

多次元 parameter をもつ
Brown 運動について

名大 理 野田 明男

$\{X(A); A \in E\}$ を $E = E_n$ (n 次元ユークリッド空間) 又は E_∞ (無限次元ヒルベルト空間) を parameter space にとる Brown 運動とする。つまり $\{X(A) - X(B)\}$ は平均 0 の Gaussian system をなし、 $E[(X(A) - X(B))^2] = \text{dis}(A, B)$ ($\text{dis}(A, B)$ は A と B の距離を示す。) を満たすものである。 $X(0) = 0$ と仮定する立場と $X(0)$ を決定せずに増分のみに着目する立場とがあるが、二つの立場を適当に使いわける。ここでは $\{X(A)\}$ の従属性についての特長を調べるのを目標とする。

ボレル集合 $E \subset E$ に対し、

$$X(A) = E[X(A) | X(P), P \in E] + \sigma(A|E) \xi_A$$

という $X(A)$ の標準形を考える。ここで ξ_A は normalized Gaussian variable である。この場合 E 内の適当な点 P_0 を定めて、 $X(P_0) = 0$ と仮定して標準形を得る。 $E[X(A) | X(P), P \in E] = \mu(A|E)$ と書く。

P. Lévy の基本的な結果は、 $\sigma(A|E)$ の大きさに注目して、 E_n

の場合には $\{X(A)\}$ は non-deterministic な性質をもち、 E_0 の場合には deterministic な性質をもっているということである。それを示すため彼はまづ $X(A)$ を半径 r の球面上で平均して得られる $M(t)$ -過程を研究した。又従属性に関する別の見方は、

$$\mu(A|E) = \mu(A|E'), \quad (\text{これは } \sigma(A|E) = \sigma(A|E') \text{ と同値。})$$

を満たす E の部分集合 E' に着目することである。このような E' を Lévy は A に対する E の minimisant な部分集合と呼んでいる。それは E_0 の場合に、McKean によって解かれた Markov 性に関連することであるが、ここでは Markov 性については議論せず、 E_0 の場合に Markov 性とは著しく異なる minimisant な部分集合をもつ例を述べるだけにする。最初に特殊な部分集合 E に対して $\mu(A|E)$ の explicit な形を求め、そのことから容易にわかる若干の性質を述べ、その後上述の Lévy の基本的な定理を証明し、さらにその定理の拡張について Lévy の予想を述べる。内容の多くの部分を [1] の Ch VII と Complement Ch III から取り、それに若干の事実をつけ加えた。

§ 1 $M(t)$ -過程とその性質

$E = S(R)$ (E 内の中心 O で半径 R の球) の場合を考える。

Lévy は $\mu(O|S_n(t)) = \int_{S_n(t)} X(p) d\sigma_n(p)$ (σ_n は $S_n(t)$ 上の一様な確率測度) であることを見つけた。

$$\mu(C|S_\omega(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C|S_\omega(t) \cap 0x_1 \cdots x_n \text{ 平面}) \quad \text{a.s.}$$

(a.s. は “ほとんど確実に” の略) を示した。これは又 E_ω の注意の無限次元部分空間 P に対し、 $\mu(C|P \cap S_\omega(t))$ に一致し、さらに座標軸 $0x_i$ と $S_\omega(t)$ との交点を A_i とすると、

$$\mu(C|A_i)_{i=1}^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X(A_i) \quad \text{a.s.}$$

とも一致する。そこで $\bar{M}(t) \equiv \mu(C|S(t))$ ($t > 0$) , $M(t) \equiv \bar{M}(t) - X(0)$ と定義して、 $M(t)$ 過程を調べ、以下の事実を証明した。

$M(t)$ -過程の covariance を $\Gamma(t_1, t_2) \equiv E[M(t_1)M(t_2)]$ とおく。

$$(1) \Gamma_n(t, t) = t \left(1 - \frac{2^{n-2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(n-\frac{1}{2})} \right) \quad (\text{ただし } \Gamma(\cdot) \text{ はガンマ関数})$$

$$\Gamma_\omega(t, t) = t \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

この値は $\Gamma(C|S(t))$ に一致する。

$$(2) \Gamma_{2p+1}(t_1, t_2) = \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \sum_{h=1}^p a_h \frac{t^{2h}}{t^{2h-1}} \quad t = \min(t_1, t_2), \quad t = \max(t_1, t_2)$$

$\Gamma_{2p+1}(t_1, t_2) \in C^2((0, \infty) \times (0, \infty))$ で係数 a_h はこの条件で決定される。

$$\Gamma_\omega(t_1, t_2) = \frac{1}{2} (t_1 + t_2 - \sqrt{t_1^2 + t_2^2})$$

$\Gamma_\omega(t_1, t_2)$ は analytic であるから Loève の定理により $M_\omega(t)$ は二次平均の意味で analytic になり、Gaussian の場合には、さらに、a.s. の意味で analytic になる。

$$(3) M_{2p+1}(t) = \int_0^t P_{2p+1}\left(\frac{u}{t}\right) dB(u), \quad P_{2p+1}(u) = \sqrt{2} p \frac{\sqrt{(2p)!}}{2^p p!} \int_u^1 (1-x^2)^{p-1} dx$$

($B(u)$ は一次元 Brown 運動である。) なる標準表現を持ち、

a.s. に $C^p(0, \infty)$ 。

$$M'_\omega(t) = (2\pi)^{\frac{1}{4}} \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2t}} \frac{u}{t} dB(u) \quad (\text{McKean の公式}) \text{ と表現される。}$$

(4) $Y(u) \equiv e^{-u} M(e^{2u})$ ($-\infty < u < +\infty$) は定常過程で、その covariance を $\gamma(h)$ とすると、 $n \geq 4$ のとき、

$$(2n-3)^2 \gamma_n(h) - \gamma_n''(h) = 4(n-1)(n-2) \gamma_{n-2}(h)$$

$$\gamma_{n-2}(t) = \frac{1}{2(n-1)(n-2)} e^{-(2n-3)t} \frac{d}{dt} e^{(2n-3)t} \gamma_n(t)$$

となる。([4])

次に $X(0)=0$ と仮定して、 $\mu(A|S_n(R) \cup 0)$ を任意の A に対し、McKean の展開 ([5])、 $X(A) = \sum_{\substack{\ell \leq \dim 3_R \\ R \geq 0}} x_\ell^R(a) h_\ell^R(S_A)$ 、 $a=|A|$ 、 $S_A = \frac{A}{a}$ を使っておめよう。

$\mu(A|S_n(R) \cup 0) = \int_{S_n(U)} X(RS) dF_{A,R}^n(s) = \sum_{\substack{\ell \leq \dim 3_R \\ R \geq 0}} x_\ell^R(R) \frac{v_\ell(a,R)}{v_\ell(R,R)} h_\ell^R(S_A)$
 $S_n(U)$ 上の測度 $dF_{A,R}^n(s)$ は $\int_{S_n(U)} h_\ell^R(s) dF_{A,R}^n(s) = \frac{v_\ell(a,R)}{v_\ell(R,R)} h_\ell^R(S_A)$ で定義される。こゝで

$$v_k(a,b) = E[x_k^R(a)x_k^R(b)] = \begin{cases} \frac{1}{2}(a+b - \int_{S_n(U)} \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta} d\Omega_n(s)) & \text{for } k=0 \\ -\frac{1}{2} \int_{S_n(U)} \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta} p_k(\cos\theta) d\Omega_n(s) & \text{for } k>0 \end{cases}$$

$\theta = \angle$ の colatitude で、 $p_k(\cos\theta) = \frac{C_k^{(n-2)/2}(\cos\theta)}{C_k^{(n-2)/2}(1)}$ 、 C : Gegenbauer 多項式である。容易に任意の $S' \in S_n(U)$ に対し $E[(X(A)-\mu(A))X(RS')] = 0$ がいえるから上の事は正しい。

$\bar{X}(A) = X(A) - \mu(A|S_n(R) \cup 0)$ 、つまり原点と $S_n(R)$ 上の点で $X(A)$ を 0 にした一種の Pinned Brownian motion といえるような process を考えよう。その covariance $R(A,B)$ は、

$$\begin{aligned} R(A,B) &= E[(X(A)-\mu(A))(X(B)-\mu(B))] = \frac{1}{2}(a+b - \text{dis}(A,B)) - \sum_{k \geq 1} \frac{v_k(a,R)v_k(b,R)}{v_k(R,R)} h_k^R(S_A) h_k^R(S_B) \\ &= \sum_{k \geq 0} \left\{ v_k(a,b) - \frac{v_k(a,R)v_k(b,R)}{v_k(R,R)} \right\} \dim 3_k p_k(\cos\theta) \quad (\theta = \angle AOB) \end{aligned}$$

となる。 $X(A)$ の相関係数 $\rho_n(A, B)$ を考えれば、次の事が容易にわかる。

定理 ρ_n は伸縮、回転、原点を通る超平面に関する鏡映、中心 O の内に関する反転、これらの変換に関し不変である。つまり $\{X(A)\}$ (A は $S_n(R)$ の内部又は外部を動く) の確率構造はこれらの変換に関し不変である。

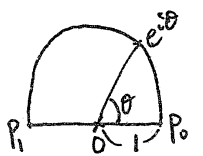
さらに $X(A)$ を増分のみに着目する立場にたてば、平行移動に関しても不変であるといえる。中心と二つの同心球 $S_n(R_1)$ と $S_n(R_2)$ で $X(A)$ を 0 にした process についても同様の事がいえる。

$X(0)=0$ と仮定せずに $\mu(A|S_n(R))$ を求めると、

$$\mu(A|S_n(R)) = \int_{S_n(U)} X(Rs) dF_{R,A}^A(s) + \left(1 - \frac{V_0(a, R)}{V_0(R, R)}\right) \int_{S_n(U)} X(Rs) d\sigma_n(s)$$

$$\sigma^2(A|S_n(R)) = a + V_0(R, R) - 2V_0(a, R) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V_k(a, R)^2}{V_k(R, R)} \dim Z_k.$$

最後に E_2 で半径 1 の半円を E として $\mu(O|E)$ を求めよう。

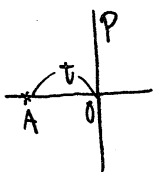


$$\mu(O|E) = \int_0^\pi X(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{4+\pi} + \frac{2}{4+\pi} (X(P_1) + X(P_2)).$$

任意の弧に対しても同様に条件付平均値が求められ、端点に singular な測度が現われる。

§2 $\mu(A|P)$ (P : 超平面) について

$\text{dis}(A, P) = t$ なる A に対し、 $X(0)=0$ と仮定して $\mu(A|P)$ を求めよう。



$$\mu(A|P_{n-1}) = \int_0^\infty M_{n-1}(x) f_n(t, x) dx$$

と表わされる。 $M_{n-1}(t)$ は P_{n-1} 内の半径 x の球上の平均で、 $f_n(t, x)$ は

$$\int_0^\infty f_n(t, x) \Gamma_{n-1}(x, y) dx = \frac{1}{2} (t + y - \sqrt{t^2 + y^2}) \quad \text{for any } y > 0$$

を満たす密度関数である。また $t f_n(t, tx) = f_n(1, x)$ であるから

が $x \rightarrow tx$ と変数変換すればすぐわかるから

$$(*) - \int_0^\infty f_n(x) \Gamma_{n-1}(x, y) dx = \frac{1}{2} (1 + y - \sqrt{1 + y^2})$$

を満たす $f_n(x) \equiv f_n(1, x)$ を求めればよい。

命題 $f_{n+2}(x) = \frac{1}{(n-1)x(n-2)} \{ n(n-3)f_n(x) - 4xf_n'(x) - x^2f_n''(x) \} \quad n \geq 3.$
 $f_2(x) = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad f_4(x) = \frac{15}{2} x^2 (1+x^2)^{-\frac{7}{2}}$

証明 (*) で $x = e^{2u}, y = e^{2v}$ と変数変換して $g_n(u) = 2f_n(e^{2u})e^{3u}$ とおくと、(*) と同値な方程式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(u) \gamma_{n-1}(v-u) du = \cosh v - \sqrt{(\cosh v)^2 - \frac{1}{2}} \quad \text{for any } v$$

を得る。 γ_n は前述の $Y_n(u)$ の covariance でその関係式を使えば、容易に証明される。 $f_2(x)$ と $f_4(x)$ については、(*) の式で $\Gamma(x, y)$ が簡単な Goursat 核の形なので、 y について両辺を微分していけば得られる。

これにより $f_{2n}(x)$ は順次求められる、 $f_{2n}(x) \in C^\infty$, $\int_0^\infty f_{2n}(x) dx = 1$, $\int_0^\infty x f_{2n}(x) dx = 1$ を満たす。

$$\sigma_{2n}^2(A|P) = \frac{t}{2} \int_0^\infty \sqrt{1+x^2} f_{2n}(x) dx$$

例えば、 $\sigma_2^2 = \frac{\pi}{4} t$, $\sigma_4^2 = \frac{15}{64} \pi t$.

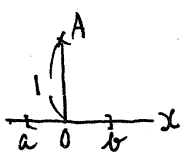
次に $\mu(A|P_{n-1})$ を求めよう。

$$\mu(A|P_{n-1}) = M_{n-1}(t), \quad \sigma^2(A|P_{n-1}) = \frac{t}{12}.$$

このことより、超平面 P_n 内の半径 r の球は A に対して P_n の minimisant な部分集合となっている。これは E_0 の場合にのみ見られる。Markov 性とは違った著しい従属性を示す例であると思う。

A の P に対称な点を A' とすると、 $\mu(A|P) = \mu(A'|P)$ であり、 $X(A)$ と $X(A')$ は独立なので、 $E[X_A X_{A'}] < 0$ 、即ち $\{X(A)\}$ は超平面に関して simple Markov の性質をもたないことがわかる。

最後に E_2 で E = 線分の場合を考えよう。

 $\mu(A|E) = \int_a^b X(x) \frac{dx}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right) X(a) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}\right) X(b)$
半円の場合と同じく、端点に singular な測度が現われ、しかもこの場合 (a,b) 上の密度は直線全体の場合のそれと同じであることを注意する。

§3 determinism について

$E \subset E$ に対して、 $K(E) = \{A | \mu(A|E) = 0\}$ なる A 全体 $\mathcal{K} \subset E$ で、作用素 K を定義する。明らかに、 $K^2 = K$ 、 $K(E) \subset E$ (閉包)、 $E_1 \subset E_2$ なら $K(E_1) \subset K(E_2)$ 。そして $K(E_1 \cup E_2) = K(E_1) \cup K(E_2)$ が成立する、即ち K は閉作用素であると Levy はいっている。それを証明することはできないけれど、次の注意をしておく。 E_n の場合は次の定理により問題なく、 E_0 の場合に E_1 と E_2 が同心球なら、 $K(E_1) = E_1$ で $K(E_1 \cup E_2) = K(E_1) \cup K(E_2) = E_1 \cup E_2$ が成立する

ことを次のように証明できる。

E_1 と E_2 は中心 O で半径 R_1 と R_2 の同心球とする。 $X(O)=0$ と仮定して、 $\sigma(A|E_1 \cup E_2 \cup O)=0$ なる $A \notin E_1 \cup E_2 \cup O$ が存在したとすると、半径 $r = \text{dis}(O, A)$ の球上のすべての点で $\sigma(B|E_1 \cup E_2 \cup O)=0$ を満たす。つまり $\{X(p) | p \in E_1 \cup E_2 \cup O\}$ が与えられると、 $M(r)$ が決定される。 E_n での McKean の展開を考えると、 $X(A) = M_n(|A|) + Y_n(A)$ (M_n と Y_n は互いに独立) と分解されている。 E_∞ でも、 $X(A) = M_\infty(|A|) + Y_\infty(A)$ (M_∞ と Y_∞ は独立) となっている。従って $M(r)$ は $M(R_1)$ と $M(R_2)$ が与えられると決定されることになる。これは $M_\infty(t)$ 過程の covariance を考えれば矛盾する。 $X(O)=0$ の条件をはずせば、なおさう、 $\sigma(A|E_1 \cup E_2) > 0$ ($A \neq O$)。 O に対しては、

$$\mu(O|E_1 \cup E_2) = c \overline{M}(R_1) + (1-c) \overline{M}(R_2), \quad c = \frac{\sqrt{R_1^2 + R_2^2} - R_1 - (\sqrt{2}-1)R_2}{2\sqrt{R_1^2 + R_2^2} - \sqrt{2}(R_1 + R_2)}$$

$$\sigma^2(O|E_1 \cup E_2) = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})(cR_1 + (1-c)R_2) > 0.$$

故に $K(E_1 \cup E_2) = E_1 \cup E_2$ 。 $K(E_i) = E_i$ はこの推論を適用すれば容易に得られ、さらにこの推論は任意有限個の同心球 E_i に適用される。

$K(\bigcup_{i=1}^\infty E_i) = \bigcup_{i=1}^\infty K(E_i)$ は成立しない。反例は E_i が同心球の場合、又は平行な超平面の場合である。 E_i が半径 R_i の同心球で、 R_i がある有限数に収束するとすると、 $K(\bigcup_{i=1}^\infty E_i) = E_\infty$ が成立する。これは $M_\infty(t)$ が analytic であることと次の定理から容易に証明される。又 E_i を平行な超平面の列で、ある点からの距離が

収束するものとする。 $M(\bigcup E_i) = E_\infty$ が成立する。 $M_\omega(t)$ にか
かって使われる analytic な過程は、

$M_\omega(t) = \mu(0 | P_{\omega-1}(t)) - X(0)$ ($P_{\omega-1}(t)$ は $x=t$ で定義される超平
面) である。その covariance は $\frac{1}{\sqrt{2}}(t_1 t_2 - \sqrt{t_1^2 + t_2^2} - t_1 t_2)$ である。

さてその Lévy's determinism の基本的な定理を述べよう。

定理 (i) E_n においては、 $M(E) = \bar{E}$ 。即ち E_n は deterministic で
はない。

(ii) E_∞ において、その任意の開集合 E に対し、 $M(E) = E_\infty$ 。即
ち E_∞ は deterministic である。

略証 (i) $n=2p+1$ のとき、 0 を中心とする半径 t の球の外部
領域を $\tilde{S}(t)$ とすると、 $\sigma^2(0 | \tilde{S}(t)) = \frac{1}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2p)} t$ 。

何故なら、 $M(u)$ が $[t, \infty)$ で与えられたときの $M(t) = \overline{M(t)} - X(0)$ に
対する条件付標準偏差は $\sigma(0 | \tilde{S}(t))$ に等しい。 $M(t)$ は $X(A)$ に A に
independent な確率変数を加えても不変なので、 $M'(u)$ が $[t, \infty)$ で与
えられたとしてよい。さらに $M'(t)$ は p 重 Markov 過程なので、
 $M(t), \dots, M^{(p)}(t)$ が与えられたと考えてよい。 $M(t)$ の標準表現をみ
ると、 $J_k = \int_0^t u^k dB(u)$ と置いて、 $J_1, J_2, \dots, J_{p+1}$ が与えられたとき、
 $\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{p+1}{2})} J_0$ の条件付標準偏差を求める問題に帰着される。こ
れは Legendre 多項式を用いて計算される。 ([2])

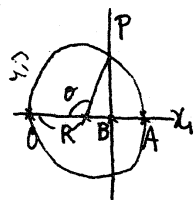
E は開集合と仮定してよいから、 $A \notin E$ に対し A を中心とす
る半径 $\text{dis}(A, E)$ の球 ($E \subset E_{p+1}$ なら、球を E_{p+1} 内に描く。) を考えれ

ば、 $\mathcal{E}$ は $\mathcal{E}$ の外部領域に含まれるから、

$$\text{dis}(A, \mathcal{E}) = \sigma^2(A|\mathcal{E}) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2P-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2P)} \text{dis}(A, \mathcal{E}) > 0$$

が成立する。故に $A \notin \mathcal{K}(\mathcal{E})$ 。そして $\sigma^2(A|\mathcal{E})$ は $\text{dis}(A, \mathcal{E})$ と同じ大きさの order であることもわかる。

(ii) $X(A)$ が原点 O の $\mathcal{E}_0$ の近傍で既知のとき、任意の点 A で $X(A)$ が決定されることを示すのが問題である。 $X(O) = 0$ と仮定できる。 S は直径 OA の球で、その半径を R とする。 OA を x_1 軸ととり、



P は $x_1 = R(1 - \cos \theta)$ で定義される超平面とし、 x_1 軸との交点を B で表わす。

$$M_A(\theta) \equiv \mu(B|P \cap S) \quad (0 < \theta < \pi).$$

$M_A(\theta)$ の covariance は $R \left[\sin \frac{\theta_1}{2} + \sin \frac{\theta_2}{2} - \sqrt{\frac{1 - \cos \theta_1 \cos \theta_2}{2}} \right]$ で、 $(0, \pi) \times (0, \pi)$ で analytic だから、 $M_A(\theta)$ は a.s. に $(0, \pi)$ で analytic である。 $M_A(\theta)$ は O の近傍で既知なので $(0, \pi)$ 上すべてで決定され、 $X(A) = \lim_{\theta \rightarrow \pi} M_A(\theta)$ も決定される。

この定理の拡張について Levy はいろいろ述べている。無限次元超平面 P の任意の開集合 (即ち $\mathcal{E}_0$ の開集合と P の交わり) $\mathcal{E}$ に対し、 $\mathcal{K}(\mathcal{E}) = P$ が成立する。 $\mathcal{K}(\mathcal{E}) \cap P$ は定理から明らかで、等号は $\sigma^2(A|P) = \frac{1}{\pi} \text{dis}(A, P)$ による。次に無限次元球面 S を考えると、その開集合 $\mathcal{E}$ に対し $\mathcal{K}(\mathcal{E}) = S$ が成立する。 $\mathcal{K}(\mathcal{E}) \cap S$ は定理の証明と類似の推論でいえ、 $\mathcal{K}(S) = S$ は前に示した。

こうして作用素 $\mathcal{K}$ は $\mathcal{E}_0$ では $\mathcal{E}$ の analytic な延長を定義するよ

うに思われ、Lévy は次のように予想した。

- (a) analytic で connected な hypersurface $\mathcal{S}$ (hyper は無限次元を意味する) の開集合 E に対し、 $K(E) \cap \mathcal{S}$ 。さらに $\sigma^2(A|\mathcal{S})$ は $\text{dis}(A, \mathcal{S})$ と同じ大きさの order である。合わせて、 $K(E) = \mathcal{S}$ が成立する。
- (b) analyticity を弱めて、quasi-analytic な hypersurface も上と同様の性質をもつ。

$\mathcal{S} = \{(x, f(x)) \in E' \times E'' = E_\omega\} \quad (\dim E' = \infty, \dim E'' = n, f(x) \text{ は analytic})$
 に対し、 $K(E) \cap \mathcal{S}$ を Lévy は証明している。([3])

なお Lévy は $\sigma(A|E)$ は $K(E)$ の外で A の analytic function である
 と予想している。これは $E = \{A_1, \dots, A_n\}$ (このとき $\sigma^2(A|E)$ は
 $\text{dis}(A, A_i)$ の 2 次多項式となる。) とか、§1.2 の特別の E に対し
 ては、成立している。

References

- [1] P. Lévy : Processus Stochastiques et Mouvement Brownien,
 Gauthier-Villars, Paris (1965)
- [2] " : A special problem of Brownian motion, and a
 general theory of Gaussian random functions.
 Proc. of the third Berkeley Symposium on math, Stat. and Prob.
 Berkeley (1956) p133-175

- [3] P. Lévy : Le déterminisme de la fonction brownienne dans l'espace de Hilbert; second mémoire.
Ann. scient. Éc. norm. sup. t. 80 (1963) p 193-212
- [4] T. Hida : Canonical representations of Gaussian processes and their applications
Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser A Math 33 (1960) p 109-155
- [5] H. P. McKean, Jr. : Brownian motion with a several dimensional time
Teor. Veroyatnost. i. Primenen 8 (1963) p 357-378.