

函数論における近似の問題

京大理 西野利雄

§ 1 序

函数論とは“実際に函数を作つて、それで研究するものである”と云われる。函数論における近似の問題は、そのような中で、主に函数を作る手段として位置づけられてゐるよう
に思われる。この問題は通常次のような型を取る。即ち、

複素変数 (x) の空間のある領域 Ω と、 Ω では正則な函数のある族 $\mathcal{F}$ が与えられてゐるとき、 Ω で正則な任意の函数 $f(x)$ に対し、 Ω のコンパクト集合 E と正の数 ε を任意に与えて E で

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

となるような函数 $g(x)$ を $\mathcal{F}$ に求めること。

このようなことが出来るためには、領域 Ω と函数族 $\mathcal{F}$ の間にある関係がなければならない。この関係を具体的にみつけ出すことが函数論における近似の問題の主要な課題である。

§2 一般論

このような問題を統一的に取り扱うには、1950年に岡先生によって確立された次の補題が基本的である。

$\mathcal{D}$ を複素変数 $(x_1, \dots, x_n)$ の空間の単葉な領域とし、 $\mathcal{D}$ を $\mathcal{D}$ のコンパクト集合で

$$|x_i| \leq \gamma_i \quad (i=1, \dots, n), \quad |f_j(x)| \leq 1 \quad (j=1, \dots, \nu)$$

と定義されたものとする。ここで γ_i は適当な正の数、 $f_j(x)$ は $\mathcal{D}$ で正則な函数である。このような集合を以後解析多面体と呼ぶ。次に $n+\nu$ 個の変数 $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_\nu)$ の空間に多重円筒

$$\mathcal{P} : \quad |x_i| \leq \gamma_i \quad (i=1, \dots, n), \quad |y_j| \leq 1 \quad (j=1, \dots, \nu)$$

を考え、この中に n 次元の解析集合

$$\Sigma : \quad y_j = f_j(x) \quad (j=1, \dots, \nu), \quad (x) \in \mathcal{D}$$

を作る。このとき当然 $\mathcal{D}$ の点と Σ の点とは上の式で $j=1$ に対応し、 $\mathcal{D}$ の境界点に対応する Σ の点は $\mathcal{P}$ の境界上にある。このような状態のもとに次の補題が得られる。

$\mathcal{D}$ で正則な任意の函数 $\varphi(x)$ に対し、必ず $\mathcal{P}$ で正則な函数 $\Phi(x, y)$ を求めて

$$\Phi(x, f(x)) = \varphi(x)$$

となるように出来る。¹⁾

この補題の証明は相当大がかりであるため、ここでは示されない。なお領域が単葉であることは不可欠な条件ではないが

多葉域にすることゝ別な問題が生じるので、説明を簡単にす
るために、ここでは單葉とした。以下では單葉な領域しか考
えない。

この補題の意味することは次のようである。即ち、 P で正
則なある函数 $f(x)$ にたいして、上のあうな正則函数 $P(x, y)$ を
求めるならば、この函数は P の形より P で一様収斂する x_0 と
 y_0 の巾級数に展開出来る。それを適当な所で打ち切って、 y_0
の所を $f(x)$ を代入すれば、 $f(x)$ は P で x_0 と $f(x)$ の多項式で
一様に近似されたことになる。このことより次の主定理を得
る。

主定理. 複素変数 (x) の空間のある領域 R と、 R で正則な函
数のある族 f_i が与えられたとき、もし R の任意のコンパクト
集合 E にたいし、 f_i に属する函数によって作られる解析多面
体で、 E を含み R の完全内部に含まれるものが作られるなら
ば、 R で正則な任意の函数は、 R の任意の完全内部で x_0 と f_i
に属する函数との多項式で、いくらでも近似することが出来
る。

領域 R がこのような性質をもつとき、我々はそれを f_i に関
して凸状な領域と云う。特に f_i が多項式全体よりなるときは
 R を多項式凸状と云ひ、又 R が R では正則な有理函数全体
で作る族に関して凸状であるが、またはそのような領域の増大

列の極限になっているときは、 Ω を有理凸状と云う。なお2変数以上の空間では、正則函数の自然存在域、即ち正則域は任意でないことがわがっているので、 Ω としては普通正則域しか考えない。しかもこのとき、 Ω は Ω で正則な函数全体の作る族²⁾に関して凸状、即ち正則凸状なることがわがっているので、主定理の条件は Ω が正則域のときは、必要條件でもある。

§3 Runge の定理

函数論における近似の問題の一般論は、現在のところ、上の主定理につきる。ところでこの主定理はこのままの形で非常に有用なものなのであるが、それでもなお Ω と Ω' の関係として例えば次のような問題にすら答えてはならない。即ち

Ω を任意の正則域とすると、 Ω' としていかなる函数族にまで制限し得るか？

Ω' として多項式の全体を取るとき、 Ω にはいかなる条件をつけなければよいか？

これらの問題は1変数の分野では、よく知られた Runge の定理によって完全に解決されている。それを我々の言葉で云うならば

複素変数 z の平面上では、任意の領域が有理凸状である。又ある領域が多項式凸状であるためには、 Ω が単連結である

ことが必要且つ十分である。

ところが、2変数以上の分野では、この状態は全く一変して、任意の正則域は必ずしも有理凸状ではない。又ある領域 Ω が多項式凸状であるためには、 Ω が単連結であることは十分条件ではなく、そればかりが必要条件ですらない。以下でこのような状態の差がいかなるところから来るのかを見よう。これが実はここで取り上げようとしたものである。

§4. 1変数の場合の考察

先ず1変数の場合に、いかにして上のような結果に到達するかを、我々の立場から考察してみよう。

Ω を複素変数 z の平面上の任意の領域とし、 E を Ω の任意のコンパクト集合とする。このとき Ω 外に有限個の点 $a_1, \dots, a_p$ を取り

$$|z| \leq M, \quad \left| \frac{a_i}{z - a_i} \right| \leq 1 \quad (i=1, \dots, p)$$

なる形の解析多面体で、 E を含み Ω の完全内部に含まれるものを取ることは容易である。ここで a_i は適当な実数である。このことは、 Ω が有理凸状であることを直接示している。

また、2点 a, b を z 平面上にとり、 a を含む、 b を中心とした円 γ をえがくならば、 γ の外にある任意のコンパクト集合 E に対し、それを含む解析多面体

$$|z| \leq M, \quad \left| \frac{z}{z-\epsilon} \right| \leq 1$$

を考へることによつて、主定理より、点 a のみで極をもつ有理函数は点 b のみで極をもつ有理函数によつて、 E でいくらでも一様に近似されることがわかる。このことより、 z 平面に領域 Ω が与えられたとき、 Ω の任意のコンパクト集合 E にたいして、 Ω の各境界点より E と交はることなく無限遠点に達する曲線がえがけるならば、 Ω は多項式凸状であるといへる。このようなことが出来るためには、 Ω が單連結でありさえすればよい。なおこの条件の必要性は多項式が全平面で正則なことから来る。ここで注意すべきことは、1変数の場合は点と点の動きのみが問題になっていることである。

§5 多変数の場合

同様の考へ方を多変数の場合に適用してみよう。そのためには、1変数のとき点であつたものを、多項式の0点の集合即ち代数面におきかえればよい。先ず複素変数 $(x_1, \dots, x_n)$ の空間のある正則域 Ω が、有理凸状であるためには、 E を Ω の任意のコンパクト集合とすると、 Ω 外の各点 p にたいし、 p を通り E と交はらない代数面が少なくとも1つ存在すればよい。實際もしそうになっているならば、 Ω 外の点を通る適当な有限個の代数面を与える適当な多項式 $P_j(x) (j=1, \dots, r)$ をつか

て,

$$|x_i| \leq r_i \quad (i=1, \dots, n); \quad \left| \frac{1}{p_j(x)} \right| \leq 1 \quad (j=1, \dots, n)$$

なる形の解析多面体で Ω を内部から近似することが出来る。

なおこの条件の必要性は Ω が正則凸状なることより明らかであらう。そこで任意の正則域がこの条件を満たすかどうかの問題となる。

1941年、岡先生は次のような例を示してこのことが必ずしも成立しないことを示された。³⁾

2複素変数 x, y の空間で領域

$$r_1 < |x| < 1, \quad r_2 < |y| < 1 \quad (r_1 + r_2 > 1)$$

を考慮、ここから

$$|y - x + 1| < p \quad I(x) > 0 \quad \left(p < \frac{1-r_1}{r_2} \right)$$

なる部分をのぞきさった領域をととする。この領域はたしかに正則域である。元の $y = y_0$ による切口は $I(y_0) < 0$ ならば円環 $r_1 < |x| < 1$, 又 $I(y_0) > 0$ ならばこの円環より $|y_0 - x + 1| < p$ なる円に含まれる部分をのぞきさったものである。この円は y_0 と共に動くが、 y_0 が例えば

$$|y_0| = \frac{1+r_2}{2}, \quad |y_0 + 1| = \frac{1+r_2}{2}, \quad I(y_0) > 0$$

をみたすときは、上の円環に完全に含まれてしまう。このとき代教面の形より、上のようになぞかれた点を通って Ω と交はらないような代教面は決して存在しないことがわかる。

なおこのような領域は、例え単連結であっても存在することを Wermer が示している。⁴⁾ 即ち正則域は単連結であっても多項式凸状どころか有理凸状ですらないことがあるのである。

そこで更に有理凸状な正則域が多項式凸状になるための条件をやろう。ゆえにそのような領域とし、 E を各の任意のコンパクト集合とするとき、 E 外の各点 p にたいし、 p を通り E と交はらないような代数面の内、それを代数面であることを保ちながら、 E と交はることをなく連続的に変形して無限遠までもって行けるものが少なくとも一つあることが必要且つ十分な条件である。実際多項式 $P_1(w)$ と $P_2(w)$ の面として定義された2つの代数面 S_1 と S_2 とがあり、 S_1 は解析多面体

$$\rho : |x_i| \leq r_i \quad (i=1, \dots, n); \quad \left| \frac{1}{P_2(w)} \right| \leq 1$$

の外にあるならば、 ρ のみで極をもつ有理函数は、 S_2 のみで極をもつ有理函数で、 ρ においていくらでも一様近似される。このことより上の条件が十分であることがわかる。必要なことは前と同様である。ところで、このような条件をみたす領域は必ずしも単連結である必要はない。実際、 x, y の空間で

$$|x| < 2, \quad |y| < 2, \quad |xy - 1| < p$$

で定義される領域は、確かに多項式凸状であるが、 p が十分小さいときは単連結ではない。それでは単連結であることが

十分条件であらうか？ もしある領域 Ω が多項式凸状であつて且つ単連結であるならば、 Ω の任意のコンパクト集合 E にたいし、 E と交はらない代教面はすべて前のようにして連続的に無限遠まで変形して行ける。このことを使って次の例がある。

複素変数 x と y の空間で積領域

$$1 < |x| < M, \quad |y| < \frac{1}{2}$$

より代教面の族

$$tx^2 - (2t-1)x - y = 0 \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

に含まれる点を全部のぞいた領域を Ω とする。これはたしかに有理凸状で単連結な正則域である。 Ω の $y=y_0$ による切は、円環 $1 < |x| < M$ より

$$x = \frac{1}{2t} \left\{ (2t-1) \pm \sqrt{(2t-1)^2 - 4ty_0} \right\} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

で与えられる曲線をものぞいたもので、具体的にえがける。この切口も $y = -\frac{2}{5}$ の近傍でみることより、 Ω のコンパクト集合 E を十分大きくとるならば、 Ω 外にある代教面

$$x=0$$

と E と交はることなく連続的に無限遠点へ変形して行くことは決して出来ないことがわかる。⁵⁾

これらの例より、多変数の分野では、ある正則域が有理凸

状又は多項式凸状であるための条件を求めようとすれば、次元の高さからくる領域の形の自由さのみならず、代数面の形の非常な特殊性をも考慮せねばならぬことがわかる。そしてこの条件はおそらく位相的なものではない。1変数のとき、位相的であり得たのは代数面が実は点であったと云う非常な特殊性から来ているのである。

- 1) K. Oka, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables.*
Iwanami Shoten. 1961. P 92 ~ 157
- 2) H. Cartan, P. Thullen, *Regularitäts- und Konvergenzbereiche,*
Math. Annalen. 1932.
- 3) K. Oka, *loc. cit.* p. 40
- 4) J. Wermer, *An example concerning polynomial convexity,*
Math. Annalen 139 147-150 (1959)
- 5) T. Nishino, *Un exemple concernant la convexité par rapport aux polynômes,* *J. Math. Kyoto Univ.*
6-1 (1966) 85-90.