

2 個の生成元を持つ free IN-algebra

及び free ICN-algebra の決定

東大 理 佐藤 雅彦

よく知られているように、直観主義命題論理は決定可能であり、任意に論理式を与えたときにそれが LJ の定理であるかどうかを決定する program もいくつか存在している (例えば 古森 [4], 嶋田 [7])。また Diego [2], McKay [5] に示すは、有限個の命題変数と固定するとき、それらで生成される ICN-formula ($\forall$ を含む formula) 全体から作られる Lindenbaum algebra は有限であることが分る。従ってこの Lindenbaum algebra の構造は、与えられた program を使えば原理的には ^{決定}可能である。しかしこのことは、計算時間の関係から現実的には、ほとんど不可能である。以下では、代数的な方法によつて、この Lindenbaum algebra の構造を簡単に決定する方法を与え、計算機による計算結果を簡単に述べる。

Def. 1 (I-algebra) $A = (A, 1, \rightarrow)$ は以下の条件を満たすとき I-algebra であるという。 $F \subseteq A$ で, $\rightarrow$ は A の上の binary operation である。

$$(I1) \quad p \rightarrow (q \rightarrow p) = 1$$

$$(I2) \quad (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) = 1$$

$$(I3) \quad p \rightarrow q = q \rightarrow p = 1 \Rightarrow p = q$$

Def. 2 $F \subseteq A$ は次の条件を満たすとき, A の filter であるという。

$$(F1) \quad 1 \in F$$

$$(F2) \quad p \in F, p \rightarrow q \in F \Rightarrow q \in F$$

F による A 上の relation $\sim_F$ は, $p \sim_F q \Leftrightarrow p \rightarrow q \in F$, $q \rightarrow p \in F$ によって定められ, $\sim_F$ は $\rightarrow$ と compatible な equivalence relation となるので, 自然な方法で $A/\sim_F = A/F$ は I-algebra となる。また, $p \leq q \Leftrightarrow p \rightarrow q = 1$ と定めれば, $\leq$ は A 上の partial order を定める。1 は $=$ の order での最大元である。

Diego [2] は有限生成の free I-algebra は有限であることと証明し, その構造を決定する constructive 方法を与えた。以下に定義する IN-algebra & w ICN-algebra について

でも Diego の証明は Σa が成り立ち、有限生成の free IN (ICN)-alg. は有限であることが分る。しかし、 Σa と Σb の生成元を移す free IN (ICN)-alg. は Diego の方法で計算すると、相当な長時間計算になることが予測された。そこで、以下では IN (ICN)-alg. に特有な性質を利用して、より効果的な方法を考へた。早大数学教室の計算機 Tosbac 3300 を使った、 Σa の方法での計算時間は約 10 時間であった。

Def. 3 (IN-algebra) $A = (A, 1, \rightarrow, \neg)$ は次の条件を満たすとき IN-algebra であるという。ただし $\neg$ は A 上の unary operation である。

$$(I1), (I2), (I3)$$

$$(N1) \quad (p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p) = 1$$

$$(N2) \quad \neg p \rightarrow (p \rightarrow q) = 1$$

Th. 4 (Horn [3])

A が IN-algebra $\iff A$ は最小元 0 を移した I-algebra $\neg p$ は $p \rightarrow 0$ で定義された。

Def. 5 (ICN-algebra) $A = (A, 1, \rightarrow, \neg, \wedge)$ は次の条件を満たすとき ICN-alg. であるという。ただし $\wedge$ は

A は a binary operation である。

(I1), (I2), (I3)

(N1), (N2)

(C1) $(p \wedge q) \rightarrow p = 1$

(C2) $(p \wedge q) \rightarrow q = 1$

(C3) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))) = 1$

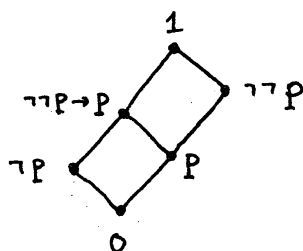
Th. 6 (Horn [3])

A が ICN-alg. $\iff A$ は IN-alg. であり $p \wedge q$ は $\inf\{p, q\}$ である。

n 個の文字 $p_1, p_2, \dots, p_n$ で生成される free ICN-alg.

は $\lambda_{\text{ICN}}(n)$ (あるいは単に $\lambda(n)$) と書くことにする。

Nishimura model [6] を見れば, $\lambda_{\text{ICN}}(1)$ は簡単に合リ次のようになる。



である場合 $\lambda_{\text{ICN}}(1) = \lambda_{\text{IN}}(1)$ である。また $\lambda_{\text{I}}(1) = \begin{array}{c} 1 \\ | \\ p \end{array}$ である。

次に $\exists$ filter $\Sigma(p)$ と $\nexists$ 17,

$p \neq 0 \neq 1 < \text{join irreducible}$

$\Leftrightarrow P/(p)$ は irreducible

以下, $P = \lambda_{\text{ICN}}(m)$ ($m \geq 1$) $\in \text{fix}(\tau)$ と $\exists$. $P \neq 0$ であることは, Th. 7 により P は nonzero join irreducible element 全体 K において $\exists$ である。 $p \in K$ であるとき, Th. 9 により $\exists$, $Q_p = P/(p)$ は irreducible である。 $R_p = Q_p/\{1, 2\}$ と $\exists$ 。 $\exists$ $a \in K$, $\exists$ $a = 0$ である。

Th. 10 $\exists \{g_1, \dots, g_{m-1}\} \subset R_p$ s.t.

$R_p = \overline{\{g_1, \dots, g_{m-1}\}}$. $\exists$ $F, G \subset R_p$ であるとき $\overline{G}$ は G の ICN-subalgebra.

(証明) $R_p = \{1\}$ ならば $R_p = \overline{\emptyset}$ である。 $R_p \neq \{1\}$ であるとき, $\overline{Q_p} \geq 3$ である。 $\exists$ $2_{Q_p} \neq 0, 1$. P は free generator $\exists p_1, \dots, p_m$ と $\exists$, $\varphi_p: P \rightarrow Q_p$ は natural map である。 $\exists$ $a \in Q_p = \overline{\{\varphi_p(p_1), \dots, \varphi_p(p_m)\}}$. $\exists$ i , $Q_p - \{2\}$ は Q_p の ICN-subalgebra であるから, $\exists$ i により $1, 2 = \varphi(p_i)$ と $\exists$. $\exists$ $Q_p - \{2\} \subseteq \overline{\{\varphi_p(p_1), \dots, \varphi_p(p_{i-1}), \varphi_p(p_{i+1}), \dots, \varphi_p(p_m)\}}$. $Q_p - \{2\} \cong R_p$ であるから証明は終る。

また, K の構造を決定する T に対して, $p \in K$ に対して,
 $Q_p = \langle Q_p; \varphi_p(p_1), \dots, \varphi_p(p_m) \rangle$ なる組を考へる。また
 S は任意の irreducible ICN-alg. とし, $\{s_1, \dots, s_m\} \subset S$ が $\overline{\{s_1, \dots, s_m\}}$
 $= S$ を満たすとして, $\mathcal{S} = \langle S; s_1, \dots, s_m \rangle$ なる組合体の
class $\mathcal{S}$ を考へ, $\mathcal{S}$ 上の pseudo-order $\leq^*$ を $f \leq^* g$ として定め
る。

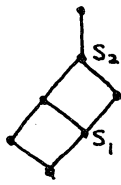
$$\mathcal{S} = \langle S; s_1, \dots, s_m \rangle \leq^* \mathcal{T} = \langle T; t_1, \dots, t_m \rangle$$

$\Leftrightarrow f(t_i) = s_i$ なる homomorphism $f: T \rightarrow S$ が存在する。

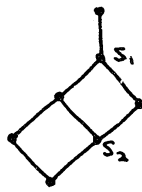
$p, q \in K$ とすれば, 明らかに, $p \leq q \Leftrightarrow (p) \supset (q)$ である。
 $\text{Ker } \varphi_p = (p)$ 等に注意すれば, 更に, $p \leq q \Leftrightarrow$

$Q_p \leq^* Q_q$ であることがわかる。 $\leq^*$ によ, $\mathcal{S}$ induce する
equivalence relation $\equiv$ とすれば, $\mathcal{S}/\equiv$ は ordered structure
となり, P が free であるから, 各同値類の代表元として Q_p
の形としたものが unique にとれることがでる。故に $\mathcal{S}/\equiv$
 $\cong K$ となる。また, Th. 10 の証明から, $Q_p/\{1, 2\}$ は $\lambda(m-1)$
a homomorphic image となることもわかる。故に $\lambda(m-1)$ が
知られてゐれば, Q_p の形はすべて決定できる。

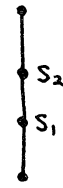
以上の議論を $\lambda(2)$ について適用すれば, $\mathcal{S}/\equiv$ の代表元
は次の 15 組であり, 明らかに, 各組の下には K の元
の名前が書かれてあり, $p \in K$ に対して, $\varphi_p(p_1) = s_1, \varphi_p(p_2)$
 $= s_2$ となる。



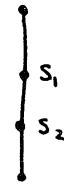
S



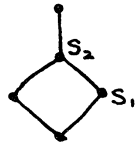
s



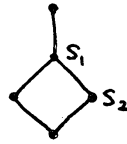
Q



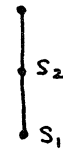
q



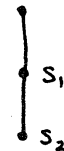
R



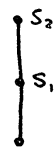
r



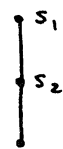
P



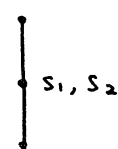
p



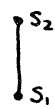
C



c



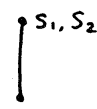
e



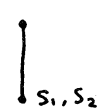
D



d

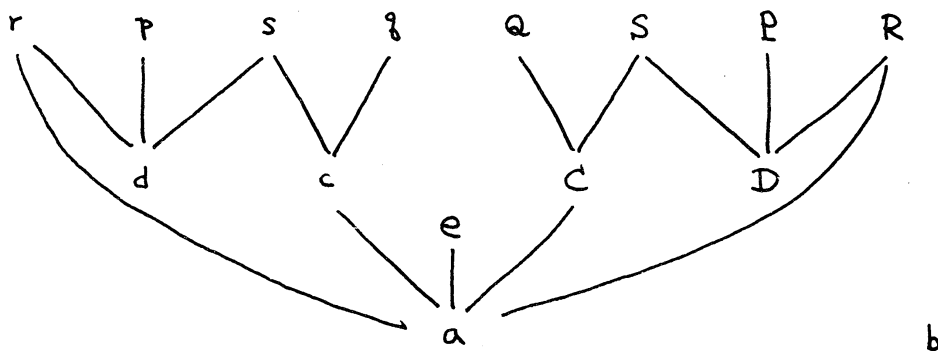


a



b

$\exists T: K$ of order 18: $\exists \alpha \neq \beta \in T$.



$\lambda(2)$ a generator $\in p_1, p_2$ とすれば, $\lambda(2) = \{p_1, p_2\}$ とおける

$$p_1 = c \vee d \vee a$$

$$p_2 = C \vee D \vee a$$

と置く。 $\lambda(2) = \{p_1, p_2\}^{ICN}$ とおけるが, $\lambda(2) = \left(\overline{\{p_1, p_2, 0\}^I}\right)^C$ とも $\overline{\{p_1, p_2, 0\}^I} \cong \lambda_{IN}(2)$ とおけることが容易に分かる。計算機では, まず $\overline{\{p_1, p_2, 0\}^I}$ を計算し, 次に conjunction に ついての closure を計算した。

$\lambda_{IN}(2)$ は 518 個, $\lambda_{ICN}(2)$ は 2134 個あることが分った。

$\lambda_{IN}(2)$ の元で, LK の定理となるものは 126 個であった。

次頁に, $\lambda_{IN}(2)$ の元の最初の 20 個と最後の 18 個を示す。

References

- [1] G. Birkhoff: Lattice theory, A.M.S. Colloq. Publ., vol. 25, 1948
- [2] A. Diego: Sur les algèbres de Hilbert, Collection de Logique Mathématique, Série A, no. 21, Paris, 1966
- [3] A. Horn: The separation theorem of intuitionistic propositional logics, J.S.L., 27 (1962), 391-399
- [4] Y. Komori: Logics and their models (Japanese), Master thesis, Univ. Tokyo, 1972
- [5] G. G. McKay: The decidability of certain intermediate propositional logics, J.S.L., 33 (1968), 258-264
- [6] I. Nishimura: On formulas of one variable in intuitionistic propositional calculus, J.S.L., 25 (1960), 327-331
- [7] K. Shimada: Master thesis, Tsuda College, 1973

$$\begin{array}{l} P \supset P \\ \sim(P \supset P) \\ P \\ Q \\ \sim P \\ \sim Q \\ Q \supset P \\ \text{PBQ} \\ \sim P \\ \sim P \supset Q \end{array}$$
$$\begin{array}{l} Q \supset \sim P \\ \sim \sim Q \\ \sim Q \supset P \\ \sim Q \supset \sim P \\ \sim P \supset \sim Q \\ \sim (Q \supset P) \\ (Q \supset P) \supset P \\ (Q \supset P) \supset Q \\ \sim (P \supset Q) \\ (P \supset Q) \supset P \end{array}$$
$$\begin{aligned}
&(((\sim Q)Q)P) \supset ((\sim Q)P) \supset ((\sim P) \supset (\sim Q)P) \supset ((\sim P) \supset Q) \supset P \\
&(((\sim Q)Q)P) \supset ((\sim Q)P) \supset ((\sim P) \supset ((P)Q) \supset P) \supset P \\
&(((\sim Q)Q)P) \supset ((\sim Q)P) \supset ((\sim P) \supset ((P)Q) \supset P) \supset ((Q)P) \supset P \\
&(((\sim Q)Q)P) \supset ((\sim Q)P) \supset ((\sim P) \supset ((P)Q) \supset P) \supset ((\sim P)Q) \supset P \\
&(((\sim Q)Q)P) \supset ((\sim Q)P) \supset ((\sim P) \supset ((P)Q) \supset P) \supset ((\sim Q)P) \supset P \\
&(((\sim Q)Q)P) \supset ((\sim Q)P) \supset ((Q) \supset P) \supset ((P)Q) \supset Q \supset P \\
&(((\sim Q)Q)P) \supset ((\sim Q)P) \supset ((\sim P) \supset ((P)Q) \supset Q) \supset P \\
&(((\sim Q)Q)P) \supset ((\sim Q)P) \supset ((\sim P) \supset ((P)Q) \supset Q) \supset ((\sim P) \supset Q) \supset P \\
&(((\sim Q)Q)P) \supset ((\sim Q)P) \supset ((\sim P) \supset (\sim Q)P) \supset ((\sim P) \supset (Q)P) \supset P \\
&(((\sim P)P) \supset ((\sim P)Q) \supset Q) \supset ((\sim P)Q) \supset ((\sim Q)Q) \supset ((\sim Q) \supset (P)Q) \supset Q
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
&(((\sim P \supset P) \supset ((\sim P \supset Q) \supset Q)) \supset ((\sim P \supset Q) \supset (\sim Q \supset Q))) \supset ((\sim P \supset ((Q \supset P) \supset P)) \supset Q) \\
&(((\sim P \supset P) \supset ((\sim P \supset Q) \supset Q)) \supset ((\sim P \supset Q) \supset (\sim Q \supset Q))) \supset ((\sim P \supset ((Q \supset P) \supset P)) \supset ((P \supset Q) \supset Q)) \\
&(((\sim P \supset P) \supset ((\sim P \supset Q) \supset Q)) \supset ((\sim P \supset Q) \supset (\sim Q \supset Q))) \supset ((\sim P \supset ((Q \supset P) \supset P)) \supset ((\sim Q \supset \sim P) \supset Q)) \\
&(((\sim P \supset P) \supset ((\sim P \supset Q) \supset Q)) \supset ((\sim P \supset Q) \supset (\sim Q \supset Q))) \supset ((\sim Q \supset ((Q \supset P) \supset Q)) \supset Q) \\
&(((\sim Q \supset Q) \supset ((\sim Q \supset P) \supset P)) \supset ((\sim Q \supset P) \supset (\sim P \supset P))) \supset ((\sim P \supset ((P \supset Q) \supset P)) \supset P) \\
&(((\sim Q \supset Q) \supset ((\sim Q \supset P) \supset P)) \supset ((\sim Q \supset P) \supset (\sim P \supset P))) \supset ((\sim P \supset ((P \supset Q) \supset P)) \supset ((Q \supset P) \supset P)) \\
&(((\sim Q \supset Q) \supset ((\sim Q \supset P) \supset P)) \supset ((\sim Q \supset P) \supset (\sim P \supset P))) \supset ((\sim P \supset ((P \supset Q) \supset Q)) \supset P) \\
&(((\sim Q \supset Q) \supset ((\sim Q \supset P) \supset P)) \supset ((\sim Q \supset P) \supset (\sim P \supset P))) \supset ((\sim P \supset ((P \supset Q) \supset Q)) \supset ((\sim P \supset \sim Q) \supset P))
\end{aligned}$$