

完全交さ (孤立特異点の)
(全モノドロミーの有限性と交さ型式の正定値性)

東大 教養 有藤恭司

本稿は次の4種の2次元の特異点(これ等を単純楕円型特異点と名付ける)と単純代数群のルート系の研究に現れる拡大されたDynkin図型との関連を述べる。(図)その応用として2次元の完全交さ、normal特異点について、そのvanishing cycleのなすintersection formが正定値となる事、vanishing cycleのなすtotal monodromy groupが有限群となる事、特異点が有理2重点となる事の3者が同値である事を示す。なお実係数の場合には、力学系の問題より、これ等の特異点についてCimolaの研究([1])がある。又、拡大されたDynkin図型と楕円曲線(面)との関連が既に小平[3]にも見い出され、相互に何らかの内的関連があると思われるが、現在の所は分らない。

名前	方程式	c.o.c	r	s	h	μ
E_6	$y(y-x)(y-\lambda x)-xz^2=0$	-3	1	1	∞	8
$\tilde{E}_7$	$yx(y-x)(y-\lambda x)-z^2$	-2	1	1	∞	9
$\tilde{E}_8$	$y(y-x^2)(y-\lambda x^2)-z^2$	-1	1	1	∞	10
$(\tilde{D}_4)$	$\begin{cases} y(w-(1+\lambda)y+\lambda x)-z^2=0 \\ y^2-xw=0 \end{cases}$	-4	/	/	/	7

/

容易に、これ等の特異点の *minimal resolution* の *exceptional curve* C は、非特異な楕円曲線 C となる事が分る。その楕円曲線の絶対不変量 $j = \frac{4}{27} \frac{(1^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(\lambda-1)^2}$ で与えられ、又 *self-intersection number* $C \cdot C$ は上記の通り。(上記式に $\lambda \in \mathbb{C}$ は parameter で $\lambda \neq 0, 1, \infty$)

上記の表中 r, s, h はそれぞれ (当面は) *quasi-homogeneous* な超曲面の孤立特異点 (X, x) に対し定義された不変量で、次の様にして与えられる。

$(X, x) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ は局所的に $f=0$ なる方程式で定義されてい、 $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ 、 $D = \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ を微分の芽で $Df=f$ を満たすものとする時、

$$r(X, x) = \dim(D) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_i}(0)$$

$$s(X, x) = \max \{ \alpha : \alpha \text{ は } D : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} / (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}) \text{ の固有値} \}$$

r, s は非負の有理数値をとるが、更に Hartshorne の duality を用いて、

$$2r(X, x) + s(X, x) = n$$

が示せる。さてこの時 $h(X, x) = 2/1 - s(X, x) = 2/2r(X, x) - n + 1$

と定義して、 $h(X, x)$ を (X, x) の *corater 数* と呼ぶ事にする。

さて有理2重点は既に M. Artin, E. Brieskorn (Lipman) 等の研究があるが、ここでその方程式を復習し、上記の量を計算してみると、

	r	s	h	μ
$A_k: x^{k+1} + y^2 + z^2$	$1/(k+1) + 1$	$(k-1)/(k+1)$	$k+1$	k
$D_k: x^{k+1} + xy^2 + z^2$	$1/(k+1)2 + 1$	$2(k-2)/2(k-1)$	$2(k-1)$	k
$E_6: x^4 + y^3 + z^2$	$1/2 + 1$	$10/12$	12	6
$E_7: x^3y + y^3 + z^2$	$1/8 + 1$	$16/18$	18	7

$$E_8: x^5 + y^3 + z^2 \quad 1/30 + 1, \quad 28/30, \quad 30, \quad 8$$

さてここで上に出てきた $E, \hat{D}, A, D, E$, 等々の方程式はいずれも、quasi-homogeneous である事に着目しよう。(quasi-homogeneous 性質は intrinsic な特徴づけを持つ、定義等詳細は [4] 参照)

すると次の結果を得る。

定理 $(X, x) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ の quasi-homog. isolate hypersurface singularity の芽とする時、次の 4 条件は同値

i) (X, x) の local deformation はすべて又 quasi-homog. となる。

ii) $0 \leq S(X) \leq 1$

iii) $r(X) \geq \frac{n-1}{2}$

($\Leftrightarrow h(X) > 0$)

iv) (X, x) は $A_k, D_k, E_6, E_7, E_8, \hat{E}_6, \hat{E}_7$, 又は $\tilde{E}_8$ の方程式に non-degenerate な 2 次型式を加えた方程式で定まる。(例へば $x^{k+1} + y^2 + z^2 + x_4^2 + \dots + x_{n-2}^2 = 0$ 等)

更に精密には、上記の $\text{typ. } P$ の特異点 $\hat{P}$ の特異点 $\hat{Q}$ に deform できる必要充分条件は P に対応する Dynkin 図型が Q に対応する Dynkin 図型を含む事である事が示せる。

さて上記の量 r, s , 又は h の値をみても 予感される事として単純楕円型特異点は 何らかの意味で、有理 2 重点の境界に位置しているのではないかという事が次の Prop. によっても裏づけられる。

Prop. i) (X, x) を hypersurface 孤立特異点の germ とする。もし (X, x) が有理 2 重点でないなら、 (X, x) の local deformation には

$\tilde{E}_6, \tilde{E}_7$, 又は $\tilde{E}_8$ のいずれかが現れる。

ii) (X, x) を 埋め込み次元が 2 以上の完全交差、孤立特異点の芽とすると、 (X, x) の local deformation に 次の $(\tilde{D}_4)$ が現れる。

$$\begin{cases} x_1^2 + \dots + x_m^2 = 0 \\ ax_1^2 + \dots + ax_m^2 = 0 \end{cases} \quad a_i \neq a_j \quad (i \neq j)$$

さて (X, x) を方程式系 $f_1 = \dots = f_r = 0$ に分けてなへうれた完全交差孤立特異点とすると $f_1 = \varepsilon_1, \dots, f_r = \varepsilon_r$ は、適当に小さく定数 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ をとれば smooth でその丁度中間次元の所に homology を持ち、intersection form が定まる。又方程式 $f_1, \dots, f_r$ を deform し、定数 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ を動かす事により、その homology の monodromy が現れるが、方程式の versal deformation と定数 ε を可能な限り動かして得る monodromy の全体を全モノドロミー群と呼ぶ事にする。

すると単純楕円型特異点については、intersection form は固有値 0 を持ち、定値とはならず、又全モノドロミー群が無限群となる。

1 次有理 2 重点について、intersection form は Cartan-Hilling form と一致し、全モノドロミー群 Weyl 群と同型になる事が Brieskorn ([2]) により知られている。従って上記の Prop とあわせる事により次の結果が分る。(この結果は部分的には Lamotke にも知られていた。)

定理 (X, x) を偶数次元の完全交差孤立特異点の芽とする。

以下の3条件は互に同値である。

- i) (X, x) の vanishing cycle の intersection form は 定値と与る。
- ii) (X, x) の total monodromy group は 有限 群と与る。
- iii) (X, x) は 有理2重点 の方程式に非退化2次型式を加えて得られる方程式で定義された hypersurface isol. singularityである。

[1] V.I. Arnold: Remark on the method of stable phase . . . ,
Uspekhi Mat. Nauk. XXVIII, 5 (1973) p 17-45.

[2] E. Brieskorn: Singular elements of semi-simple algebraic groups,
Proc. of the Int'l Cong. of Math., Nice, 1970.

[3] K. Kodaira: On compact analytic surface II, Ann. of Math.
77(3) (1963) 563-626.

[4] K. Saito: Einfach Elliptische Singularitäten, Göttingen 1973.