}^1(C) = g-7$  ならば component  $T \subset W_{g-3}^1(C)$  があって  $\dim T = g-7$  であり, 勝手な  $\mathcal{L} \in X$  は  $\mathcal{M} \in T, P, Q \in C$  が取れて

$$\mathcal{L} = \mathcal{M} \otimes \mathcal{O}(P+Q)$$

の形になる。

**証明.** 勝手な  $\mathcal{L} \in X$  に対して  $P, Q \in C$  があって  $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(-P-Q) \in W_{g-3}^1(C)$  となる事は容易である。そこで以下の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} W_{g-3}^1(C) \times W_2(C) & \xrightarrow{q} & W_{g-1}^1(C) \\ p \downarrow & & \\ W_{g-3}^1(C) & & \end{array}$$

ここで  $q(\mathcal{M}, \mathcal{O}(P+Q)) = \mathcal{M} \otimes \mathcal{O}(P+Q)$  として  $p(\mathcal{M}, \mathcal{O}(P+Q)) = \mathcal{M}$  とする。今  $Z_0$  を  $q^{-1}(X)$   $q(Z_0) = X$  である component とする。  $p = p|_{Z_0}, q = q|_{Z_0}$  として以下を得る。

$$\begin{array}{ccc} Z_0 & \xrightarrow{q} & X \\ p \downarrow & & \\ p(Z_0) & & \end{array}$$

$q$  が quasi-finite である事が確かめられる。更に  $p$  が quasi-finite である事も解る。従って (i) を得る。更に (ii) では  $p(Z_0)$  が component になる訳なので結論は明らか。

**定理 A の証明.**

定理の仮定と補題 4 に従って  $g-7$  以上の次元を持つ component が  $W_{g-3}^1(C)$  に存在する訳だから Ballico, Coppens, Keem, G. Martens, Mukai, Ohbuchi による定理から主張は明白である。□

次に定理 B の証明の概略を与える。

**定理 B の証明.**

$C$  を genus  $g \geq 7$  の代数曲線とする。  $C$  が trigonal である時は Martens-Schleyer [MS] に従う。又種数が 9 以上の種数 2 の代数曲線の二重被覆である時は

$$\pi^* W_4^2(E) + W_{g-9}(C) \subset W_{g-1}^2(C)$$

が  $g-7$  次元の locus となっているが, もし component でなければ定理 (Mumford) に従って bielliptic curve となるので種数 2 の代数曲線の二重被覆が bielliptic になるのは  $g \leq 7$  しかありえない事から矛盾。  $g_8^3$  を持つ tetragonal curve ( $g=10$ ),  $g_6^2$  を持つ tetragonal curve ( $g \leq 10$ ), 平面六次曲線の場合についても同様な計算によって  $\dim W_{g-1}^2(C) = g-7$  である。□

最後に定理 C の証明の概略を与える。証明は  $g \geq 11, g=10, 9, g=8, 7$  の三つの場合に分けて考える。その為の幾つか補題を用意するが, これらの補題では特に断らなければ genus の仮定は  $g \geq 7$  である。

**補題 5.**  $C$  を genus  $g \geq 7$  の *tetragonal curve* で  $W_{g-1}^2(C) = g-7$  を満たしているとする。更に  $\dim \Gamma(C, \mathcal{O}(2g_4^1)) = 3$  とする。 $X \subset W_{g-1}^2(C)$  を  $g-7$  次元の *component* として

$$\mathcal{E}_X := \{D \in C_{g-5} \mid |g_4^1 + D| \in X\}$$

と置く。この時勝手な  $D \in \mathcal{E}_X$  に対して  $|K_C - 2g_4^1 - D| \neq \emptyset$  であり

$$|K_C - 2g_4^1| = \bigcup_{D \in \mathcal{E}_X} D + |K_C - 2g_4^1 - D|$$

が成立する。ここで *locus*  $D + |K_C - 2g_4^1 - D| \subset C_{2g-10}$  は  $|K_C - 2g_4^1|$  の部分集合と考えている。

**証明.**  $\mathcal{L} \in X$  を  $W_{g-1}^2(C)$  の  $g-7$  次元の勝手な *component* に含まれる勝手な元とすると  $|\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(-g_4^1)| \neq \emptyset$  が満たされる事は Base Point Free Pencil Trick と semi-continuity によって得られる。それ故写像を

$$\begin{aligned} \phi : C_{g-5} &\longrightarrow \text{Pic}^{g-1}(C) \\ D &\longmapsto \mathcal{O}(D + g_4^1) \end{aligned}$$

によって定義すると  $\phi$  は勝手な  $\mathcal{L} \in X$  に対して  $\phi^{-1}(\mathcal{L}) \neq \emptyset$  を満たすので  $\dim \mathcal{E}_X \geq g-7$  となり、更に  $K_C - X$  が  $W_{g-1}^2(C)$  の  $g-7$  次元の *component* である事に注意すれば

$$|K_C - 2g_4^1 - D| = |K_C - (D + g_4^1) - g_4^1| \neq \emptyset, \quad \forall D \in \mathcal{E}_X$$

も得られる。そこで  $\psi(C, E) = D + E$  として

$$\mathcal{E}_X \times C_{g-5} \supset \{(D, E) : D \in \mathcal{E}_X, E \in |K_C - 2g_4^1 - D|\} =: \Sigma \xrightarrow{\psi} C_{2g-10},$$

とすれば  $\psi$  は finite map だから

$$\dim \psi(\Sigma) = \dim \Sigma \geq \dim \mathcal{E}_X \geq g-7$$

である事が解る。又  $\psi(\Sigma) \subset |K_C - 2g_4^1|$  であり  $\dim |K_C - 2g_4^1| = g-7$  なので

$$|K_C - 2g_4^1| = \psi(\Sigma) = \bigcup_{D \in \mathcal{E}_X} D + |K_C - 2g_4^1 - D|$$

を得る。□

以下の補題の仮定は技術的な理由で付けられている物で仮定の当てはまらない場合については後で個別に扱わなければならない。しかし結果自体は大変重要である。

**補題 6.**  $C$  を genus  $g \geq 8$  の *tetragonal curve* として更に *tetragonal linear system*  $g_4^1$  は只一つであると仮定する。更に以下を仮定する。

- (i)  $\dim W_{g-1}^2(C) = g-7$ 。
- (ii)  $C$  は  $g_6^2$  を持たない。
- (iii)  $g \geq 9$  の時は  $C$  は genus 2 の二重被覆でないとする。

ON THE VARIETY OF SPECIAL LINEAR SYSTEMS OF DEGREE  $g-1$ 

(iv)  $X \subset W_{g-1}^2(C)$  を maximal dimensional component として general  $\mathcal{L} \in X$  に対して  $\mathcal{L}$  と  $\omega_C \otimes \mathcal{L}^{-1}$  は共に base point free, birational,  $|\mathcal{L} - g_4^1| \neq \emptyset$  それに  $|\omega_C \otimes \mathcal{L}^{-1} - g_4^1| \neq \emptyset$  とする。

(v)  $g=9$  の時は  $e_3 \geq 1$  であり  $(e_2, e_3) \neq (1, 1)$  とする, ここで  $(e_1, e_2, e_3)$  は  $g_4^1$  の Maroni タイプ invariant (scrollar invariants, Kato, Ohbuchi [KO] 参照) と仮定する。

(vi)  $g=8$  の時は  $e_3 \geq 1$  と仮定する。

今  $\psi_{\mathcal{L}}: C \rightarrow C_{\mathcal{L}} \subset \mathbb{P}^2$  を  $\mathcal{L} \in X$  によって定義される morphism とする。  $\tilde{P} \in C_{\mathcal{L}}$  を  $g_4^1$  に対応した  $(g-5)$ -fold singular point とする, i.e.  $|\mathcal{L} - g_4^1|$  の  $\psi_{\mathcal{L}}$  による像とする (補題 5 参照)。この時にもし  $\mathcal{L} \in X$  が general なら  $\tilde{P} \in C_{\mathcal{L}}$  は ordinal singular point である。

証明. (概略のみ) 仮定から  $\dim H^0(C, K_C - 2g_4^1) = g-6$  を得る (詳細は省略)。条件 (ii) により  $|K_C - g_4^1|$  は very ample となる。  $\phi: C \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-4}$  をその埋め込みとする。  $P \in C$  に対して  $l_P \subset \mathbb{P}^{g-4}$  を  $\phi(P)$  での  $\phi(C)$  の tangent line とする。条件 (iv) と H.Martens の定理により general  $\mathcal{L} \in X$  に対して  $\dim |\mathcal{L} - g_4^1| = 0$  かつ  $\dim |\omega_C \otimes \mathcal{L}^{-1} - g_4^1| = 0$  と仮定して差し支えない。この  $\mathcal{L}$  に対して  $H_{g-7}$  を  $D' \in |\omega_C \otimes \mathcal{L}^{-1} - g_4^1|$  によって生成された  $\mathbb{P}^{g-4}$  の linear subspace とする。補題 5 より  $\dim H_{g-7} = r(K_C - g_4^1) - h^0(C, K_C - g_4^1 - D') = g-7$ 。  $\mathbb{P}^{g-4}$  の二つの linear subspace  $H$  と  $l$  の join を  $H * l$  と書く事にする。  $\pi: \mathbb{P}^{g-4} \rightarrow \mathbb{P}^2$  を  $H_{g-7}$  を center とする projection とする。今あらかじめ  $|\mathcal{L} - g_4^1| = D$  が reduced である様にとっておく。この時、  $P \in \text{Supp } D$  に対して  $l_P * H_{g-7}$  は  $\mathbb{P}^{g-4}$  の hyperplane である事は容易である。従って  $\tilde{P} \in C_{\mathcal{L}}$  が ordinal singular point である必要充分条件は全ての  $P \neq Q \in \text{Supp } |\mathcal{L} - g_4^1|$  に対して  $l_P * H_{g-7} \neq l_Q * H_{g-7}$  である事である。更に以下が成立する (証明は省略)。

Claim:  $P, Q \in D = \text{Supp } |\mathcal{L} - g_4^1|$  に対して  $l_P * H_{g-7} = l_Q * H_{g-7}$  である必要充分条件は  $P, Q$  が  $g_4^1$  の同じ fibre に入る事, i.e  $P + Q < E$  がある  $E \in g_4^1$  について成立する事である。

これから以下を示せば完了となる。

Claim: general  $\mathcal{L} \in X$  について以下が成立する:

- (1)  $|\mathcal{L} - g_4^1| = \{D\}$  は reduced である
- (2) どの  $D$  の二点も  $g_4^1$  の同一の fibre に含まれない。

補題 5 に従ってこの Claim は以下を示せば充分である。

Claim': general  $G \in |K_C - 2g_4^1|$  について、  $G$  の  $g-5$  点  $P_1, \dots, P_{g-5}$  で以下を満たす物が存在する:

- (1)  $G$  は reduced.
- (2)  $\{P_1, \dots, P_{g-5}\}$  のどの二点も  $g_4^1$  の同じ fiber に含まれずかつ  $P_1 + \dots + P_{g-5} \in \mathcal{E}_X$ .

証明は以下の三つの場合に分けて行う。

- (I)  $e_3 \geq 2$ .
- (II)  $e_3 = 1, e_2 \geq 2$ .
- (III)  $e_3 = 1, e_2 = 1, g \neq 9$ .

(I) の場合: 仮定より  $e_3 \geq 2$  なので  $\dim |3g_4^1| = 3$  となる。これから  $|K_C - 2g_4^1|$  が base-point-free である事は比較的容易。従って (1) は Bertini の定理から明白。(2) については  $\mathcal{E}(g_4^1) = \{F : F \leq D \text{ for some } D \in g_4^1\} \subset C_2$  として  $S := \bigcup_{F \in \mathcal{E}(g_4^1)} |K_C - 2g_4^1 - F| + F \subset |K_C - 2g_4^1|$  と置くと勝手な  $F \in \mathcal{E}(g_4^1)$  について  $\dim |K_C - 2g_4^1 - F| = \dim |K_C - 2g_4^1| - 2 = g - 9$  なので  $S \subset |K_C - 2g_4^1|$  は codimension 1 となり (2) も得られる。

(II) の場合:  $|K_C - 2g_4^1|$  が base point を高々一点しか持たない事が示される (詳細は省略)。今  $|K_C - 2g_4^1 - \Delta|$  ( $\Delta$  は高々一点の  $|K_C - 2g_4^1|$  の base locus) により定義される写像  $\eta : C \rightarrow \mathbb{P}^{g-7}$  を考える。以下の場合をそれぞれ考える。

(i)  $\deg \eta \geq 3$  の時:  $\deg \eta(C) \geq g - 7$  で  $\deg \eta(C) \cdot \deg \eta = \deg |K_C - 2g_4^1 - \Delta|$  なので簡単な計算から  $g = 11, \deg \eta = 3, \Delta = 0, \deg \eta(C) = 4$  in  $\mathbb{P}^4$ ;  $g = 10, \deg \eta = 3, \deg \Delta = 1, \deg \eta(C) = 3$  in  $\mathbb{P}^3$ ;  $g = 9, \deg \eta = 4, \Delta = 0, \deg \eta(C) = 2$  in  $\mathbb{P}^2$ ;  $g = 8, \deg \eta = 6, \Delta = 0, \eta(C) = \mathbb{P}^1$ ;  $g = 8, \deg \eta = 5, \deg \Delta = 1, \eta(C) = \mathbb{P}^1$  の場合だけである事が解る。最初の三つの場合は矛盾が生じる事が解る。第四の場合と第五の場合は (1), (2) 成立が確かめられる。実際第四の場合は  $|K_C - 2g_4^1| = g_6^1$  が base-point-free なので (1) は容易。(2) については  $(g_4^1, |K_C - 2g_4^1|)$  で定義される写像  $C \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3$  を考えると birational の時は (2) は明白。又 birational でなければ  $\deg \varphi = 2$  が導かれて  $\varphi(C) = E$  は genus 2 以外はない。この場合  $|K_C - 2g_4^1| = \varphi^*(g_3^1)$  (しかも base-point-free) で  $g_4^1 = \varphi^*(g_2^1)$  を得る。更に general  $G \in |K_C - 2g_4^1|$  に対して  $P + Q + R \leq G$  が  $\varphi^*(p) + Q$  の形なら  $\varphi^*(p) + Q \in \mathcal{E}_X$  はあり得ない事は補題の仮定と若干の計算から解る。それ故  $P + Q + R \in \mathcal{E}_X$  であるなら  $\{P, Q, R\}$  のどの二点も  $g_4^1 = \varphi(g_2^1)$  の同一の fibre に入る事はない事が解る。即ち (2) が確かめられた事になる。第五の場合の証明も同様な方針である。

(ii)  $\deg \eta = 2$  の時: この場合  $g \geq 9$  となり  $|K_C - 2g_4^1|$  は base-point-free で  $\deg \eta(C) = g - 5$  を得る。Castelnuovo genus bound により  $\eta(C)$  の genus は  $h \leq 2(g \geq 10), h \leq 3(g = 9)$  となる。仮定から  $g = 9, h = 3$  しかあり得ない。 $e_3 = 1, e_2 \geq 2, h^0(C, K_C - 3g_4^1) = 1$  なので  $E = |K_C - 3g_4^1|$  は degree 4 の effective divisor であり更に  $\eta(E)$  の linear span が一点になるので  $\eta(C)$  は singular になり矛盾。

(iii)  $\deg \eta = 1$  の時:  $g \geq 9$  であり  $h^0(C, K_C - 3g_4^1 - \Delta) = g - 8$  は仮定による。 $D \in g_4^1$  に対して  $\dim \eta(D) = \dim |K_C - 2g_4^1 - \Delta| - h^0(C, K_C - 2g_4^1 - \Delta - D) = (g - 7) - (g - 8) = 1$  なので surface  $S := \bigcup_{D \in g_4^1} \overline{\eta(D)}$  を考えると  $S$  はある rational ruled surface  $\mathbb{P}(\mathcal{E})$  の

tautological bundle から得られる linear system の像である。従って general hyperplane  $H \subset \mathbb{P}^{g-7}$  による切断を考えれば補題を得る。

(III) の場合: これらの場合も仮定と若干の計算により矛盾が得られる。□

ここで、条件 (iv) は補題 3 が使える場合は仮定する必要がない (補題 5 参照)。又もし二つ  $g_4^1, h_4^1$  もしくは  $e_3 = 0$  である  $g_4^1$  が取れば, bielliptic でなければ  $g_4^1 + h_4^1$  ないし  $2g_4^1$  が birational な  $g_8^3$  を与え, 更に  $g_8^3$  が very ample でないと  $g_8^3$  から  $g_6^2$  が出来る。従って  $g_4^1$  が只一つ (又は  $e_3 \neq 0$ ) という仮定は定理 C の証明に於いて最初から仮定しておいて構わない条件である。



**補題 7.**  $C$  を genus  $g \geq 11$  として或る  $d, 4 \leq d \leq g-3$  に対して  $\dim W_d^1(C) = d-4$  とする。この時に  $C$  は  $g_4^1$  を只一つだけ持ち、全ての  $e, 4 \leq e \leq g-3$  について  $\dim W_e^1(C) = e-4$  である。又勝手な component of  $W_e^1(C)$  の maximal dimensional component は  $C$  が genus 2 の二重被覆面でなければ  $\{g_4^1\} + W_{e-4}(C)$  の形になる。

**証明.** [K], Corollary 2.2. と [K], Theorem 2.1. を参照。□

**定理**  $C(g \geq 11)$  の証明. (概略) 今仮定を満たす  $C$  に  $\dim X = g-7$  である component  $X \subset W_{g-1}^2(C)$  が存在したとする。  $X$  の general な  $\mathcal{L} \in X$  は base point free, birational になる事が解る (証明は省略)。補題 3, 補題 4, 補題 7 によって (補題 4 の用語をそのまま用いて)

$$p(Z) = g_4^1 + W_{g-7}(C)$$

なる component  $Z \subset q^{-1}(X)$  で  $q(Z) = X$  かつ  $p(Z) \subset W_{g-3}^1(C)$  は component である物が存在する (詳細は省略)。従って general  $\mathcal{M} \in p(Z)$  は complete pencil で  $\mathcal{M} = \mathcal{O}(g_4^1 + P_1 + \cdots + P_{g-7})$  と書ける事になり  $\mathcal{L} = \mathcal{O}(g_4^1 + P_1 + \cdots + P_{g-7} + A + B)$  と書ける。補題 6 に従って  $C$  の  $\mathcal{L}$  による平面モデル  $C_{\mathcal{L}}$  の  $P_1 + \cdots + P_{g-7} + A + B$  に対応した特異点は ordinal である。又

$$p_a(C_{\mathcal{L}}) = \frac{(g-2)(g-3)}{2} > g + \frac{(g-5)(g-6)}{2}$$

なので  $C_{\mathcal{L}}$  には他の特異点  $R$  が存在する。  $\mu$  を  $R$  の multiplicity とすると complete base-point-free pencil  $h_{g-1-\mu}^1$  が存在して  $\mathcal{L} = h_{g-1-\mu}^1 \otimes \mathcal{O}(Q_1 + \cdots + Q_{\mu})$  ( $Q_1, \dots, Q_{\mu} \in C$ ) と書けなければいけない事になる。一方  $\mathcal{L}$  が充分 general 充分なら再び

$$h_{g-1-\mu}^1 \otimes \mathcal{O}(Q_1 + \cdots + Q_{\mu-2}) \in p(Z)$$

となるので (詳細は省略)  $R$  の multiplicity は再度  $g-5$  となる。従って

$$p_a(C_{\mathcal{L}}) = \frac{(g-2)(g-3)}{2} \leq g + 2 \cdot \frac{(g-5)(g-6)}{2}$$

である事から矛盾。□

次に定理  $C(g=10, 9)$  と定理  $C(g=8, 7)$  の証明の概略を述べる。最初に定理  $C(g=10, 9)$  に必要な補題を幾つか述べる。以下は補題 6 で  $g=9$  の時には仮定されなかった場合についてである。

**補題 8.**  $C$  を genus 9 の tetragonal curve で只一つの  $g_4^1$  を持ち  $e_3 = e_2 = 1$  であるとする。更に  $\dim W_{g-1}^2(C) = g-7$  で  $C$  は  $g_6^2$  を持たないと仮定する。この時  $C$  は genus 2 の二重被覆になっている。

**証明.** 証明は省略。

これから定理  $C(g=10, 9)$  の証明の為には補題 7 が  $g=10, 9$  で議論出来れば定理  $C(g \geq 11)$  と同様な証明方法が使える事になる (最後の  $p_a(C_{\mathcal{L}}) = \frac{(g-2)(g-3)}{2} \leq g + 2 \cdot \frac{(g-5)(g-6)}{2}$  である事から矛盾, の部分は  $g=9$  では等号になってしまうが, その場合は  $g_4^1$  が二つ存在する事になるので仮定に反する)。以下の補題では常に  $g_4^1$  は只一つであると仮定しておく。以下は  $g=10$  の場合の補題 7 に相当する補題である。

**補題 9.**  $C$  を genus  $g = 10$  の tetragonal curve で  $g_6^2$  を持たないとする。又  $C$  は genus 2 の二重被覆でないとは定する。もし  $\dim W_7^1(C) = 3$  ならば  $\{g_4^1\} + W_3(C)$  は  $W_7^1(C)$  の只一つの maximal dimensional component である。

**証明.** 証明は長いので省略。

以下は  $g = 9$  の場合の補題 7 に相当する補題である。

**補題 10.**  $C$  を genus  $g = 9$  の tetragonal curve で  $g_6^2$  を持たないとして  $C$  は genus 2 の二重被覆でないとは定する。又以下の (i) から (vii) を同時に満たす場合でもないとは定する。

(i)  $E$  を genus 3 の non-hyperelliptic として二重被覆写像  $\phi: C \rightarrow E$  が存在する

(ii)  $K_C \sim \phi^*(K_E) + 2g_4^1$

(iii)  $\dim \Gamma(C, \mathcal{O}(2g_4^1)) = 3$

(iv)  $E$  上の  $h_4^1$  があって  $2g_4^1 = \phi^*h_4^1$  となる

(v)  $\mathcal{O}(h_4^1) \not\cong \mathcal{O}(K_E)$

(vi)  $\phi_*\mathcal{O} \cong \mathcal{O}_E \oplus \mathcal{O}_E(-h_4^1)$

(vii)  $C$  は genus  $\leq 2$  の二重被覆ではない

この時もし  $\dim W_6^1(C) = 2$  ならば  $\{g_4^1\} + W_2(C)$  は  $W_6^1(C)$  の只一つの maximal dimensional component である。

**証明.** 証明は長いので省略。

さて上の条件 (i) から (vii) を同時に満たす  $C$  については更に補題を用意する必要がある。

**補題 11.** この場合  $\dim W_8^2(C) \leq 2$  である。

**証明.** (概略) もし二次元の component  $A \subset W_8^2(C)$  があったとする。general  $\mathcal{L} \in A$  は補題 6 の仮定を満たす事は容易に示されるの。そこで  $\mathcal{L}$  による平面モデル  $C_{\mathcal{L}}$  を考える。この  $C$  上には base point free な  $g_5^1$  が存在しない事は Base-Point-Free-Pencil-Trick より解る。更に補題 6 と仮定より  $g_4^1$  に対応する特異点は ordinal で只一つとなる。これから  $C$  が tetragonal と言う事から  $C_{\mathcal{L}}$  の特異点は multiplicity 2 か 4 しかありえない。 $S_{\mathcal{L}}$  を  $\mathbb{P}^2$  のそれらの (infinitely near な特異点も込めた) 7 点の特異点での blowing-up とする。 $|-K_{S_{\mathcal{L}}}|$  は complete net である事が示される (詳細略)。さて  $C_{\mathcal{L}}$  の特異点は Demazure [De] の言う quasi general position にある事が示されるので (詳細略)  $-K_{S_{\mathcal{L}}}$  は nef になる ([De] pp.38-.pp.39 p.38 a), p.39 Définition 1, p.39 Théorème 1 (a)  $\Rightarrow$  (d) 参照)。従って Reider の定理 ([R] p.310 Theorem 1 (i)) から  $|-K_{S_{\mathcal{L}}}|$  は base point free となる。これから  $l$  を  $\mathbb{P}^2$  の line の total transform として

$$f_{\mathcal{L}} = (|l|, |-K_{S_{\mathcal{L}}}|) : S_{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$$

を考えると  $f_{\mathcal{L}}(S_{\mathcal{L}}) \sim 2\{pt\} \times \mathbb{P}^2 + 2\mathbb{P}^1 \times l$  も容易。今 Segre embedding  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5$  による quadratic の引き戻しを  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$  の quadratic と呼ぶ事にすれば  $C$  は  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$  で二つの quadratic の complete intersection になっているのは容易。従って  $I$  を  $C$  の  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$  に於ける ideal sheaf として  $I(n) = I \otimes \mathcal{O}(n\{pt\} \times \mathbb{P}^2 + n\mathbb{P}^1 \times l)$  と置けば  $\dim \Gamma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, I(2)) = 2$ 。今これから

$$\phi : A \rightarrow \mathbb{P}(\Gamma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, I(2)))$$

を  $\phi(\mathcal{L}) = f_{\mathcal{L}}(S_{\mathcal{L}})$  で定義する。 $S_{\mathcal{L}}$  は 7 点 blowing-up なので  $\phi$  は quasi-finite でないとならない。しかし  $\dim \mathbb{P}(\Gamma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, I(2))) = 1$  なので  $\dim A = 2$  と仮定した事に矛盾。□

ON THE VARIETY OF SPECIAL LINEAR SYSTEMS OF DEGREE  $g-1$ 

定理  $C(g=10,9)$  の証明. (概略) 補題 8, 補題 9, 補題 10, 補題 11 に従って定理  $C(g \geq 11)$  と同じ議論で証明される。□

最後に定理  $C(g=8,7)$  の証明の概略を述べる。 $g=7$  の場合は trivial case なので  $g=8$  のみ考えれば良い。証明には以下の補題が必要である。

補題 12.  $C$  を genus 2 の二重被覆として  $C$  の genus を  $g=8$  とする。この時  $C$  は birational な  $g_6^2$  を持たず  $\dim W_7^2(C) \leq 0$  である。

証明. 証明は省略。

定理  $C(g=8,7)$  の証明.  $\dim W_{g-1}^2(C) = g-7$  で  $g=8$  とする。もし  $g_7^2 \in W_7^2(C)$  が base locus を持つとすると  $C$  は trigonal か birational な  $g_6^2$  を持つのは明らか。従って general な  $g_7^2 \in W_7^2(C)$  が base-point-free で  $C$  は trigonal でもなく birational  $g_6^2$  も持たないと仮定して良い。補題 3 と補題 4 によって  $\dim W_5^1(C) = 1$  である。これから  $C$  は tetragonal curve で ([BKMO; Theorem 1]) 勝手な  $W_5^1(C)$  の maximal dimensional component は

$$\{g_4^1\} + W_1(C)$$

となる ([BKMO; (3.2.1) Corollary 2])。従って再度定理  $C(g \geq 11)$  の証明の筋が補題 12 によって使えるので  $C$  には二つ以上の  $g_4^1$  が存在する事になる。それ故証明は完了する。□

## REFERENCES

- [A] R. D. M. Accola, *Topics in the theory of Riemann surfaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1595, Springer Verlag, 1994.
- [ACGH] E. Arbarello, M. Cornalba, P.A. Griffiths and J. Harris, *Geometry of Algebraic Curves I*, Springer Verlag, 1985.
- [BKMO] E. Ballico, C. Keem, G. Martens and A. Ohbuchi, *On curves of genus eight*, Math. Z. **227** (1998), 543-554.
- [C] M. Coppens, *Some remarks on the scheme  $W_d^r$* , Ann. di Mat. pura ed applicata (4) **157** (1990), 183-197.
- [CKM] M. Coppens, C. Keem and G. Martens, *Primitive linear series on curves*, Manuscripta Mathematica **77** (1992), 237-264.
- [De] M. Demazure, *Surface de Del Pezzo - III. Positions presque g n rales.*, S minaire sur les Singularit s des Surfaces (A.Dold, B.Eckmann, eds.), Springer Verlag, 1980, pp. 36-49.
- [GH] Griffiths and Harris, *The dimension of the variety of special linear systems on a general curve*, Duke Math. J. **47** (1980), 233-272.
- [K] C. Keem, *On the variety of special linear systems on an algebraic curve*, Math. Ann. **288** (1990), 309-322.
- [KO] T. Kato and A. Ohbuchi, *Very ampleness of multiple of tetragonal linear systems*, Comm. in Algebra **21** (1993), 4587-4597.
- [KL] S. Kleiman and D. Laksov, *On the existence of special divisors*, Am. J. Math. **94** (1972), 431-436.
- [M] G. Martens, *On dimension theorems of the varieties of special divisors on a curve*, Math. Ann. **267** (1984), 279-288.
- [Ma] H. Martens, *On the varieties of special divisors on a curve*, J. Reine Angew. Math. **227** (1967), 111-120.
- [MS] G. Martens and F.-O. Schreyer, *Line bundles and syzygies of trigonal curves*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **56** (1986), 169-189.
- [Mu] D. Mumford, *Prym varieties*, Contributions to analysis (L. Ahlfors, I. Kra, B. Maskit and L. Nirenberg, eds.), Academic Press, 1974, pp. 325-350.
- [Muk] S. Mukai, *Curves and Grassmannians*, Algebraic Geometry and Related Topics; Incheon-Korea, International Press, 1993, pp. 19-49.

KYUNG-HYE CHO, CHANGHO KEEM AND AKIRA OHBUCHI

- [R] I. Reider, *Vector bundles of rank 2 and linear systems on algebraic surfaces*, Annals of Math. **127** (1988), 309-316.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS SEOUL NATIONAL UNIVERSITY SEOUL 151-742, KOREA  
*E-mail address:* khcho@math.snu.ac.kr

DEPARTMENT OF MATHEMATICS SEOUL NATIONAL UNIVERSITY SEOUL 151-742, KOREA  
*E-mail address:* ckeem@math.snu.ac.kr

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF INTEGRATED ARTS AND SCIENCES  
TOKUSHIMA UNIVERSITY, TOKUSHIMA 770, JAPAN  
*E-mail address:* ohbuchi@ias.tokushima-u.ac.jp