

非可換 Hardy 空間における分解定理とその応用

新潟大 理 斎藤 吉助

§1. 本講演では finite maximal subdiagonal 環における分解定理を示し、その応用として、非可換 Hardy 空間の性質や不変部分空間の構造を示すのが目的である。

記号や定義などはこの講究録の“非可換 Hardy 空間の最近の結果”を参照のこと。

§2. M を faithful normal normalized trace τ をもつ von Neumann 環とする。 $1 \leq p < \infty$ に対して、 $L^p(M, \tau)$ を定義する。 Φ を M から M の中への faithful normal expectation で $\tau \circ \Phi = \tau$ をみたすものとする。 H^∞ を Φ に関する M の finite maximal subdiagonal 環とする。 $H_0^\infty = \{x \in H^\infty : \Phi(x) = 0\}$ とおき、 $H^p = [H^\infty]_p$, $H_0^p = [H_0^\infty]_p$ とし、非可換 Hardy 空間を定義する。 また $D = H^\infty \cap H_0^{\infty*}$ とする。 以下を記す。

Proposition 1 (i) $L^2(M, \tau) = H^2 \oplus H_0^{2*} = H_0^2 \oplus H^{2*}$

$$(2) \quad H^\infty = \{x \in M : \tau(xy) = 0 \quad (\forall y \in H_0^\infty)\}.$$

証明. (1). $H^\infty + H^{lo*} = H^\infty + H_0^{\infty*}$ は M で σ -弱稠密であることからわかる。

(2). まず $x \in M$ とする。 $\tau(x) = 0$ とする。

$$\tau(xy) = 0 \quad (\forall y \in H_0^\infty) \Leftrightarrow xH^2 \subset H^2$$

が示せる。 $\Sigma = \{x \in M : xH^2 \subset H^2\}$ とおくと、 Σ は M の σ -weakly closed subalgebra で $H^\infty \subseteq \Sigma \subseteq M$ であることは明らか。 $\Sigma + \Sigma^*$ は M で σ -弱稠密故、至が Σ 上乗法的であることを示せば、 Σ は至に属する subdiagonal 環になるから、 H^∞ の subdiagonal 環としての maximality から、 $\Sigma = H^\infty$ 。 従って、 $\Sigma_0 = \{x \in \Sigma : \Phi(x) = 0\}$ が Σ の 2-sided ideal であることを示せばよい。 $x \in \Sigma_0 \Leftrightarrow x \in M \mid xH^2 \subset H_0^2$ を示すことにより示される。

§ 3. この節では分解定理について示す。

1967年に Arveson [1] は $\forall K \in M \cap M'$ ならば $K = u a$, $a^{-1} \in H^\infty$ を満たす M の unitary operator u と $a \in H^\infty$ が存在することを示した。 1977年、McAsey, Muhly and Saito [7] によつて、 $K \in M$, $K^{-1} \in L^2(M, \tau)$ ならば $K = u a$ を満たす M の unitary operator u と $a \in H^\infty$ が存在することを示した。 さらに、筆者 [2] が $a^{-1} \in H^2$ であることを証明した。

定理 1. $k \in M$, $k^{-1} \in L^2(M, \tau)$ ならば, $k = u a$, $a^{-1} \in H^2$ をみたす M の unitary operator u と $a \in H^2$ が存在する。

これを示すため $x, y \in M$, $y \in L^2(M, \tau)$ に対して,

$$L_x y = xy, \quad R_x y = yx.$$

と置く。 $\mathcal{L} = \{L_x\}_{x \in M}$, $\mathcal{R} = \{R_x\}_{x \in M}$ とすると, $\mathcal{L}$ と $\mathcal{R}$ は finite von Neumann 環で $\mathcal{L}' = \mathcal{R}$, $\mathcal{R}' = \mathcal{L}$ をみたす。

定義 1. $\xi \in L^2(M, \tau)$ が right-wandering とは $\xi \perp [\xi H^2]_2$ であるときをいう。

Lemma 1. [1, Lemma 4. 2. 2]. $\xi \in L^2(M, \tau)$ が right-wandering とする。このとき $u\xi \in [D]_2$, $Lu^*u = P_{[R\xi]_2}$ をみたす M の partial isometry u がある。但し, $P_{[R\xi]_2}$ は $L^2(M, \tau)$ から $[R\xi]_2$ の上への projection とする。

定理 1 の証明. まず $k^{-1} \in L^2(M, \tau)$ より, $k \notin [kH^2]_2$. $\xi := P_{[kH^2]_2} k$ は $L^2(M, \tau)$ より $[kH^2]_2$ の上への projection とする。
 $\eta = P_{[kH^2]_2} k$ と置く。 $\xi = k - \eta$ は right-wandering であることがわかる。そして, Lemma 1 から, $u\xi \in [D]_2$, $Lu^*u = P_{[R\xi]_2}$ をみたす M の partial isometry u がある。このとき, u は M の unitary

で $ux = a$ とおくと $a \in H^0$, $a^{-1} \in H^2$ であることが, [1, Theorem 4.4.1] の証明を見直すことにより, 示される。 //

§ 4. この節では, H^p と H_0^p の基本的性質を調べる。まず

Proposition 1 から, 次の Lemma が成り立つ。

Lemma 2. $H^1 \cap L^2(M, \tau) = H^2$, $H_0^1 \cap L^2(M, \tau) = H_0^2$.

Lemma 3. $H^1 = \{x \in L^2(M, \tau) : \tau(xy) = 0 \ (\forall y \in H_0^\infty)\}$.

証明. $\subseteq$ は明らか. $\supseteq$ で, $\forall y \in H_0^\infty$ に対して $\tau(xy) = 0$ を満たす $x \in L^2(M, \tau)$ をとる。 $\tau \neq 0$ とき, $x = |x^*|v$ を x の極分解とする。但し $|x^*| = (xx^*)^{\frac{1}{2}}$ とする。 $0 \leq t \leq 1$ とし

$f(t) = 1$, $t > 1$ とし $f(t) = 1/t$ なる $[0, \infty)$ 上の連続実数 f をとる。今 $k = f(|x^*|^{\frac{1}{2}})$ とおくと, $k \in M$ で $k^{-1} \in L^2(M, \tau)$ であることが示せる。 $\tau \neq 0$. 定理 1 より, $k = ua$, $a^{-1} \in H^2$

を満たす M の unitary operator u と $a \in H^0$ が存在する。しかるに,

$|x^*|^{\frac{1}{2}} = \int_0^\infty \lambda d\epsilon_\lambda$ とすると $k|x^*|^{\frac{1}{2}} = \int_0^\infty f(\lambda) \lambda d\epsilon_\lambda \in M$ 故, $ax \in L^2(M, \tau)$ で, さらに $\forall y \in H_0^\infty$ に対して

$$(ax, y^*) = \tau(axy) = \tau(xya) = 0.$$

従って, Prop. 1 より, $ax \in H_0^2$. $\tau \neq 0$

$$x = a^{-1}ax \in H^2 H^2 \subset H^1.$$

∴ ぬから、Lemma 3 が成り立つ。

///

$\forall x \in M$ に対して、 $\Phi(x) = V|\Phi(x)|$ ($V \in D$) であり、

$$\|\Phi(x)\|_1 = \tau(|\Phi(x)|) = \tau(V^*\Phi(x)) = \tau(V^*x) \leq \|x\|_1,$$

∴ ぬから、 Φ を $L^1(M, \tau)$ から $[D]$ の上への expectation に一意に拡張できる。従って、 τ は α であり、次の Lemma が容易にわかる。

Lemma 4. $H_0^1 = \{x \in L^1(M, \tau) : \tau(xy) = 0 \ (\forall y \in H_0^0)\}$
 $= \{x \in H^1 : \Phi(x) = 0\}.$

定理 2. $1 \leq p \leq \infty$ とする。

$$(1) \ H^1 \cap L^p(M, \tau) = H^p, \ H_0^1 \cap L^p(M, \tau) = H_0^p.$$

$$(2) \ H^p = \{x \in L^p(M, \tau) : \tau(xy) = 0 \ (\forall y \in H_0^0)\}.$$

$$(3) \ H_0^p = \{x \in L^p(M, \tau) : \tau(xy) = 0 \ (\forall y \in H_0^0)\}.$$

証明(1). Prop 1 と Lemma 2 より、 $p = \infty$ 、2 のときは

すでに示した。Σ = Σ' $1 < p < 2$ 、 $\frac{1}{p} + \frac{1}{2} = \frac{1}{p'}$ とする。

∴ ぬから、 $H^p \subseteq H^1 \cap L^p(M, \tau)$ は自明、 $\forall x \in H^1 \cap L^p(M, \tau)$ とする。

$x = |x^*|V = |x^*|^{\frac{p}{2}}|x^*|^{\frac{p}{2}}V$ とおくと、Lemma 3 における連続関数

f に対して、 $k = f(|x^*|^{\frac{p}{2}})$ とおくと、 $k \in M$ 、 $k' \in L^2(M, \tau)$ 。

Σ = Σ'、定理 1 より、 $k = ua$ 、 $a' \in H^2$ をみたす M の unitary

operator u と $a \in H_0^0$ がある。∴ ぬから、

$$ax = u * R |x|^{\frac{p}{2}} |x|^{\frac{p}{2}} v \in L^p(M, \tau)$$

又,

$$ax \in H^1 \cap L^p(M, \tau) \subset H^1 \cap L^2(M, \tau) = H^2 \subset H^p$$

$\Sigma = \Sigma'$

$$x = a^{-1} ax \in H^2 ax \subset [H^2 ax]_p \subset H^p$$

従, Σ , $1 < p < 2$ のとき, $H^1 \cap L^p(M, \tau) = H^p$

同様に Σ , $1 < p < 2$ のとき, $H_0^1 \cap L^p(M, \tau) = H_0^p$ が成り立つ。

次に $2 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とする。 $H^p \subset H^1 \cap L^p(M, \tau)$ は自明。 Σ のとき, $y \perp H^p \Rightarrow \tau(yx) = 0$ ($\forall x \in H^0$)

Lemma 4 により, $y \in H_0^1 \cap L^q(M, \tau) = H_0^q$ 。 Σ のとき,

$y \perp H^1 \cap L^p(M, \tau)$ がわかる。 Σ , $H^p = H^1 \cap L^p(M, \tau)$ 。

(2) と (3) は (1) から自明。

///

§ 5. $\mathcal{M}$ を $L^2(M, \tau)$ の closed subspace とする。 $\mathcal{M}$ が left-invariant といふ。 $H^0 \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ をみたすときについて。 このとき, [7] で $\mathcal{M}$ が left-invariant ならば $\mathcal{M} \cap M \neq \{0\}$ を示した。 分解定理の 1 の応用として, $[\mathcal{M} \cap M]_p = \mathcal{M}$ を示す。

定理 3. $1 \leq p < \infty$ とする。 $\mathcal{M}$ を $L^p(M, \tau)$ の ^{任意の} left-invariant closed subspace とする。 $[\mathcal{M} \cap M]_p = \mathcal{M}$ 。

証明. (1) $2 \leq p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とする。 $[\mathcal{M} \cap M]_p \subseteq \mathcal{M}$ と

仮定する。今 Hahn-Banach の定理より, $\tau(\xi x) \neq 0$, $\tau(yx) = 0$ ($\forall y \in [\pi \cap M]_p$) をみたす $\xi \in M$, $\exists x \in L^q(M, \tau)$ が存在する。 $\xi = |\xi^*|v$ とすると, $\xi \in L^p(M, \tau) \subset L^2(M, \tau)$ より, Lemma 3 における f におこ, $k = f(|\xi^*|)$ とおこ。 $k \in M$ で $k^{-1} \in L^p(M, \tau) \subset L^2(M, \tau)$ であり, 定理 1 から, $k = ua$, $a^{-1} \in H^2$ をみたす M の unitary operator u と $a \in H^p$ がある。 $\xi = z$ 定理 2 より,

$$a^{-1} \in L^p(M, \tau) \cap H^2 = H^p, \quad a\xi (\neq 0) \in \pi \cap M.$$

π は left-invariant 故 $\forall b \in H^p$ に対し, $ba\xi \in \pi \cap M$, $\xi = z$, $\tau(ba\xi x) = 0$. 定理 2 より, $a\xi x \in H_0^q$. したがって, $\tau(\xi x) = \tau(a^{-1}a\xi x) = 0$. これは矛盾。

(2) $1 \leq p < 2$ とする。 $1/p + 1/q = 1$, $1/p + 1/2 = 1/p + q$, δ は任意。 $\xi \neq 0$ とき, $\forall y \in [\pi \cap M]_p \subseteq \pi$ ならば, $\tau(\xi x) \neq 0$ $\forall y \in [\pi \cap M]_p$ に対し, $\tau(yx) = 0$ をみたす $\xi \in \pi$, $x \in L^q(M, \tau)$ がある。 $\xi \neq 0$ とき, 定理 1 より, $a\xi \in L^p(M, \tau) \cap \pi \subset L^2(M, \tau) \cap \pi$ であり $a^{-1} \in H^2$ をみたす $a \in H^p$ がある。さらに, (1) のようにして, $ba\xi (\neq 0) \in \pi \cap M$ であり $b^{-1} \in H^\delta$ なる $b \in H^p$ がある。 $\xi = z$, $\forall c \in H^p$ に対し, $cba\xi \in \pi \cap M$. したがって, $\tau(cba\xi x) = 0$. 定理 2 から, $ba\xi x \in H_0^q$, $z(ba)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \in H^2 H^\delta \subset H^p$ であり

$$\tau(\xi x) = \tau((ba)^{-1}ba\xi x) = 0$$

これは矛盾。 よって定理が示す如く。

///

参考文献

- [1] W. B. Arveson, Analyticity in operator algebras, Amer. J. Math., 89(1967), 578-642.
- [2] W. B. Arveson, On groups of automorphisms of operator algebras, J. Funct. Anal., 15(1974), 217-243.
- [3] H. Helson, Analyticity on compact abelian groups, in "Algebras in analysis", Academic Press, New York, 1975.
- [4] S. Kawamura and J. Tomiyama, On subdiagonal algebras associated with flows in operator algebras, J. Math. Soc. Japan, 29(1977), 73-90.
- [5] R. I. Loeb1 and P. S. Muhly, Analyticity and flows in operator algebras, J. Funct. Anal., 29(1978), 214-252.
- [6] M. McAsey, Invariant subspaces of non-self-adjoint crossed products, Doctor Thesis.
- [7] M. McAsey, P. S. Muhly and K. -S. Saito, Non-self-adjoint crossed products, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.
- [8] P. S. Muhly and K. -S. Saito, Non-self-adjoint crossed products II, in preparation.
- [9] K. -S. Saito, The Hardy spaces associated with a periodic flow on a von Neumann algebra, Tohoku Math. J., 29(1977), 69-75.
- [10] K. -S. Saito, On non-commutative Hardy spaces associated with flows on finite von Neumann algebras, Tohoku Math. J., 29(1977), 585-595.
- [11] 斎藤 吉助, crossed productにおける非可換 Hardy空間について, 数理解析研究所講究録, 314, (作用素環の研究とその応用),

49-64 (1977年12月).

- [12] K. -S. Saito, A note on invariant subspaces for finite maximal subdiagonal algebras, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.
- [13] L. Zsidó, Spectral and ergodic properties of the analytic generators, J. Approximation theory, 20(1977), 77-138.