

ベクトル値 DC 計画問題の最適性条件

新潟大学大学院自然科学研究科 北條 真弓 (Mayumi Hojo)
新潟大学大学院自然科学研究科 田中 環 (Tamaki Tanaka)
新潟大学大学院自然科学研究科 山田 修司 (Syuuji Yamada)
Graduate School of Science and Technology, Niigata University

Abstract

本論文では、2つのベクトル値錐凸関数の差で表されるベクトル値 DC 関数を定義し、その性質を紹介する。また、DC 関数の性質を用いて DC 計画問題の最適性条件を与える。

1 導入

多くの多極値問題は、目的関数がふたつの凸関数の差 (dc 関数) で表せる関数に帰着できる [4]。 $\mathbb{R}$ を実数とし X, Y を実ベクトル空間、 C を Y の凸錐とする。 E を X の凸部分集合とする。もし、

$$f(x) = g(x) - h(x), \forall x \in E \quad (1)$$

をみたす E 上のふたつの実数値凸関数 g, h が存在するらば、実数値関数 $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ を E 上の dc 関数とよぶ。 $E = X$ のとき、 f は単純に “dc” という。(1) を E 上 f の dc 分解とよび、 $E = X$ のとき、 (1) を dc 分解という。 dc 計画問題の解法には、外部近似法や分枝・限定法などのいくつかのアルゴリズムが提案されている。一方、いくつかの dc 関数から構成されるベクトル値関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ と、 $\mathbb{R}^n$ 内の単位球から生成されるゲージ関数 $\gamma: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ の合成について、Blanquero と Carrizosa [1] は、合成関数 $\gamma \circ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ もまた dc 関数であることを示した。一般的に、凸錐を用いて定義したベクトル値関数について、その凸性の考え方はたくさんある ([5] を参照)。このような凸性は、錐凸性としてあたえられ、典型的な方法は、関数のエピグラフの凸性で定義する方法である ([7] を参照)。 $f: X \rightarrow Y$ とする。もし、すべての $x_1, x_2 \in X$ と $\lambda \in [0, 1]$ に対し、

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq_C \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

ならば f を X 上の C -凸関数とよぶ。これは f のエピグラフ $\text{epi}(f)$ が凸であることと同値である。本論文では、目的関数がふたつの錐凸関数の差 (DC 関数) で表されるベクトル値 DC 計画問題について研究を行い、この問題に、ある最適性条件を与える。本論文の構成は以下の通りである。第 2 章では、実数値 dc 関数の性質と、ベクトル値 DC 関数の同様の性質について述べる。第 3 章では、Blanquero と Carrizosa [1] が示した合成関数 $\gamma \circ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ がまた dc 関数になるという考えについて説明する。この考え [1] を基に、DC 関数と Gerstewitz (Tammer) の sublinear スカラー化関数 [3] もまた dc 関数になることを示す。第 4 章では、DC 関数の性質を用いて dc 計画問題に最適性条件を与える。

2 準備

本論文を通して、 X と Y を実ベクトル空間、 C を Y の凸錐とする。ただし、順序を $\leq_C$: $x, y \in X$

$$x \leq_C y \Leftrightarrow y - x \in C$$

で与える。 Y の部分集合 A は $0 \in A$ とする。もしすべての $x \in Y$, $t \in [0, \delta]$ に対し, $tx \in A$ をみたす $\delta > 0$ が存在するとき, A は absorbing という。 Y を位相ベクトル空間とすると, $A \subset Y$ の位相的内部と位相的閉包をそれぞれ $\text{int } A$ と $\text{cl } A$ とする。以下の定義から始めよう。

定義 2.1. 大域的最適化問題は、以下の形をしているときに dc 計画問題または dc 計画とよぶ。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f_0(x) \\ & \text{subject to} && x \in E, \\ & && f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、 E は X の閉凸部分集合で、 $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, m$ はそれぞれ dc 関数とする。

dc 関数の族は、凸関数、凹関数や凸でも凹でもない関数を含む。

補題 2.1 (Horst, Pardalos and Thoai [4]). X をベクトル空間とし、 $f, f_1, \dots, f_m: X \rightarrow \mathbb{R}$ を dc 関数とすると、以下の関数もまた dc 関数である：

- (i) 任意の $\{\lambda_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}$ につて、 $x \mapsto \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$;
- (ii) $x \mapsto \max_{i=1, \dots, m} f_i(x)$, $x \mapsto \min_{i=1, \dots, m} f_i(x)$;
- (iii) $x \mapsto |f(x)|$, $x \mapsto \max\{0, f(x)\}$ and $x \mapsto \min\{0, f(x)\}$;
- (iv) $x \mapsto \prod_{i=1}^m f_i(x)$.

ベクトル値関数の定義を与える。

定義 2.2. X と Y を実ベクトル空間とし、 $f: X \rightarrow Y$ とすると、

$$\text{epi}(f) := \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) \leq_C y\}$$

は f のエピグラフとよばれる。

ここで、ふたつの錐凸関数の差で表される関数 (DC 関数) の一般的な考え方を紹介する。

定義 2.3. X と Y を実ベクトル空間とする。もし、

$$f(x) = p(x) - q(x), \quad \forall x \in X$$

をみたす C -凸関数 p と q が存在するならば、 $f: X \rightarrow Y$ は DC 関数とよばれる。

3 DC 関数のスカラー化

この章では、Blanquero と Carrizosa の方法 [1, Prop.1.1] を用いたゲージと dc 関数の合成について紹介する。通常の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ とし、 $Y = \mathbb{R}^n$ とする。

定義 3.1. 集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ が $0 \in S$ をみたすとする。 S のゲージ $\gamma_S : \mathbb{R}^n \mapsto (-\infty, +\infty]$ を次のように定義する。

$$\gamma_S(x) := \inf\{t > 0 \mid x \in tS\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

S が absorbing のとき, γ_S は S で生成される Minkowski 汎関数である。定理 14.5[8] より, 以下の補題を示す。

補題 3.1. S を Y の閉凸 absorbing 集合とすると, ゲージ γ_S は以下のようにかける。

$$\gamma_S(x) = \max\{\langle u', x \rangle \mid u' \in S^\circ\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

ただし S° は S の極集合であり, $S^\circ := \{u \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle \leq 1, \forall x \in S\}$ 。

$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}$ に関する特別な DC 関数 f について以下の定理がわかっている。

定理 3.1 (Blanquero と Carrizosa [1]). $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合, $\gamma_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を閉凸単位球 $B \subset \mathbb{R}^n$ から生成されるゲージ関数, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \dots, f_n)$ とする。 f_i はそれぞれが dc 分解

$$f_i = f_i^+ - f_i^-$$

をもつ dc 関数から成るとする。ただし f_i^+, f_i^- を $\mathbb{R}_+^n$ -凸関数とする。すべての $i = 1, \dots, n$, について,

$$M_i := \max\{\gamma_B(e_i), \gamma_B(-e_i)\},$$

ただし e_i は $\mathbb{R}^n$ の i 番目の単位ベクトルとする。 $\gamma_B \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は dc 関数で, $\gamma_B \circ f$ のひとつの dc 分解は

$$\gamma_B \circ f = g - h,$$

ただし $g = \gamma_B \circ f + \sum_{i=1}^n M_i(f_i^+ - f_i^-)$, $h = \gamma_B \circ f + \sum_{i=1}^n M_i(f_i^+ + f_i^-)$ で与えられる。

一般的な DC 関数について, 命題 3.1 と同様に考える。すなわち, sublinear 関数と DC 関数を合成するスカラー化の手法を用いる。ここで, 多面凸錐 C を以下のように定義する。

$$C := \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle c_i, z \rangle \geq 0, \forall i = 1, \dots, m\},$$

ただし $c_i \neq \theta$ ($i = 1, \dots, m$)。

本論文の主要結果を得るために, 次の補題が必要である。

補題 3.2. X を実ベクトル空間とする。 C -凸関数 $p : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i \in \{1, \dots, m\}$ について $g^{(i)} : X \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$g^{(i)}(x) := \langle c_i, p(x) \rangle, \quad \forall x \in X$$

と定義すると, $g^{(i)}$ はそれぞれの $i = 1, \dots, m$ で凸関数である。

Proof. $x_1, x_2 \in X$, $\lambda \in [0, 1]$ とすると,

$$\begin{aligned} & \lambda g^{(i)}(x_1) + (1 - \lambda)g^{(i)}(x_2) - g^{(i)}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \\ &= \langle c_i, \lambda p(x_1) + (1 - \lambda)p(x_2) - p(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \rangle \end{aligned}$$

を得る。関数 p が C -凸関数のとき

$$\lambda p(x_1) + (1 - \lambda)p(x_2) - p(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \in C.$$

それぞれの $i = 1, \dots, m$ について

$$\langle c_i, \lambda p(x_1) + (1 - \lambda)p(x_2) - p(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \rangle \geq 0.$$

だから,

$$g^{(i)}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda g^{(i)}(x_1) + (1 - \lambda)g^{(i)}(x_2).$$

よって $g^{(i)}$ は $i = 1, \dots, m$ で凸関数である。 □

$k \in \text{int } C$ が存在するとき, $c^i(k) \in \mathbb{R}^n$ を以下のように定義する。

$$c^i(k) := \frac{1}{\langle c_i, k \rangle} c_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

補題 3.2 の証明において, $\langle c_i, k \rangle > 0$ より任意の C -凸関数 $p : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ について, 写像 $x \mapsto \langle c^i(k), p(x) \rangle$ は凸写像である。

命題 3.1. Gerstewitz (Tammer) [3] が定義した以下の sublinear 関数

$$\varphi_k(y) := \inf \{ t \in \mathbb{R} \mid y \in tk - C \}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

は, 次のようにかける。

$$\varphi_k(y) = \max_{i=1, \dots, m} \langle c^i(k), y \rangle, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Proof. 任意の $y \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ について, φ_k の定義より, $t_\varepsilon k - y \in C$ と $t_\varepsilon < \varphi_k(y) + \varepsilon$ をみたす $t_\varepsilon \in \mathbb{R}$ が存在する。 $t_\varepsilon k - y \in C$ より $i = 1, 2, \dots, m$ について $\langle c_i, t_\varepsilon k - y \rangle \geq 0$ であるので,

$$t_\varepsilon \langle c_i, k \rangle \geq \langle c_i, y \rangle$$

さらに

$$t_\varepsilon \geq \frac{1}{\langle c_i, k \rangle} \langle c_i, y \rangle = \langle c^i(k), y \rangle$$

だから

$$t_\varepsilon \geq \max_{i=1, \dots, m} \langle c^i(k), y \rangle.$$

$t_\varepsilon < \varphi_k(y) + \varepsilon$ より

$$\varphi_k(y) + \varepsilon > t_\varepsilon \geq \max_{i=1, \dots, m} \langle c^i(k), y \rangle.$$

$\varepsilon > 0$ とすると

$$\varphi_k(y) \geq \max_{i=1, \dots, m} \langle c^i(k), y \rangle$$

である。逆に, $y \in \mathbb{R}^n$ とし, $\hat{t} = \max_{i=1, \dots, m} \langle c^i(k), y \rangle$ とする。任意の $i = 1, \dots, m$ について

$$\hat{t} \geq \langle c^i(k), y \rangle = \frac{1}{\langle c_i, k \rangle} \langle c_i, y \rangle$$

だから

$$\langle c_i, \hat{t}k - y \rangle \geq 0$$

であり

$$\hat{t}k - y \in C。$$

φ_k の定義より

$$\varphi_k(y) \leq \hat{t} = \max_{i=1, \dots, m} \langle c^i(k), y \rangle。$$

よって示された。 □

命題 3.1, 補題 3.2, 2.1 を用いて以下の結果を得る。

定理 3.2. X を実ベクトル空間, $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ を DC 関数とし, f の DC 分解を以下で与える。

$$f(x) = p(x) - q(x), \quad \forall x \in X。$$

ただし p, q は C -凸関数とすると,

$$(\varphi_k \circ f)(x) = \max_{i=1, \dots, m} \langle c^i(k), f(x) \rangle, \quad \forall x \in X。$$

さらに $\varphi_k \circ f$ は dc 関数である。

Proof. 命題 3.1 より, $x \in X$ について

$$\begin{aligned} (\varphi_k \circ f)(x) &= \varphi_k(f(x)) \\ &= \max_{i=1, \dots, m} \langle c^i(k), f(x) \rangle \\ &= \max_{i=1, \dots, m} \{ \langle c^i(k), p(x) \rangle - \langle c^i(k), q(x) \rangle \}。 \end{aligned}$$

補題 3.2 から $\langle c^i(k), p(x) \rangle$ と $\langle c^i(k), q(x) \rangle$ は凸関数である。よって $\langle c^i(k), p(x) \rangle - \langle c^i(k), q(x) \rangle$ は dc 関数である。補題 2.1 より, $\varphi_k \circ f$ は dc 関数である。 □

4 最適性条件

この章では DC 関数の性質を用いて dc 計画問題の最適性条件を示す。

E を $\mathbb{R}^n$ の閉凸部分集合とする。ひとつの重要な dc 計画問題は以下であたえられる。

$$\omega_0 := \inf \{ g(x) - h(x) \mid x \in E \}, \quad (3)$$

ただし g, h は $\mathbb{R}^n$ 上の凸関数とする。

$$\omega_0 := g(x^*) - h(x^*) = \inf \{ g(x) - h(x) \mid x \in E \}$$

をみたす $x^* \in E$ と $\omega_0 \in \mathbb{R}^n$ が存在するとき, 問題 (3) は解をもつ。以下の結果は, 問題 (3) にひとつの最適性条件を与える。

定理 4.1 (Horst, Pardalos and Thoai [4]). もし問題 (3) が解をもつとすると, $x^* \in E$ が最適解である必要十分条件は

$$\inf\{-h(x) + t \mid x \in E, t \in \mathbb{R}, g(x) - t \leq g(x^*) - t^*\} = 0$$

をみたす $t^* \in \mathbb{R}$ が存在することである。

つぎに, 有効点の応用として $\text{int } C$ に関する下限点の考え方を与える。

定義 4.1 (Tanaka [6]). A を空でない $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする。以下のふたつの条件

- (i) $w^* \in \text{cl } A$;
- (ii) for any $a \in A$ with $a \neq w^*$, $w^* - a \notin \text{int } C$.

をみたすとき, $w^* \in \mathbb{R}^n$ を $\text{int } C$ に関する A の有効点とよぶ。 $\text{int } C$ に関する A の有効点集合を $\text{Inf } A$ とする。

本論文の主定理を示す前に, 命題 3.1 中の Gerstewitz (Tammer) の sublinear スカラー化関数 φ_k が次の性質をもつことをもう一度確認する。

補題 4.1 (Göpfert, Tammer, Riahi and Zălinescu [2]). Y を実ベクトル空間, C を Y の真閉凸錐, $k \in \text{int } C$ とすると, すべての $\lambda \in \mathbb{R}$ について

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_k(y) < \lambda\} = \lambda k - \text{int } C$$

をみたす φ_k は連続関数である。

ここで, 本論文の主定理を示す。

定理 4.2. A を $\mathbb{R}^n$ の空でない部分集合, $w^* \in \text{cl } A$, $k \in \text{int } C$ とすると,

$$w^* \in \text{Inf } A \Leftrightarrow \inf\{\varphi_k(y) \mid y \in A - w^*\} = 0.$$

Proof. $\beta := \inf\{\varphi_k(y) \mid y \in A - w^*\}$ とする。はじめに, $w^* \in \text{Inf } A$ と仮定する。 $w^* \in \text{cl } A$ のとき $a_n \rightarrow w^*$ ($n \rightarrow +\infty$) をみたす $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset A$ が存在する。 φ_k の連続性 (補題 4.1) と命題 3.1 より

$$\begin{aligned} \beta &= \inf\{\varphi_k(y) \mid y \in A - w^*\} \\ &\leq \inf\{\varphi_k(a_n - w^*) \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_k(a_n - w^*) \\ &= \varphi_k(0) = 0 \end{aligned}$$

であるから, $\beta \leq 0$. 次に $\beta = 0$ を示す。もし $\beta < 0$ ならば, β の定義より $\varphi_k(a_0 - w^*) < 0$ をみたす $a_0 \in A$ が存在するので, 補題 4.1 より $a_0 - w^* \in -\text{int } C$ 。これは, w^* の有効性つまり, 定義 4.1(ii) に矛盾する。よって $\beta = 0$ 。

次に, 逆を示す。 $\beta = 0$ と仮定する。もし $w^* \notin \text{Inf } A$ とすると, $a - w^* \in -\text{int } C$ をみたす $a \in A$ with $a \neq w^*$ が存在する。

$$0 \cdot k - \text{int } C = -\text{int } C \ni a - w^*$$

のとき, 補題 4.1 から $\varphi_k(a - w^*) < 0$ を得る。一方 $\beta = 0$ より, すべての $a \in A$ について $\varphi_k(a - w^*) \geq 0$ である。これは矛盾であるので, $w^* \in \text{Inf } A$ 。 $\square$

$f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ を DC 関数とし、以下の問題を考える。

$$w \in \inf \{f(x) \mid x \in X\}. \quad (4)$$

もし

$$w^* \in \inf \{f(x) \mid x \in X\}, \quad f(x^*) = w^*$$

をみたす $x^* \in X$, $w^* \in \mathbb{R}^n$ が存在するとき、問題 (4) は解をもつ。

定理 4.3. もし問題 (4) が解をもつならば、以下をみたす $t^* \in \mathbb{R}$ が存在する。

$$\inf \{-h_{w^*}(x) + t \mid x \in X, t \in \mathbb{R}, g_{w^*}(x) - t \leq g_{w^*}(x^*) - t^*\} = 0$$

ただし $\varphi_k(f(x) - w^*)$ の分解 g_{w^*} , h_{w^*} は凸関数とする。

Proof. f を DC 関数のとき、命題 3.2 より $\varphi_k(f(x) - w^*)$ は dc 関数である。定理 4.1 より、

$$w^* \in \inf \{f(x) \mid x \in X\} \Leftrightarrow \inf \{\varphi_k(f(x) - w^*) \mid x \in X\} = 0.$$

だから

$$\begin{aligned} 0 &= \inf \{\varphi_k(f(x) - w^*) \mid x \in X\} \\ &= \inf \{g_{w^*}(x) - h_{w^*}(x) \mid x \in X\}. \end{aligned}$$

定理 4.1 より

$$\inf \{-h_{w^*}(x) + t \mid x \in X, t \in \mathbb{R}, g_{w^*}(x) - t \leq g_{w^*}(x^*) - t^*\} = 0$$

をみたす $t^* \in \mathbb{R}^n$ が存在する。よって示された。 $\square$

References

- [1] R. Blanquero and E. Carrizosa, *Optimization of the norm of a vector-valued DC function and applications*, J. Optim. Theory Appl. **107** (2000), 245–260.
- [2] A. Göpfert, C. Tammer, H. Riahi and C. Zălinescu, *Variational Methods in Partially Ordered Spaces*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [3] Chr. Gerstewitz (Tammer), *Nichtkonvexe dualität in der vektoroptimierung*, Wiss. Zeitschr. TH Leuna-Merseburg **25** (1983), 357–364 (in German).
- [4] R. Horst, P. M. Pardalos and N. V. Thoai, *Introduction to Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
- [5] T. Tanaka, *Cone-convexity of vector-valued function*, Sci. Rep. Hiroshima Univ. **37** (1990), 170–177.
- [6] T. Tanaka, *Approximately efficient solution in vector optimization*, J. Multi-Criteria Decision Anal. **5** (1996), 271–278.
- [7] D. T. Luc, *Theory of Vector Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [8] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.
- [9] R. T. Rockafellar and R. J-B. Wets, *Variational Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.