

氏 名	にし かわ ゆき ひろ 西 川 享 宏
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	論 理 博 第 1493 号
学位授与の日付	平 成 19 年 9 月 25 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 2 項 該 当
学 位 論 文 題 目	Towards the exact WKB analysis of the P_{II} hierarchy (P_{II} hierarchy の完全 WKB 解析)

論文調査委員	(主 査) 准教授 竹 井 義 次	教 授 岡 本 久	教 授 向 井 茂
--------	----------------------	-----------	-----------

論 文 内 容 の 要 旨

1990年代に河合、竹井、青木等により展開された Painlevé 方程式に対する完全 WKB 解析は、Painlevé 特殊函数の接続問題に対する新たなアプローチを与えた。この Painlevé 方程式に対する完全 WKB 解析を高階 Painlevé 方程式に拡張するべく、本論文において西川享宏氏は、Gordoa-Joshi-Pickering が導出した II 型 Painlevé 方程式の高階版である P_{II} hierarchy の完全 WKB 解析の建設に取り組んだ。そして、以下に述べるように、 P_{II} hierarchy に属する全ての高階 Painlevé 方程式に対してその Stokes 図形の（付随する Lax pair の Stokes 図形による）特徴付けを与えることに成功すると同時に、“新しい Stokes 曲線” の存在という興味深い現象を高階 Painlevé 方程式に対して初めて見出した。

古典的な 2 階の Painlevé 方程式の完全 WKB 解析においては、Painlevé 方程式の Stokes 図形とモノドロミー保存変形を通じてそれに付随する線型方程式系（“Lax pair” と呼ばれる）の Stokes 図形の間関係、すなわち (i) Painlevé 方程式の変わり点では Lax pair の異なる 2 つの変わり点が重なり、更に (ii) Painlevé 方程式の Stokes 曲線上ではそれら 2 つの Lax pair の変わり点が（Lax pair の）Stokes 曲線で結ばれる、という幾何学的関係が理論の基礎を成している。西川氏は、まず Gordoa-Joshi-Pickering が導出した P_{II} hierarchy とその Lax pair に然るべく（Planck 定数の逆数に相当する）漸近パラメータを導入した後、この II 型高階 Painlevé 方程式の族に対しても、上述のような 2 つの Stokes 図形の間幾何学的関係が成立することを証明した。そこでは、古典的な Painlevé 方程式の変わり点の直接的な一般化に相当するいわゆる第 1 種変わり点のみならず、高階 Painlevé 方程式を論じる際にはじめて現われる第 2 種変わり点も論じられている。

更に特筆すべきは、こうした通常の変わり点と Stokes 曲線の性質のみならず、“新しい Stokes 曲線” の存在という高階方程式特有の現象が、高階 Painlevé 方程式に対しても本論文で初めて見出されたことである。Berk-Nevins-Roberts により論じられたように、高階線型常微分方程式の場合、2 階の場合には見られなかった Stokes 曲線の交叉という現象が起こり、そうした Stokes 曲線の交点から“新しい Stokes 曲線” がのびていく。西川氏は、4 階の II 型 Painlevé 方程式の Stokes 曲線の大域的構造を零パラメータ解のリーマン面上で記述し、確かに Stokes 曲線の交叉が起きていることを確認した後、そうした Stokes 曲線の交点の近傍において付随する Lax pair の Stokes 図形を追跡することにより、問題の交点から“新しい Stokes 曲線” がのびていくことを（数値解析を援用しながら）発見した。より正確には、通常の Stokes 曲線のみならず問題の交点を始点とするある別の曲線上でも、付随する Lax pair の 2 つの変わり点が（Lax pair の）Stokes 曲線で結ばれているという現象を見出した。上で述べた 2 つの Stokes 図形の間関係を考慮すれば、この曲線を“新しい Stokes 曲線” と考えることは自然であり、現在ではこうした現象は専門家の間で「西川現象」と呼ばれている。線型方程式の場合と同様に、今後高階 Painlevé 方程式の解の接続問題を議論する際に鍵となるであろう重要な発見である。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

古典的な 2 階の Painlevé 方程式に対する接続問題については、数理論理との関連もあって、いろいろな人達によって

様々な方法で多くの結果が得られてきた。しかし、高階 Painlevé 方程式の接続問題に対する研究は未だに殆んど進んでいないのが実情である。漸近解析的な構造が複雑になる等いくつかの理由が考えられるが、実際には論すべき方程式の数が多すぎて、6 種類しかなかった Painlevé 方程式の時の個別に議論するという方法が効かないというのが大きな原因になっているように思われる。その点、標準形への変換論を主な武器とする完全 WKB 解析的なアプローチは、高階 Painlevé 方程式の接続問題にも非常に効果的な方法であると考えられる。西川享宏氏による本論文は、Gordoa-Joshi-Pickering が導出した II 型高階 Painlevé 方程式の hierarchy に対してこの期待を実現しようとするものであり、接続公式の導出までには至らなかったものの、特に次の諸点において epochmaking な論文となった。

まず、古典的な Painlevé 方程式の場合と同様に、高階 Painlevé 方程式の Stokes 図形と付随する Lax pair の Stokes 図形の間にこの理論において基本的な幾何学的関係が成立することを、無限個の方程式について数学的に厳密に確かめることに成功した。(更に、参考論文 [1], [6] では同種の関係が IV 型高階 Painlevé 方程式の hierarchy に対しても成立することを証明した。) 無限個の方程式に対してこうした関係を示すには単に機械的な計算だけでは不十分であり、ある種の構造を見極めて実際に証明を完成した点は十分評価に値しよう。

次に、4 階の II 型 Painlevé 方程式の Stokes 曲線の大域的構造を、計算機を用いて零パラメータ解のリーマン面上で完全に記述した。非線型方程式の Stokes 曲線を零パラメータ解のリーマン面上で描くことは現在でも厄介な作業であり、その完全な描写が得られている方程式の数は多くない。本論文によってそうした貴重な方程式の例が新たに付け加えられた。

しかし何よりも、高階非線型方程式に対して“新しい Stokes 曲線”の存在という現象が発見された点がとりわけ重要である。本論文において西川氏は、こうした新しい Stokes 曲線の存在を、4 階の II 型 Painlevé 方程式について数値解析を援用しながら発見した。その後、共同研究者との協力の下に、付随する Lax pair の Stokes 曲線のトポロジーという視点から新しい Stokes 曲線が現われる仕組みも明らかにされた (参考論文 [4])。これらの結果によって、少なくとも Lax pair が 2 階の線型方程式で与えられる場合は、新しい Stokes 曲線は普遍的に現われるものと期待される。高階線型方程式の接続問題を論じる際、Berk-Nevins-Roberts が見出した新しい Stokes 曲線が重要な役割を果たすことは、今やこの分野では常識になりつつある。その非線型版と考えられる西川氏の発見した新しい Stokes 曲線も、今後高階 Painlevé 方程式の解の接続問題を議論する際の鍵となることは間違いないであろう。

以上により、本論文は博士 (理学) の学位論文として価値のあるものと判断する。また、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。