

Super KP 系, OSp -Super KP 系

早稲田大学 理工学部

上野 喜三雄

(UENO Kimio)

§0. SKP 系 (Super KP) 系, OSp (Ortho-Symplectic) SKP 系について, ほぼ最終的な枠組ができたので報告する。この仕事は, 山田裕史氏 (琉球大学), 池田薫氏 (都立大学) との協同によるもので, 本論文は現在のところ執筆中である (昭和 63 年 6 月末の時矣)

§1. (x, θ) を $(1|1)$ 次元 super affine space での座標, $t = (t_1, t_2, t_3, \dots)$ を super time variables, x, t_{2l} が even, θ, t_{2l-1} が odd である。 A を super 可換な代数 (係数体の役を担う) として, formal regular な super 場のつくる代数を

$$\mathcal{S} = \mathbb{C}[[x, \theta, t]] \otimes A$$

とおく。 $\mathcal{S}$ はもちろん自然なやり方で super 可換な代数となり, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \oplus \mathcal{S}_1$ をその $\mathbb{Z}_2$ -gradation とする。 $\mathcal{S}$ においては 微分 $\frac{\partial}{\partial x}$ の平方根が定義される;

$$D := \frac{\partial}{\partial \theta} + \theta \frac{\partial}{\partial x}, \quad D^2 = \frac{\partial}{\partial x}.$$

$\mathcal{S}$ に係数をもつ super 微分作用素, super 擬微分作用素の代数を各々

$$\mathcal{D}_{\mathcal{S}} := \mathcal{S}[D], \quad \mathcal{E}_{\mathcal{S}} := \mathcal{S}((D^{-1}))$$

とおく。代数構造は言うまでもなく super Leibniz 法則で与えられ, $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}, \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ は super 非可換代数となる。 $\mathcal{S}$ には時間発展を記述する super ベクトル場

$$D_{2\ell} = \frac{\partial}{\partial t_{2\ell}}, \quad D_{2\ell-1} = \frac{\partial}{\partial t_{2\ell-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} t_{2k-1} \frac{\partial}{\partial t_{2\ell+2k-2}}$$

が作用する。これらが,

$$[D_{2\ell}, D_{2k}] = 0 = [D_{2\ell}, D_{2k-1}]$$

$$[D_{2\ell-1}, D_{2k-1}]_+ = 2 D_{2\ell+2k-2}$$

等の交換・反交換関係をみたすことに注意せよ。

SKP 系の Sato 表示は次で与えられる:

$$D_n(W) = \varepsilon_n (B_n W - W \cdot D^n) \quad (n=1, 2, \dots) \quad (1)$$

ただし, W は super 波動作用素

$$W = \sum_{j=0}^{\infty} w_j(x, \theta, t) D^{-j}, \quad w_j \in \mathcal{S}_j, \quad w_0 = 1$$

であり,

$$B_n = (W \cdot D^n \cdot W^{-1})_+ \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}(n), \quad \varepsilon_n = (-)^{n(n+1)/2}$$

である。SKP 系の解をどの様に積分するのか, また, SKP 系の解空間が USGM (普遍 super Grassmann 多様体) になる等々の事柄については 上野-山田の論文を参照して

頂くことにし, ここでは次のことに注意する。USGM は $UGM \times UGM$ 上の束空間の構造をもつが, それに対応して次の命題が成立する。

命題 1. SKP 系の解空間を $Sol(SKP)$, KP 系のそれを $Sol(KP)$ と記す。このとき, 自然な射影

$$\varpi: Sol(SKP) \longrightarrow Sol(KP) \times Sol(KP)$$

が存在する。

この射影は次の様に構成される。まず, $\mathcal{S}' = \mathbb{C}[[x, t]] \otimes A$, $\mathcal{E}_{\mathcal{S}'} := \mathcal{S}'((\frac{\partial}{\partial x})^{-1})$ とおく。 $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ の 2-spinor 表示とは次で定義される写像 π のことである。

$$\pi: \mathcal{E}_{\mathcal{S}} \longrightarrow Mat(1|1; \mathbb{C}) \otimes \mathcal{E}_{\mathcal{S}'}$$

ただし,

$$\pi(D^n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial_x & 0 \end{pmatrix}^n, \quad \pi(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi(f) = \text{diag}(f, f) \quad (f \in \mathcal{S}'_0)$$

$$\pi(f) = \text{diag}(f, -f) \quad (f \in \mathcal{S}'_1)。$$

π は $\mathcal{S}'$ super 代数同型となる。SKP 系の Sato 方程式 (3) を 2-spinor 表現して, さらに $Mat(1|1; \mathbb{C}) \otimes \mathcal{E}_{\mathcal{S}'}$ の中で body part を取れば ϖ が得られる。

§2 SKP 系に対する双線型留数公式 (BRF と略す) について考察する。まず, $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ における形式的随伴を定義す

る。 $\Delta(dx/d\theta)$ を (x, θ) 空間上での super 体積要素とする。
これは odd な量で、 $f(x, \theta) = f(x) + \theta g(x)$ を compact 台をもつ C^∞ super 場とすると、その積分は

$$\int \Delta(dx/d\theta) f(x, \theta) := \int f(x) dx$$

により定義される。 $P = P(x, \theta, D) \in \mathcal{D}_s$ の形式的随伴は、
通常の場合と同様に積分を経由して定義される。

$$\int \Delta(dx/d\theta) Pf \cdot g = \int \Delta(dx/d\theta) f \cdot P^*g \quad (2)$$

ただし、 f, g は even な super 場とする。擬微分作用素の形式的随伴は (2) を素直に拡張して得られる。例えば

$$(w D^n)^* = (-)^{a \cdot n} \varepsilon_n D^n \cdot w \quad (w \in \mathcal{S}_a, n \in \mathbb{Z}).$$

より一般に

$$(P \cdot Q)^* = (-)^{ab} Q^* \cdot P^* \quad (P \in \mathcal{E}_{s,a}, Q \in \mathcal{E}_{s,b})$$

が成立する。従って super 波動作用素 W に対しては

$$W^* = \sum_{j=0}^{\infty} (-)^j \varepsilon_{-j} D^{-j} w_j(x, \theta, t)$$

となっている。super 波動場とその双対は、

$$\begin{aligned} w(x, \theta, t, \lambda, \xi) &= W(e^H) \\ w^*(x, \theta, t, \lambda, \xi) &= (W^*)^{-1}(e^{-H}) \end{aligned} \quad (3)$$

により定義される。ただし、

$$\begin{aligned} H &= H(x, \theta, t, \lambda, \xi) = x\lambda + \sum_{\ell=1}^{\infty} (-)^{\ell} t_{2\ell} \lambda^{\ell} + (\xi + h)(\theta + \lambda^{-1}h) \\ h &= \sum_{\ell=1}^{\infty} (-)^{\ell} t_{2\ell-1} \lambda^{\ell} \end{aligned}$$

である。 (λ, ξ) は super スペクトルパラメータである。

また,

$$D^2(e^H) = \lambda e^H, \quad D_n(e^H) = \varepsilon_n D^n(e^H)$$

$$D^{-2j}(e^H) = \lambda^{-j} e^H, \quad D^{-2j+1}(e^H) = \lambda^{-j} (\lambda\theta - \zeta - h) e^H$$

に注意する。super Laplace 変換の duality を考察することにより双線型留数公式を得る。

命題 2 (BRF in $\mathcal{E}_g$). $P = P(x, \theta, D), Q = Q(x, \theta, D) \in \mathcal{E}_{g,0}$ とする。次の (i), (ii) は同値である。

$$(i) \quad PQ \in \mathcal{D}_g.$$

$$(ii) \quad \operatorname{Res}_{\lambda=\infty} (\Delta(d\lambda/d\zeta) P(x, \theta, D) (e^{x\lambda+\zeta\theta}) \cdot Q^*(x', \theta', D') (e^{-x'\lambda-\zeta\theta'})) \\ = 0 \quad \text{for } \forall (x, \theta), (x', \theta')$$

Remark $e^{x\lambda+\zeta\theta}$ は super Laplace 変換の核函数である。

命題 3 (BRF for the SKP). $w(x, \theta, t, \lambda, \zeta), w^*(x, \theta, t, \lambda, \zeta)$

は (3) の形をした super 場とする。これらが SKP 系の super 波動場, 及びその双対である為の必要十分条件は,

$$\operatorname{Res}_{\lambda=\infty} (\Delta(d\lambda/d\zeta) w(x, \theta, t, \lambda, \zeta) w^*(x', \theta', t', \lambda, \zeta)) = 0 \\ \text{for } \forall (x, \theta, t), (x', \theta', t')$$

が成立することである。

§4. OSp -SKP 系について述べる。まず, $t_{4n} = t_{4n+1} = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) として時間発展のセクターを制限し ($t = (t_{4n+1}, t_{4n+2})_{n=0,1,2,\dots}$ の意味で用いる。) その上で

super 波動作用素に対して次の対称性を課す:

$$D^{-1}W^*D = W^{-1}. \quad (4)$$

次の命題はこの系の名前の由来を明らかにする。

命題 4. OSp -SKP系, BKP系, CKP系 の解空間を各々 $Sol(*)$ により表わす。このとき次の自然な射影が存在する。

$$Sol(OSp-SKP) \xrightarrow{\omega} Sol(BKP) \times Sol(CKP).$$

BKP系は Lie 代数 $\mathfrak{so}(\infty)$ を無限小変換群にもち, CKP 系のそれは $\mathfrak{sp}(\infty)$ である。そして, OSp -SKP 系は super Lie 代数 $\mathfrak{osp}(\infty|\infty)$ を無限小変換群に持つのである。

OSp -SKP 系に対する双線型留数公式は次の通りである。

命題 5 (BRF for the OSp -SKP). (4) の形をした super 場 $w(x, \theta, t, \lambda, \xi)$ が OSp -SKP 系の super 波動場である為の必要十分条件は,

$$\text{Res}_{\lambda=\infty} \left(\Delta(d\lambda/d\xi) w(x, \theta, t, \lambda, \xi) v(x', \theta', t', \lambda, \xi) \right) = 1$$

for $v(x, \theta, t), (x', \theta', t'),$

が成立することである。ただし, $v(x, \theta, t, \lambda, \xi) = (WD^{-1})(e^{-H})$ である。

OSp -SKP 系に対する super M^c 枠 の特徴付けも得られている。ここで述べた命題の証明ともども, 近く完成される本論文のフレイブメントを参照して頂きたい。

'88 6. 28. 佐藤先生の還暦を祝って, 上野