

ファクターの内部自己同型写像の接合積への拡張

大阪教育大 長田 まりゑ

A は von Neumann algebra, G は discrete countable group, α は G から A の automorphism group への表現とし, A の G による α に関する接合積 $R(G, A, \alpha)$ を M で表わすことにする。
 A の automorphism の拡張と成る M の automorphism 全体の成る群を $\text{Aut}(M, A)$ とし, A の automorphism の拡張と成る M の inner automorphism 全体の成る群を $\text{Int}(M, A)$ で表わす。
 $\text{Aut}(M, A)$ の研究は, 主として, Singer による, group measure space construction による finite factor M に対してなされた ([13])。 G は A の freely acting automorphism の成る群としたとき, $\text{Int}(M, A)$ の要素の構造に関する, いくつかの結果は [2], [3], [9], [11] で得られ, [1] に於て, $\text{Aut}(M, A)$ の Singer の結果の拡張がこころみられている。又 $\text{Aut}(M, A)$ の要素と G の 2-cycle との関係が, von Neumann algebra の群による接合積の一般化を考へることにより, [7], [12], [4]

[15] 等を得られている。

ここでは、 $\mathcal{A}$ は $\mathcal{M}$ の $\mathcal{A}$ と仮定し、 $\text{Int}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ 及び $\mathcal{A}$ 上では inner automorphism であるような $\mathcal{M}$ の automorphism 全体のなす群を、群 G との関連のもとで、決定付ける問題について記す。

尚、ここでは話を統一する為に、扱う群 G は discrete countable group とするが註で述べるように、結果のあるものは G が locally compact group のときも成立する ([6])。又、接合積 $R(G, \mathcal{A}, \alpha)$ と共に、接合積 $R(G, \mathcal{A}, \alpha, \psi)$ (一般化された接合積で定義は下記) も取り扱う。

$\text{Int}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ について

$\mathcal{A}$ を separable Hilbert space $\mathcal{H}$ の von Neumann algebra とし、 $\text{Aut}(\mathcal{A})$, $\text{Int}(\mathcal{A})$, $\text{Out}(\mathcal{A})$ によって、それぞれ $\mathcal{A}$ の automorphism, inner automorphism, outer automorphism 全体のなす群を示す。

G は discrete countable group, α は G から $\text{Aut}(\mathcal{A})$ への写像で、次の条件 (1) を充たすものとする；

$$(1) \quad \alpha_g \alpha_h^{-1} \alpha_g \alpha_h \in \text{Int}(\mathcal{A}), \quad g, h \in G.$$

この (1) の inner automorphism を $i(g, h)$ で記す。 G の単位元 1 に対して、 α_1 は identity automorphism ではないときには、

$\alpha_g \alpha_h^{-1} \in \alpha_g$ とおくことにより、 α_1 は identity automorphism であるとしておくこともできる。 $\mathcal{A}$ の $\mathbb{C}$ 線形包 $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ の族 $\{\psi(g, h); g, h \in G\}$ が、次の二つの関係式を満たすとき、 (G, α) に関する factor set とよぶ；

$$\begin{cases} (2) & \psi(g, h)(x) = \text{Ad } \psi(g, h)(x) = \psi(g, h)x\psi(g, h)^*, \quad x \in \mathcal{A} \\ (3) & \psi(g, hk)\psi(h, k) = \psi(gh, k)\alpha_k^{-1}(\psi(g, h)), \quad g, h, k \in G. \end{cases}$$

$\mathcal{A}$ の各元 x と、 G の各元 g に対し、

$$\begin{cases} (4) & (\pi_\alpha(x)\xi)(g) = \alpha_g^{-1}(x)\xi(g), \quad \xi \in L^2(\text{bg}, G), \quad g \in G \\ (5) & (\rho_g \xi)(h) = \psi(g, g^{-1}h)\xi(g^{-1}h), \quad \xi \in L^2(\text{bg}, G), \quad h \in G \end{cases}$$

とおくと、 π_α は $\mathcal{A}$ の $L^2(\text{bg}, G)$ 上への normal representation となり、 ρ_g は各 g に対し、 $\mathbb{C}$ 線形包 $\mathcal{A}$ となる。又、次の二式

$$\begin{cases} (6) & \rho_g \rho_h = \rho_{gh}(\pi_\alpha(\psi(g, h))), \quad (g, h \in G) \\ (7) & \pi_\alpha(\alpha_g(x)) = \rho_g \pi_\alpha(x) \rho_g^*, \quad (x \in \mathcal{A}, g \in G) \end{cases}$$

が満たされる。 $L^2(\text{bg}, G)$ 上の $\pi_\alpha(\mathcal{A})$ と ρ_G によって生成された von Neumann algebra を $R(G, \mathcal{A}, \alpha, \psi)$ で示す。もし、 α が、表現で、 G の全ての元 g, h に対し、 $\psi(g, h) = \text{恒等作用素}$ となるときは、 $R(G, \mathcal{A}, \alpha, \psi)$ は、通常の接合積 $R(G, \mathcal{A}, \alpha)$ に他ならない。

$R(G, \mathcal{A}, \alpha, \psi)$ を $\mathcal{M}$ で表わし、

$$\text{Aut}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) = \{\beta \in \text{Aut}(\mathcal{M}) ; \beta(\pi_\alpha(\mathcal{A})) = \pi_\alpha(\mathcal{A})\}$$

$$\text{Int}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) = \{\beta \in \text{Int}(\mathcal{M}) ; \beta(\pi_\alpha(\mathcal{A})) = \pi_\alpha(\mathcal{A})\}$$

とおく。

以下, $\pi_*(\psi(g, h))$ を改めて, 同じ記号 $\psi(g, h)$ で記す. 又 A の inner automorphism 及び $\alpha_g (g \in G)$ は, そのまゝ自然な形で, M の automorphism に拡張することができるので, 同じ記号 $\text{Int}(A)$, 及び $\alpha_g (g \in G)$ でもって, 拡張された M の automorphism の群 及び automorphism を表わすことにする;

$$\text{Int}(A) = \{ \text{Ad } u \in \text{Aut}(M); u \in u(\pi_*(A)) \}$$

$$\alpha_g = \text{Ad } P_g|_M \quad g \in G,$$

ただし, $u(A)$ は von Neumann algebra A の $\mathcal{U}$ 分の群.

$\text{Int}(A)$ 及び α_g は共に $\text{Int}(M, A)$ の部分集合であるが, それらによつて $\text{Int}(M, A)$ は完全に決定付けられることができる.

仮定 (*) $\left\{ \begin{array}{l} A \text{ は factor, } G \text{ は discrete countable group,} \\ \alpha \text{ は (1) を充つ } G \text{ から } \text{Aut}(A) \text{ への写像;} \end{array} \right.$

仮定 (**) $\left\{ \begin{array}{l} (*) \text{ と同じ, } A, G, \alpha \text{ に対して, 単位元を除く全ての} \\ g \in G \text{ に対して } \alpha_g \in \text{Out}(A). \end{array} \right.$

$$u(M, A) = \{ u \in u(M); u \pi_*(A) u^* = \pi_*(A) \}$$

とおく.

定理 1. (*) のもとで, $u(M, A)$ の各要素 u は,

$$(8) \quad u = w w' f_g, \quad w \in u(\pi_*(A)), w' \in u(\pi_*(A)' \cap M), \\ g \in G$$

とかけらる. (**) のもとでは,

$$(9) \quad u = w f_g, \quad w \in u(\pi_*(A)), g \in G$$

と唯一通りにかける。

(証明) [5, Lemma 1] によると, $u(M, A)$ の元 u の Fourier 展開を $u = \sum_{g \in G} u(g) \rho_g$ ($u(g) \in \pi_\alpha(A)$) とする。 u は

$u \pi_\alpha(A) u^* = \pi_\alpha(A)$ を充すから, 全ての $a \in \pi_\alpha(A)$ に対して,

$$\sum_{g \in G} u(g) \rho_g(a) \rho_g = \sum_{g \in G} u a u^* u(g) \rho_g$$

を充す。従って $u(g) \rho_g(a) = u a u^* u(g)$ が全ての $a \in \pi_\alpha(A)$ と

$g \in G$ に対して成立つ。 $\rho_g^{-1} \text{Ad} u$ が $\pi_\alpha(A)$ の outer automorphism

であれば, $u(g) = 0$ とならなければならぬ。後述より u は

ユニタリであるから, $\rho_g^{-1} \text{Ad} u$ が $\pi_\alpha(A)$ 上で inner とする $g \in G$

が存在する。 $w \in \rho_g^{-1} \text{Ad} u = \text{Ad} w$ とする $\pi_\alpha(A)$ のユニタリと

し $w' = \rho_g^* u w^*$ とおくと, (8) の関係が得られる。特に,

$\rho_g \in \text{Out}(A)$ ($g \neq 1$) ならば, [5, Corollary 3] により,

$\pi_\alpha(A)' \cap M$ は scalar 全体と同型であるから, (8) より,

$u = w \rho_g$ ($w \in u(\pi_\alpha(A))$, $g \in G$) とかける。もし,

$$(10) \quad w_1 \rho_g = w_2 \rho_h, \quad w_1, w_2 \in u(\pi_\alpha(A)), \quad g, h \in G$$

ならば,

$$(11) \quad w_2^* w_1 = \rho_h \rho_g^* = \rho_{hg^{-1}} \psi(h, g^{-1}) \psi(g, g^{-1})$$

が成立つ。他方 [4, Theorem 6] により, M から $\pi_\alpha(A)$ の $\mathcal{E}$ への

faithful normal expectation e で $e(\rho_g) = 0$ の単位元を

除く G の全ての元 g に対して充すものが存在する。従って, もし

(10) が $g \neq h$ なる $g, h \in G$ に対して成立つならば, (11)

により $w_2^* w_1 = 0$ となり矛盾。従って、(9) の分解は、唯一通りである。

系 2 (*) のもとで、 M の inner automorphism に拡張できる A の automorphism β は次の形のものに限る。

$$(12) \quad \beta = i_p \cdot \alpha_g \quad i_p \in \text{Int}(A), \quad g \in G.$$

集合 $u(\pi_\alpha(A)) \times G$ に対して、次の関係 (13) で積を定義すると、この集合は一つの群になる。

$$(13) \quad (w_1, g)(w_2, h) = (w_1 \alpha_g(w_2) \alpha_{gh}(v(g, h)), gh).$$

この群を $u(\pi_\alpha(A))$ の G による extension group とし、 $E(G, u(\pi_\alpha(A)), \alpha, v)$ で表わす。

系 3 (**) のもとで、 $u(M, A)$ は $E(G, u(\pi_\alpha(A)), \alpha, v)$ と同型である。又 M が通常の接合積 $R(G, A, \alpha)$ ならば、 $u(M, A)$ は $u(A)$ と G の semi-direct product と同型である。

(証) 定理 1 により、 $u(M, A)$ の元 u は $u = w f_g$, $g \in G$, $w \in u(\pi_\alpha(A))$ と唯一通りにかけらる。 $E(G, u(\pi_\alpha(A)), \alpha, v)$ から $u(M, A)$ への写像 σ を $\sigma(w, g) = w f_g$, ($w \in u(\pi_\alpha(A))$, $g \in G$) で定義すると、 σ は $E(G, u(\pi_\alpha(A)), \alpha, v)$ から $u(M, A)$ への同型写像となる。

同様にして、集合 $\text{Int}(A) \times G$ に対して次の関係式 (14) の積を定義すると、この集合は群になる；

$$(14) \quad (\text{Ad} u, g)(\text{Ad} w, h) = (\text{Ad}(u \alpha_g(w) \alpha_{gh}(\nu(g, h))), gh).$$

この群を $E(G, \text{Int}(A), \alpha, \nu)$ と書き、 $\text{Int}(A)$ の G による積

(14) のもとでの extension group と呼ぶ。

系 4 $(**)$ のもとで、 $\text{Int}(M, A)$ は $E(G, \text{Int}(A), \alpha, \nu)$ と同型であり、 $M = R(G, A, \alpha)$ ならば、 $\text{Int}(M, A)$ は $\text{Int}(A)$ と G との semi-direct product である。

(証明) 定理 1 により、 $\text{Int}(M, A)$ の元 β は $\text{Ad} u \cdot \alpha_g$ とかけ、その分解の仕方は唯一通りである。 $\sigma \in E(G, \text{Int}(A), \alpha, \nu)$ から $\text{Int}(M, A)$ への写像で $\sigma(\text{Ad} u, g) = \text{Ad}(u f_g)$, ($u \in u(\pi_\alpha(A))$, $g \in G$) なるものがあると、 σ は $E(G, \text{Int}(A), \alpha, \nu)$ から $\text{Int}(M, A)$ への同型写像となる。

A の inner automorphism group の拡張全体について

ここでは A の inner automorphism の M への拡張全体のなす群の構造について記す。

$$K = \{ \beta \in \text{Aut}(M, A) ; \beta|_{\pi_\alpha(A)} \text{ is inner on } \pi_\alpha(A) \}$$

とおく。 K は $\text{Int}(M, A)$ と共に、 $\text{Aut}(M, A)$ の normal subgroup であるが、この群 K を G との関連のもとで決定付ける。

$\chi(G)$ を G の character 全体の可換群とする。

補題 5 $(**)$ のもとで K の元 β に対し $(\tau, \text{次の (15) を満たす}$
 $\chi \in \chi(G)$ と $u \in u(\pi_\alpha(A))$ が存在する；

$$(15) \quad \beta(f_g) = \chi(g) u f_g u^*, \quad g \in G.$$

(証明) $\beta \in K$ より $\beta(a) = u a u^*$ と全ての $a \in \pi_\alpha(A)$ に対し τ を満たす $u \in u(\pi_\alpha(A))$ が存在する。各 $g \in G$ に対し τ ,

$$\begin{aligned} \beta(f_g) u a u^* \beta(f_g)^* &= \beta(f_g a f_g^*) \\ &= u f_g a f_g^* u \end{aligned}$$

が成立つから、 $f_g^* u^* \beta(f_g) u \in \pi_\alpha(A)' \cap \mathcal{U}$ が成立する。既定の $\lambda_g \in \text{Out}(A)$ ($g \neq 1$) より、 $\pi_\alpha(A)' \cap \mathcal{U}$ はスカラー全体と同型である。 $\chi(g) I = f_g^* u^* \beta(f_g) u$ とおくと関係式 (15) が成立する。 G の元 g, h に対し τ ,

$$\begin{aligned} \chi(gh) I &= f_{gh}^* u^* \beta(f_{gh}) u = f_{gh}^* u^* \beta(f_g f_h \psi(g, h)^*) u \\ &= \chi(g) \chi(h) I, \end{aligned}$$

より $\chi \in \chi(G)$ を得る //

$\chi(G)$ の元 χ に対し τ ,

$$(u_\chi \xi)(g) = \overline{\chi(g)} \xi(g), \quad g \in G, \quad \xi \in \ell^2(\lambda_g, G)$$

とおく。

$$(16) \quad u_\chi a u_\chi^* = a, \quad a \in \pi_\alpha(A)$$

$$(17) \quad u_\chi f_g u_\chi^* = \overline{\chi(g)} f_g, \quad g \in G$$

を充すから $\delta_x \equiv \text{Ad } u_x|_{\mathcal{M}}$ とすると, $\delta_x \in \text{Aut}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ となる.

定理 6 $(**)$ のもとで, 群 K は $\text{Int}(\mathcal{A})$ と $\chi(G)$ の direct product と同型である.

(証明) K の元 β に対して (15) を充す $u \in \mathcal{U}(\pi_x(\mathcal{A}))$ と $\chi \in \chi(G)$ と取る. この χ に対して δ_x と考えたと.

$$\beta \cdot \delta_x(a) = \beta(a) = \text{Ad } u(a) \quad a \in \pi_x(\mathcal{A})$$

$$\beta \cdot \delta_x(f_g) = \overline{\chi(g)} \beta(f_g) = \text{Ad } u(f_g) \quad g \in G$$

が成立つ. $\mathcal{M}$ は $\pi_x(\mathcal{A})$ と f_g によって生成されているから.

$\beta = \text{Ad } u \cdot \delta_x^{-1}$ と分解できる. $\text{Int}(\mathcal{A})$ と $\chi(G)$ の direct product

から K への写像 σ を $\sigma(\text{Ad } u, \chi) = \text{Ad } u \cdot \delta_x$ と定義すると.

この σ は同型写像になる. 実際, もし $\text{Ad } u \cdot \delta_x = \text{Ad } w \cdot \delta_{x'}$

$(u, w \in \mathcal{U}(\pi_x(\mathcal{A})), \chi, \chi' \in \chi(G))$ が成立つならば,

$\text{Ad } w^* u = \delta_{x'} \chi^{-1}$ が成立つ. 従って, $\text{Ad } w^* u|_{\pi_x(\mathcal{A})}$ は identity

automorphism となり, w と u はスカラーしか異ならないから

$\text{Ad } u|_{\mathcal{M}} = \text{Ad } w|_{\mathcal{M}}$ となる. 故に $\delta_x = \delta_{x'}$ となり (17) より

$\chi = \chi'$ を得る.

系 7 $(**)$ のもとで,

$$K_0 = \{ \beta \in \text{Aut}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) ; \beta|_{\pi_x(\mathcal{A})} \text{ は identity automorphism} \}$$

とおくと, K_0 は $\chi(G)$ と同型である.

群 G に対し交換子群 $[G, G]$ ($\{ghg^{-1}h^{-1}; g, h \in G\}$ の生成する群) が G と一致するとき, G は完全群であるという.

系 8 $(**)$ のもとで, 次の (18), (19), (20) は同値である.

$$(18) \quad K = \text{Int}(A)$$

$$(19) \quad K_0 = \{1\}$$

$$(20) \quad G \text{ は完全群である.}$$

(証明) 定理 6 より (18), (19) 及び $\chi(G) = \{1\}$ は同値である. $\mathbb{T}$ を複素平面の単位円周とすると, $\chi(G)$ は G から $\mathbb{T}$ への homomorphism 全体をなす群 $\text{Hom}(G, \mathbb{T})$ である. $\mathbb{T}$ は可換群だから, $[G, G]$ は $\text{Hom}(G, \mathbb{T})$ の各元の kernel に含まれる. 従って, $\chi(G)$ と $\text{Hom}(G/[G, G], \mathbb{T})$ は同型な群である. 故に, $\text{Hom}(G/[G, G], \mathbb{T}) = \{1\}$ と $\chi(G) = \{1\}$ は同値で, それは, $G/[G, G]$ が trivial なる事と同値である //

(註) $(*)$ のもとで, $\alpha_g \in \text{Out}(A)$ ($g \neq 1$) なる事と, $\pi_2(A)' \cap M$ がスカラー全体と同型である事とは同値である. K に関する結果は, G が locally compact group のとき, α が $\pi_2(A)' \cap M$ がスカラー全体となるような continuous action であれば, その逆も成立する. 又最近, A を von Neumann algebra, α を G から $\text{Aut}(A)$ への α_g が freely acting on A ($g \neq 1$) となるような写像

のとき、上の群 K に対する定理もは拡張されることになって
 来た ([17])。

References

- [1] H. Behncke, Automorphisms of crossed product, Tohoku Math. J., 21(1969), 580-600.
- [2] H. Choda and M. Choda, On extensions of automorphisms of abelian von Neumann algebras, Proc. Japan Acad., 43(1967) 295-299.
- [3] H. Choda, On freely acting automorphisms of operator algebras, Kodai Math. Sem. report, 26(1974), 1-21.
- [4] M. Choda, Some relations of II_1 -factors on free groups, to appear in Math. Japonicae.
- [5] _____, A characterization of crossed products of factors by discrete outer automorphism groups, Preprint.
- [6] _____, Extensions of the inner automorphism group of a factor. preprint.
- [7] J. Feldman and C.C. Moore, Ergodic equivalence relations, cohomology and von Neumann algebras, II, Preprint.
- [8] E. Hewitt and K.A. Ross, Abstract harmonic analysis, I. Springer-Verlag.
- [9] Y. Haga and Z. Takeda, Correspondence between subgroups and subalgebras in a cross product von Neumann algebra, Tohoku Math. J., 19(1967), 315-323.
- [10] R.R. Kallman, A generalization of free action, Duke Math. J., 36(1969), 781-789.
- [11] M. Nakamura and Z. Takeda, On inner automorphisms of

- certain finite factors, Proc. Japan Acad., 37(1961), 31-32.
- [12] _____, On extensions of finite factors, I, Proc. Japan Acad., 34(1959), 149-154.
- [13] I.M. Singer, Automorphisms of finite factors, Amer. J. Math., 17(1955), 117-183.
- [14] C. E. Sutherland, Cohomology and extensions of von Neumann algebras, I, II, Preprints
- [15] M. Takesaki, Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III, Acta Math., 131(1974), 249-310.
- [16] G. Zeller-Meier, Produits croises d'une C*-algebra par un groupe d'automorphismes, J. Math. pures et Appl., 47 (1968), 101-239.
- [17] Y. Watatani, An extension of the inner automorphism group of a von Neumann algebra, 準備中.