

C^* -環の拡大について

山形大 理 富山 淳

所謂 BDF-理論 (Brown-Douglas-Fillmore) における $C(X)$ のコンパクト作用素の環 $C(H)$ による拡大全体の同値類 $\text{Ext}(X)$ が群になることの [4] の証明は、 X が平面の部分集合の場合でも非常に複雑なものであったが、Arveson [2] は positive map の lifting を利用することにより、非常に簡潔な証明を与えている。そしてそれは BDF の最近の論文 [5] における $\text{Ext}(X)$ の再構成にも使われている。しかし $\text{Ext}(X)$ は C^* -環を非可換にするのではなく、 C^* -環で基本的なものには positive map ではなく、completely positive map であることが明らかになってくるに及んで、Choi & Effros [6] は nuclear map 又は可分な nuclear C^* -環からの C^* -商環への completely positive map は常に元の C^* -環への completely positive map に昇格できることが出来ることを示した。一方 BDF-理論の具体的な基礎の一つとなつた Weyl-von Neumann の定理は Voiculescu [8] によつて

取の C^* -環に於ける形にまで拡張された。この結果の一つとして $\text{Ext}(A)$ は常に単位元をもつ semigroup であることが示された。

従つて [2] の証明と同様にして [6] による A が可分な nuclear 環ならば $\text{Ext}(A)$ は群になることが判明したわけであるが Arveson は更に [3] においてそれを総合し、統一的な方法で [6] 及び [8] の結果の別証を与え、合せて *lifting* と $\text{Ext}(A)$ の群構造との関係を明確にしている。又 completely positive map の *lifting* の限界については Anderson [1] は $\text{Ext}(A)$ は一般には可分な C^* -環に於いても群になることを示している。本稿はこれらの結果の紹介を主にしている。

§1. $\text{Ext}(A)$ の導入。以下 H は可分なヒルベルト空間とし、 H の上の有界線型作用素の全体を $\mathcal{L}(H)$, コンパクト作用素の全体を $\mathcal{K}(H)$, Calkin 環 $\mathcal{L}(H)/\mathcal{K}(H)$ を $\mathcal{A}(H)$ とかくことにする。 C^* -環 A (以下可分な場合のみとり扱うので、このことを特に述べない限り、このようにする) は単位元をもつ場合—ユニタリな C^* -環—のみを扱うことにする。 A から $\mathcal{A}(H)$ へのユニタリな (1 対 1 に写す) 写 $\ast$ -isomorphism τ を A の拡大と見る。二つの拡大

$$\tau_1: A \longrightarrow \mathcal{A}(H_1), \quad \tau_2: A \longrightarrow \mathcal{A}(H_2)$$

が同値であることと、 H_1 から H_2 へのユニタリ作用素が存在して

これに於て ν を起した $\mathcal{A}(H_1)$, $\mathcal{A}(H_2)$ 向の $*$ -同型 θ とすると $\tau_2 = \theta \circ \tau_1$ とする τ とを定義する. $[\tau_1], [\tau_2]$ を $\text{Ext}(A)$ の元とする.

$$\tau_1: A \longrightarrow \mathcal{A}(H_1) \quad \tau_2: A \longrightarrow \mathcal{A}(H_2)$$

$$\text{このとき} \quad \tau_1 + \tau_2: A \longrightarrow \mathcal{A}(H_1 \oplus H_2) \quad \text{を}$$

$$(\tau_1 + \tau_2)(x) = \tau_1(x) \oplus \tau_2(x) \in \mathcal{A}(H_1) \oplus \mathcal{A}(H_2) \subset \mathcal{A}(H_1 \oplus H_2)$$

とし, $[\tau_1] + [\tau_2] = [\tau_1 + \tau_2]$ と定義すると, これは代表元 τ_1, τ_2 のとり方によらず *well-defined* であるのでこれを $\text{Ext}(A)$ での和と呼ぶ. ここで自然の演算において 0 元の役割を果たす拡大は何かということに着目するが, 候補としては次の *trivial extension* が考えられる. 即ち拡大 $\tau: A \longrightarrow \mathcal{A}(H)$ が *trivial* であるとは

$$\exists \sigma: A \longrightarrow \mathcal{L}(H) \quad \text{ユニタリな} * \text{-準同型};$$

$$\tau = \dot{\sigma}$$

ここで $\tau = \dot{\sigma}$ は $\tau(x) = \dot{\sigma}(x)$ の意味で, 右辺は $\sigma(x)$ の $\mathcal{A}(H)$ での像をあらわす. 字像に於て τ の記号は本稿を通じて使ふことにする.

さて上の $\text{Ext}(A)$ の演算の導入により生ずる基本的な問題は次のことである.

1° Trivial extension が皆同値になるか?

2° 1° が成立する時上の同値類が実際に 0 元の役割を果たす

か？

3° $\text{Ext}(A)$ は上の演算で群になるか？

$\text{Ext}(A)$ については群構造から更に進んで γ が具体的な形で実現出来るか一番興味のある形になり、事実複素平面上の領域から起る可換 C^* 環の場合は γ が可能であるといふことが BDF-理論の重要な帰結の一つであつたのであるが本稿では γ までには入らな。

上の基本問題については 1°, 2° は Voiculescu [8] によつて常に成立つことが証明されたので $\text{Ext}(A)$ は常に単位元をもつ可換な群になるわけである。3° については Arveson [2] によつて、 $[\tau] \in \text{Ext}(A)$ が逆元をもつ場合が明らかにされ、 γ によつて BDF の上記の場合 $\text{Ext}(A)$ が群になることが非常に簡潔に証明出来ることが判明してゐたが最近 Anderson [1] は γ の形で群になる例を示している。尚 trivial extension の存在自体は A の任意の non-degenerate 表現 σ の multiplicity を高めて $\sigma(A)$ が non-zero なコンパクト作用素を含む γ によつておけば、 σ は trivial extension になっている。3° についての状況は次の定理に示される。

定理 1.1 拡大 $\tau: A \rightarrow \mathcal{A}(H)$ によつて $[\tau] \in \text{Ext}(A)$ で逆元をもつための必要十分条件は、 τ が $\mathcal{L}(H)$ へのユニタリを completely positive lifting をもつことである。

i.e. $\exists \sigma: A \longrightarrow \mathcal{L}(H)$ such that completely positive map,

$$\dot{\sigma} = \tau$$

証明. (1°, 2° が示すところとしてやる)

$\exists \sigma: A \longrightarrow \mathcal{L}(H)$, $\dot{\sigma} = \tau$ とする. Stinespring の結果から

$\exists \pi: A \longrightarrow K$ への表現, $H \subset K$,

$P: K \longrightarrow H$ への projection; $\sigma(a) = P\pi(a)|_H$

$K = H \oplus H^\perp$ として $\pi(a)$ の [] を

$$\pi(a) = \begin{pmatrix} \sigma(a) & k_a \\ l_a & \sigma'(a) \end{pmatrix} \quad \text{とすると}$$

$\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ から

$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b) + k_a l_b$ $\therefore k_a l_b$ はコンパクト
 一方 $k_{a^*} = l_a^*$ から, k_a, l_b は K 上のコンパクト
 作用素に落ちる

$\sigma': A \longrightarrow \mathcal{A}(H^\perp)$ は *-準同型.

そしてつくりかから $\tau \oplus \sigma' = \dot{\pi}$.

よって trivial 拡大で, ところで $\tau_1 = \sigma' \oplus \tau_0$, とおくと
 τ は A の拡大で, 2° により $\tau_0 + \tau_1 \cong \dot{\pi}$, i.e. $[\tau]$ は逆元
 かつ.

次に $[\tau]$ が逆元とすると, 拡大 $\tau_1: A \longrightarrow \mathcal{A}(H_1)$ と
 A の $H_0 \oplus H_1$ 上への表現 σ があつて, $\tau + \tau_1 = \dot{\sigma}$

そこで

$$\sigma(a) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(a) & \sigma_{12}(a) \\ \sigma_{21}(a) & \sigma_{22}(a) \end{pmatrix} \quad \text{とおけば}$$

$\sigma_{11} = \tau$ として σ_{11} は τ の γ -タリを completely positive lifting である。

§2. $\text{Ext}(A)$ の群構造。ヒルベルト空間上の作用素の分類とその立場からこの主張の意味は, normal な作用素の compact perturbation を含む γ -タリ-同値類は, その essential spectrum で与えられるという Weyl-von Neumann-Berg の定理の一例であった。そしてこの主張も可換 C^* 環の段階では古典的な作用素の (compact) perturbation の結果を土台にしている。これを非可換の C^* 環に拡張するたうに以下の概念を導入する。 A の表現 π, σ について π と σ が近似的同値 $\pi \sim \sigma$ という2つを次のように定義する

$\exists u_n: H_\pi \rightarrow H_\sigma$ γ -タリ作用素

(i) $u_n \pi(a) u_n^* - \sigma(a)$ はコンパクト作用素

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n \pi(a) u_n^* - \sigma(a)\| = 0 \quad \forall a \in A.$

本節の議論の出発点となるのは次の Arveson-Voiculescu の結果であるが, この完全な証明は本稿の枠を超えているので [3] にゆずることにする。

定理 2.1 A は H 上のユニタリ可分 C^* -環 とする. $\varphi \in A$ から $\mathcal{L}(K)$ へのユニタリ可分 completely positive map であつて $A \cap \mathcal{L}C(H)$ 上で 0 に収束するものとすると、 K から H への isometry の列 $\{v_n\}$ が次のように存在する.

$$(i) \varphi(a) - v_n^* a v_n \text{ はコンパクト} \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi(a) - v_n^* a v_n\| = 0.$$

これをもちよると、 φ が更に A の表現にちつていふときには $(\pi$ とかく) 上の $\{v_n\}$ は $v_n \pi(a) - a v_n$ がコンパクト作用素になるという性質をもっていることがわかる. $p_n = v_n v_n^*$ とし、 $\varphi_n(a) = (1 - p_n) a | (1 - p_n) H$ とおく. かくすると $\{p_n\}$ はユニタリ可分 completely positive map で更に

$$\varphi_n(ab) - \varphi_n(a) \varphi_n(b) \in \mathcal{L}C(H)$$

である. $u_n: p_n^\perp H \oplus K \rightarrow H$ は $p_n^\perp H$ 上で 1, K 上で v_n とおいたユニタリ作用素とし、 $p_n^\perp H \oplus K \rightarrow K$ とする projection を q_n^K とすると

$$a u_n = a p_n^\perp + a v_n q_n^K$$

$$u_n(\varphi_n(a) \oplus \pi(a)) = \varphi_n(a) p_n^\perp + v_n \pi(a) q_n^K \quad \text{から}$$

$$a u_n - u_n(\varphi_n(a) \oplus \pi(a)) = p_n a p_n^\perp + (a v_n - v_n \pi(a)) q_n^K$$

ここで p_n は表現 π のとき A の元を essential に reduce するから上の右辺はコンパクト作用素になり、又右辺の評価式より、 A の任意の有限個の元の集合 S と、 $\varepsilon > 0$ についても十分

大それたことば

$$\max_{a \in A} \|au_n - u_n(\varphi_n(a) \oplus \pi(a))\| \leq \varepsilon \quad \text{が言える.}$$

以上を ε に 2° に対する解答として

定理 2.2. σ を A の任意の拡大, $\tau = \dot{f}$ を trivial を拡大とすると, $\sigma + \tau$ と σ は同値である.

証明. $\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{L}(H) \mid \dot{x} \in \sigma(A)\}$ とし, $\mathcal{A}$ の表現 π を $\pi(x) = \rho \circ \sigma^{-1}(\dot{x})$ とおくと, π は定理 2.1 の条件を満たす. よって π' を π の infinite copy とすると前定理から, $\mathcal{A}$ の元の有限集合の集合 $\mathcal{F}$ と $\varepsilon > 0$ によって

$\exists \varphi: \text{essentially reducing}$ を部分空間 H_φ による $\mathcal{A}$ の compressing map, $u: H_\varphi \oplus H_\pi \longrightarrow H$ ユニタリ-作用素

$$(i) \quad u(\varphi(a) \oplus \pi(a)) - au \quad \text{はコンパクト}$$

$$(ii) \quad \|u(\varphi(a) \oplus \pi(a)) - au\| < \varepsilon/2 \quad \forall a \in \mathcal{A}$$

とある. これを $\text{id} \underset{\varepsilon/2}{\sim} \varphi \oplus \pi'$ とかくことにすると, この意味で $(\varphi \oplus \pi') \oplus \pi \underset{\varepsilon/2}{\sim} \text{id} \oplus \pi$

一方 $\varphi \oplus \pi'$ と $(\varphi \oplus \pi') \oplus \pi$ はユニタリ-同値であるから $\varphi \oplus \pi' \underset{\varepsilon/2}{\sim} \text{id} \oplus \pi$. よって $\text{id} \oplus \pi \underset{\varepsilon}{\sim} \text{id}$ とおける. これはこの節のはじめの近似同値の記号では $\text{id} \oplus \pi \underset{\alpha}{\sim} \text{id}$ を意味する. 従って $\sigma \oplus \tau \sim \sigma$ である.

上の証明からわかるように得られる結果は compact

perturbation の評価を含んだもので、その結果は 2° の主張の 1° の定理より、より詳しく述べているわけである。

これは次の 1° の主張に付いての議論でも同じことが言える。

H 上のユニタリな C^* -環 A の表現 π に付いて (表現空間 K)

$K_e = [(\pi(A) \cap \mathcal{L}(K))K]$ は $\pi(A)$ の essential subspace,

又 $K = K_e \oplus K_e^\perp$ による π の分解 $\pi = \pi_e \oplus \pi'$

において π_e は π の essential part と呼ぶ。次のことが基本的である。

定理 2.3. $\pi, \sigma \in A$ の non-degenerate な表現とすると

$$\pi \underset{a}{\sim} \sigma \iff \ker \pi = \ker \sigma, \quad \ker \dot{\pi} = \ker \dot{\sigma}$$

$$\pi_e \cong \sigma_e$$

証明の概略 $\pi \underset{a}{\sim} \sigma$ であるとする H_π より H_σ へのユニタリ作用素の列 $\{u_n\}$ とし、 $\{u_n\}$ の弱位相での極限の一つを u_∞ とする。 $\{u_n\}$ の部分列を取って $\{u_n\}$ 自体を u_∞ に収束するとしても差支えない。

$\forall a \in \ker \dot{\pi} \Rightarrow \pi(a)$ はコンパクト かつ $u_n \pi(a) u_n^*$ の極限の $u_\infty \pi(a) u_\infty^* = \sigma(a)$ もコンパクト i.e. $\dot{\sigma}(a) = 0$.

かつ $\ker \dot{\pi} \subset \ker \dot{\sigma}$ と右の対称性から $\ker \dot{\pi} = \ker \dot{\sigma}$

次に $p_\pi, p_\sigma \in \pi(A)$ の essential subspace への projection とする。

すると $u_\infty p_\pi u_\infty^* = p_\sigma$. したがって $w = p_\pi u_\infty^* | (H_\sigma)_e$ とおくと

w は $(H_\sigma)_e$ から $(H_\pi)_e$ への isometry であり、かつ $\sigma_e(\ker \dot{\sigma})$

と $\pi_e(\ker \pi)$ の subrepresentation と同値関係をとる。こ
れから $\sigma_e < \pi_e$ となり、逆も出るから $\sigma_e \cong \pi_e$ となる。

逆は $\rho: \pi(a) \rightarrow \sigma'(a)$ とするところから ρ は ρ well
defined で、 $\pi(a)$ を ρ の核とすると $a \in \ker \pi = \ker \sigma'$
から $\sigma'(a) = 0$ となるから、 $\sigma(\pi(a) \cap \mathcal{LC}(H_\pi)) = 0$ となる。
従って定理 2.2 の証明と同様に $\text{id} \oplus \rho \underset{a}{\sim} \text{id}$ 。即ち

$$\pi \oplus \sigma' \underset{a}{\sim} \pi. \quad \text{同様に } \sigma \oplus \pi' \underset{a}{\sim} \sigma$$

従って $\pi_e \cong \sigma_e$ から

$$\begin{aligned} \pi \underset{a}{\sim} \pi \oplus \sigma' &= (\pi_e \oplus \pi') \oplus \sigma' \cong (\sigma_e \oplus \sigma') \oplus \pi' \\ &\underset{a}{\sim} \sigma \oplus \pi' \underset{a}{\sim} \sigma \end{aligned} \quad \text{証明).}$$

例. Trivial extension は同値である。

実際このときは、 $\tau_1 = \dot{p}_1$ $\tau_2 = \dot{p}_2$ とすると

$$\ker p_1 = \ker \dot{p}_1 = \ker p_2 = \ker \dot{p}_2 = \{0\}$$

$$(p_1)_e = (p_2)_e = 0 \quad \text{の状態であるから明らかに}$$

$$p_1 \underset{a}{\sim} p_2 \quad \text{よって } \tau_1 \sim \tau_2.$$

§3. $\text{Ext}(A)$ についての J. Anderson の反例

$\text{Ext}(A)$ が群になることは限らないうと Anderson の反例は §1
で述べたことを考えると、completely positive map の lifting に
ついての反例も与えておくことにする。彼の議論の基になつ

2" の 3 つは 次の事実である。

F_2 は 2 つの生成元 s_1, s_2 を持つ自由群とし、その中で

$$S = \{s_i^k t \mid k \neq 0\} \quad \text{とおく}$$

$F_2 = S \cup S^*$, かつ $S, s_2 S, s_2^2 S$ は互に素集合である。

3. $e \in \ell^2(F_2)$ において S で生成された部分空間 $[S]$ への projection とする。 $u_1, u_2 \in s_1, s_2$ の正則表現とすると、一般に $u_i e u_i^* = \text{proj}[tS]$ となることから

$$e + u_1 e u_1^* \geq 1, \quad e + u_2 e u_2^* + u_2^2 e (u_2^2)^* \leq 1$$

N は injective な finite von Neumann 環とし、 φ は群環 $C_r^*(F_2)$ から N の φ への (右 = 左) $*$ -準同型とする。今 $\hat{\varphi}$ は φ の $C^*(C_r^*(F_2), e)$ への completely positive な拡大とすると、 u_i は $\hat{\varphi}$ の multiplicative domain に入っているから (choi [4])

$$\hat{\varphi}(e) + \varphi(u_1) \hat{\varphi}(e) \varphi(u_1)^* \geq 1,$$

$$\hat{\varphi}(e) + \varphi(u_2) \hat{\varphi}(e) \varphi(u_2)^* + \varphi(u_2^2) \hat{\varphi}(e) \varphi(u_2^2)^* \leq 1$$

よって $\tau \in N$ の trace とすると

$$2\tau(\hat{\varphi}(e)) \geq 1 \geq 3\tau(\hat{\varphi}(e))$$

とちって矛盾が出るので、上の条件で φ の lift は存在しない。これは N が injective でなく、ある injective な von Neumann 環の商環になっている時は、上の条件 φ の lifting は不可能であることが示されている。

H を可分ヒルベルト空間とし $\{p_n\}$ を直交する n 次元部分空間への projection とする. $\sum_n p_n = 1$ とする. $M \in p_n \mathcal{L}(H) p_n$ の直和とし, τ_n を $p_n \mathcal{L}(H) p_n$ 上の trace とし 自然数上の自由 ultrafilter ω をとると, $\mathcal{L}(H)$ 上の state

$$f(a) = \lim_{\omega} \tau_n(p_n a p_n)$$

が定義出来る. f は M -central な state である.

$$J_\omega = \{a \in M \mid f(a^*a) = 0\} \quad \text{と置く.}$$

$N = M/J_\omega$ が II_1 型の factor に表現出来ることはよく知られているが更に [10] により $C^*(F_2)$ は N の中に埋めこむことが出来る. したがって M での逆像は生成元を u, v とすると F_2 の各語 $w(u, v) = (w(u_n, v_n))$ に対して $\{\tau_n(w(u_n, v_n))\}$ が有限 ϵ を除いて 0 に近くなることを出来る. 従って $C^*(u, v)$ の任意の元 $a = (a_n)$ に対して $\{\tau_n(a_n)\}$ は収束する. $J = C^*(u, v) \cap J_\omega$ とおくと次のことが成り立つ

補題 3.1 M の projection p で $f(p) \geq \frac{1}{2}$, $pJ \subset \mathcal{LC}(H)$ とするものが存在する.

証明の idea は J の中の strictly positive な元 $a = (a_n)$ に対し a_n の spectrum をしるべし

$$f(p) \geq \frac{1}{2}, \quad pa \in \mathcal{LC}(H)$$

とすることが出来る projection を求めるわけである.

f による $\mathcal{L}(H)$ の GNS-表現を π_f とすると、 π_f の kernel は $\mathcal{L}(H)$ であるから、 $\pi_f(\mathcal{L}(H))$ と $\mathcal{A}(H)$ を同一視して $\mathcal{A}(H) \subset \mathcal{L}(H_f)$ と考えておく。 $\dot{f} = f \circ \pi_f^{-1}$ とおくと $\dot{f}$ は $\mathcal{A}(H)$ 上の $\dot{M}$ -central state である。 $\dot{f}$ によって補題の p を $\dot{f}$ とし、 $\mathcal{A}(H)$ の部分環 $C^*(\dot{u}, \dot{v}, \dot{p})$ を考える。 Andersen が示していることは次のことである。

" $C^*(\dot{u}, \dot{v}, \dot{p})$ の $\mathcal{A}(H)$ への inclusion map は $\mathcal{L}(H)$ に completely positive map として持ち上げることができる" といふことは出まかい。
証明. $\dot{g}^\perp = \text{proj}[\dot{J}H_f]$ とおくと、 $\dot{g}$ は $C^*(\dot{u}, \dot{v})$ を reduce するから、 $\alpha \in C^*(u, v) \longrightarrow \dot{\alpha}\dot{g} \in \mathcal{L}(H_f)$ は $*$ -準同型でその kernel の $\dot{J}$ に $\dot{J}$ を含む。 $C_r^*(F_2) \cong C^*(u, v)/\dot{J}$ は単純であるから、上の対応は $C_r^*(F_2)$ から $\{C^*(\dot{u}, \dot{v})|_{\dot{J}H_f}\}$ 間の $*$ -同型 φ を与える。 $\mathcal{L}(H_f)$ の injectivity から φ の $C^*(C_r^*(F_2), e)$ への completely positive 持ち上げ χ をし、 $d = \chi(e)$, $v_i = \chi(u_i) = \varphi(u_i)$ とおくと、この持ち上げは $\dot{J}$ の元 $\dot{u}_i$ によって $\mathcal{L}(H_f)$ で

$$d + v_1 d v_1^* \geq \dot{g}, \quad d + v_2 d v_2^* + v_2^2 d v_2^{2*} \leq \dot{g}$$

$C^*(\dot{u}, \dot{v})$ の元 w_i を $w_i \dot{g} = v_i$ とおき、 w_i は $\dot{g}$ と可換で $d \leq \dot{g}$ であるから上式は

$$d + w_1 d w_1^* \geq \dot{g}, \quad d + w_2 d w_2^* + w_2^2 d w_2^{2*} \leq \dot{g}.$$

今 inclusion map ι が $\mathcal{L}(H)$ に持ち上げられると仮定し、 $\dot{f}$ を p とおくと、 p は $C^*(\dot{u}, \dot{v}, \dot{p}, \dot{g}, d)$ から $\mathcal{L}(H)$ への completely

positive map ϕ に拡大出来る。つまり

$$\dot{\phi} : C^*(\dot{u}, \dot{v}, \dot{p}, \dot{q}, d) \longrightarrow \mathcal{L}(H) \longrightarrow \mathcal{A}(H)$$

は $\dot{p} = \dot{p}$ の拡大である。そして w_i は $\dot{\phi}$ の multiplicative domain に入っているから ([] 参照)

$$\dot{\phi}(d) + w_1 \dot{\phi}(d) w_1^* \geq \dot{\phi}(\dot{q})$$

$$\dot{\phi}(d) + w_2 \dot{\phi}(d) w_2^* + w_2^2 \dot{\phi}(d) w_2^{2*} \leq \dot{\phi}(\dot{q})$$

よって f の値は

$$2 \dot{f}(\dot{\phi}(d)) \geq \dot{f}(\dot{\phi}(\dot{q})) \geq 3 \dot{f}(\dot{\phi}(d)) \quad \text{となり}$$

$\dot{f}(\dot{\phi}(d)) = 0$ 。しかし補題から $\dot{p} \leq \dot{q}$ であるから $\dot{p} \leq \dot{\phi}(\dot{q})$ で

$$\dot{f}(\dot{\phi}(\dot{q})) \geq \dot{f}(\dot{p}) = f(p) \geq \frac{1}{2}$$

となり $\dot{f}(\dot{\phi}(\dot{q})) = 0$ と矛盾する。証明了。

§ 4. その他. Voiculescu [8] は § 2 の議論と関連して Weyl-von Neumann-Berg の定理の直接的 C^* 環への拡張を定式化し証明している。§ 3 の結果は可分な C^* 環より $\mathcal{A}(H) = \mathcal{L}(H)/\mathcal{I}_C(H)$ への completely positive map で $\mathcal{L}(H)$ への completely positive map への持ち上げが不可能な例であつたが肯定的な場合としては、 C^* 環が nuclear な時には (domain でも image でも) 持ち上げが可能であるという Choi-Effros の結果 [6] がある。これも Arveson [3] にあっては写像間の距離を導入することにより非常に見通しのよい明快な証明が与えられている。

文献

1. J. Andersen, A C^* -algebra A for which $\text{Ext}(A)$ is not a group, preprint.
2. W. Arveson, A note on essentially normal operators, Proc. Royal Irish Acad., sect. A 74 (1974), 143-146
3. ———, Notes on extensions of C^* -algebras, Duke Math. J. 44 (1977), 329-356
4. L. G. Brown, R. G. Douglas, and P. A. Fillmore, Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C^* -algebras, Springer Lecture Notes 345 (1973), 58-128
5. ———, Extensions of C^* -algebras and K -homology, Ann. Math. 105 (1977), 265-324
6. M. D. Choi and E. G. Effros, The completely positive lifting problem, Ann. of Math. 104 (1976), 585-609
7. ———, Lifting problems and the cohomology of C^* -algebras, preprint.
8. D. Voiculescu, A non-commutative Weyl-von Neumann theorem, Rev. Roumaine, pures et appl., 21 (1976), 97-113.
9. M. D. Choi, A Schwarz inequality for positive linear maps on C^* -algebras, Illinois J. Math., 18 (1974), 565-574

10. S. Wassermann, On tensor products of certain group C^* -algebras, J. Funct. Anal., 23 (1976), 239-254