

Dehn surgery on symmetric knots

神大・理 古沢 智
阪市大・理 作間 誠

S^3 の中に knot が与えられると, その knot に沿って S^3 を surgery することによつて, closed 3-manifold が得られる。この時、次の定義がなされる。([1] 参照)

定義 knot K が property P を持つとは、次が成立する時をいう。“任意の整数 q ($\neq 0$) に対して, $\pi_1(M(K; \frac{1}{q})) \neq 1$ ”
ただし, $M(K; \frac{1}{q})$ は, S^3 を K に沿つて係数 $\frac{1}{q}$ の surgery を行なうことによつて得られる 3-manifold とする。

現在までに多くの type の knots が property P を持つことが証明されているが, ここでは symmetry を持つ knots, 特に periodic knots を扱う。

定義 knot K が period n の periodic knot であるとは、次の条件を満たす homeomorphism $h: S^3 \rightarrow S^3$ が存在する時をいう。

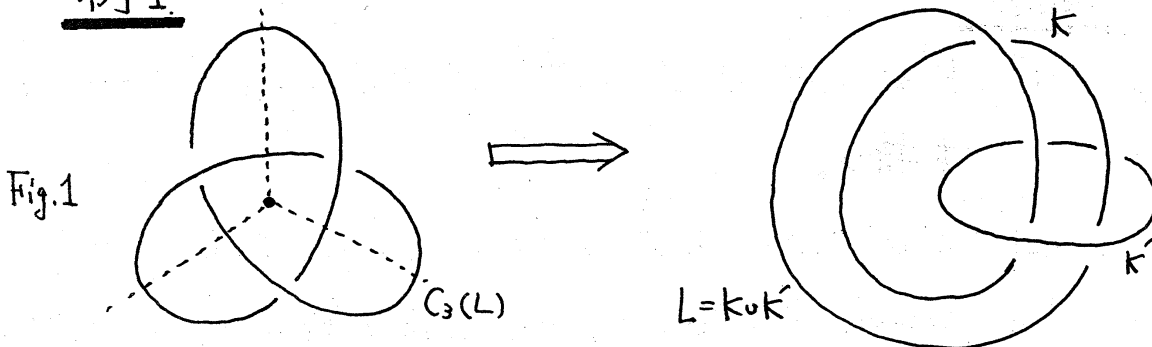
(i) $h(K) = K$

(ii) $h^n = \text{identity}$

(iii) $\text{Fix } h \cap K = \emptyset$ ($\text{Fix } h$ は h の固定点集合)

次に periodic knots の構成を考へる。 $L = K \cup K'$ を S^3 内の 2-component link とする。ただし K' は trivial knot であり、 $\lambda = \text{lk}(K:K') \neq 0$ とする。 λ に対し正の整数 n ($n \geq 2$) を λ と互いに素にとる。 K' は trivial knot であるから、 n -fold cyclic branched covering space $Z_n(K')$ of S^3 , branched along K' は、再び S^3 になる。 K の $Z_n(K') \cong S^3$ への lift を $C_n(L)$ と表わす。この時、 $C_n(L)$ は period n の periodic knot となり、逆にすべての periodic knots は、この方法で得られる。

例 1.



$M(K; \frac{1}{\lambda})$ を構成する。この時、 $K \subset S^3 - N(K)$ に対応する $M(K; \frac{1}{\lambda})$ 内の knot を $W_\lambda(L)$ と表わす。すなわち、 K' を $M(K; \frac{1}{\lambda})$ において見た knot である。

補題 1. $\lambda \neq 0$ でない整数とすると、 $M(C_n(L); \frac{1}{\lambda})$

は、 $M(K; \frac{1}{n\lambda})$ の n -fold cyclic branched covering space

branched along $Wg(L)$ である。

(《証明の概略》) $C_n(L)$ の補空間から K の補空間へは, $C_n(L)$ の構成方法から covering projection がある。 $M(C_n(L) : \frac{1}{g})$ において埋め込んだ solid torus には, $C_n(L)$ に associate して存在する periodic homeomorphism から induce される periodic homeomorphism が存在する。この homeomorphism による orbit space は再び solid torus になり, この solid torus が K の補空間 $= S^3 - \dot{N}(K)$ に埋め込まれる。以上の, 補空間の間の covering projection と, solid torus の間の covering projection を合わせればよい。□

補題 1 から次の補題 2 が得られる。

補題 2.

- (1) K が property P を持てば, $C_n(L)$ も property P を持つ。
- (2) K が trivial knot とする。このとき $C_n(L)$ が property P を持つことと, 任意の整数 g ($\neq 0$) に対して, $Wg(L)$ が non-trivial knot であることは, 同値である。

(《証明の概略》) (1) : covering projection が induce する homomorphism $\pi_1(M(C_n(L) : \frac{1}{g})) \longrightarrow \pi_1(M(K : \frac{1}{ng}))$ は, onto であることから成立する。(2) : $M(K : \frac{1}{ng})$

は, S^3 であるから, Branched covering theorem を用いる。
 ([7]) $\square$

例2 例1で trefoil $C_3(L)$ を構成した。 $C_3(L)$ を
 係数 $\frac{1}{8}$ の surgery とし, covering projection $M(C_3(L); \frac{1}{8})$
 $\longrightarrow M(K; \frac{1}{38})$ が存在する。このとき K' は,
 $W_{38}(L)$ と書かれる。 $W_{38}(L)$ と K を入れかえ, K に沿
 って (-38) full twists とけば, knot $W_{38}(L)$ は S^3 の中
 の torus knot になる。 $8 \neq 0$ であるから non-trivial knot
 であるから, 補題 2(2) により, trefoil $C_3(L)$ は, property
 P を持つ。

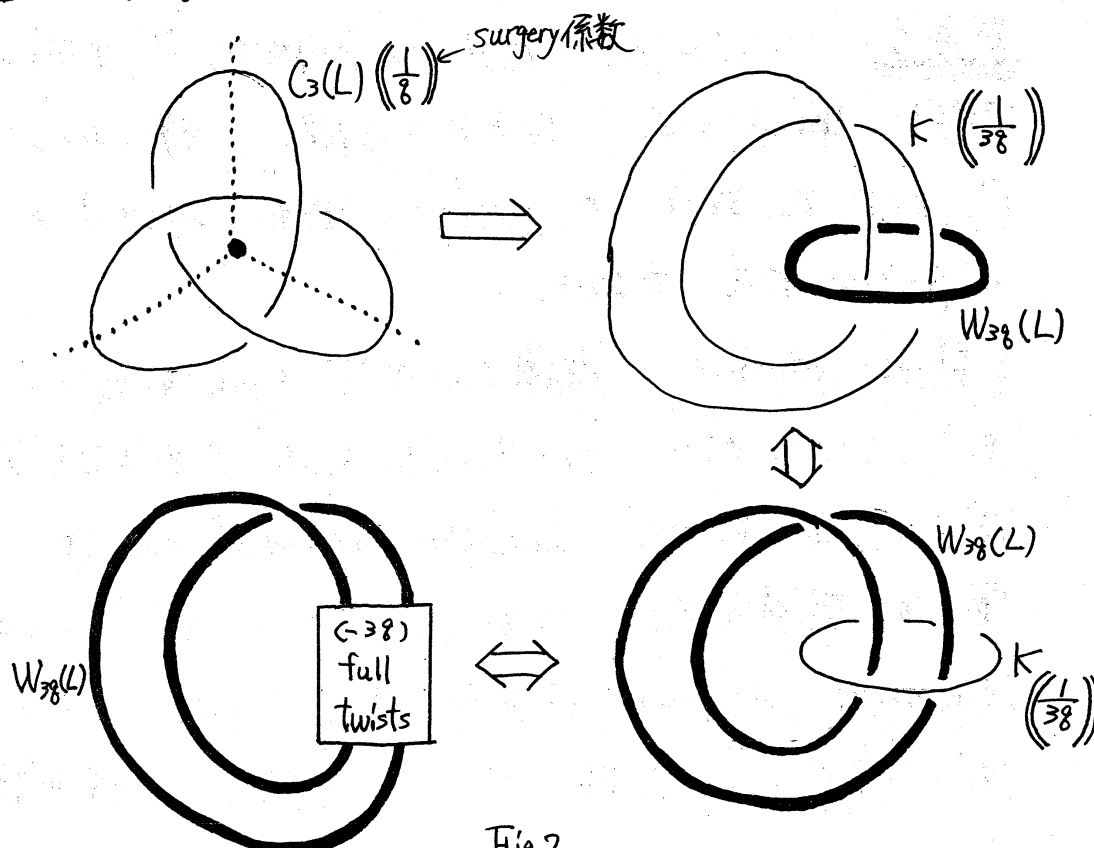


Fig 2.

次に $L = K \cup K'$ とし、 $\mathbb{R}^3$ の link を考える。この link を $L(r_1, r_2, r_3)$ と表す。

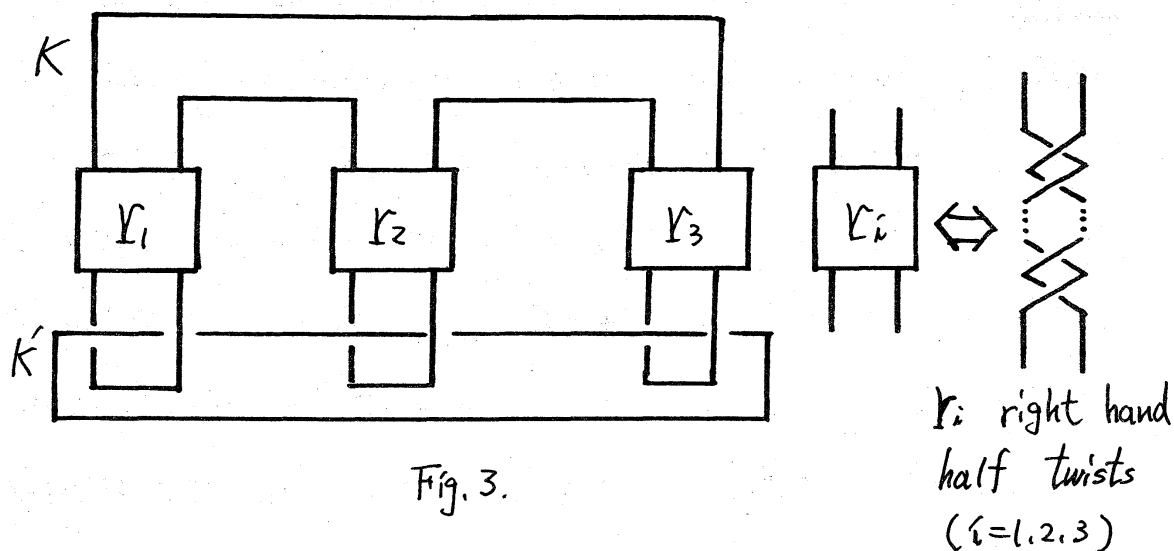


Fig. 3.

定理 1 $C_n(L(r_1, r_2, r_3))$ は property P を持つ。

ただし trivial knot となるものを除く。特に $n=2$ の時 $C_2(L(r_1, r_2, r_3))$ は $(2r_1+1, 2r_2+1, 2r_3+1)$ の type の pretzel knot である。

(証明の概略) 補題 2(2) より, knot $Wng(L)$ が各 $\rho (\neq 0)$ に対して non-trivial knot であることを示せばよい。そのために Alexander polynomial $\Delta_{ng}(t)$ を計算する。計算方法は, まず $L = L(r_1, r_2, r_3) = K \cup K'$ の Alexander polynomial $\Delta(x, y)$ を, K と K' に次の Fig. 4 の様な disk を貼って, Cooper [2] の方法を計算する。

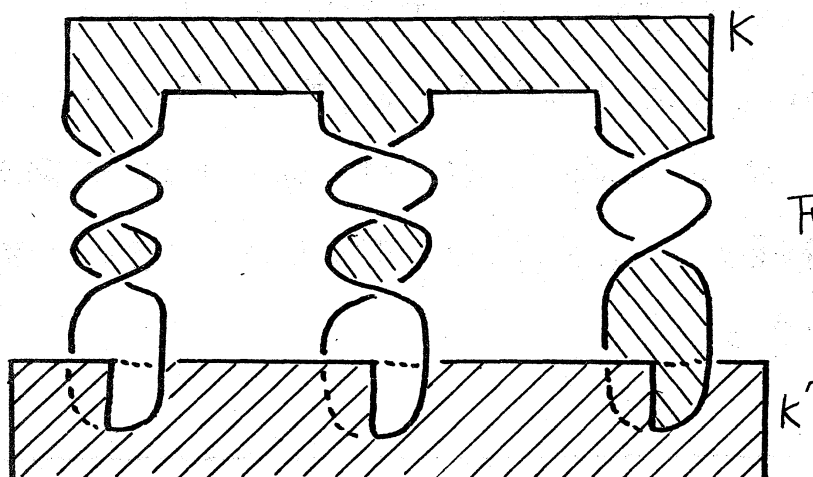


Fig. 4

次に $\Delta(x, y)$ から, $W_{ng}(L)$ の Alexander polynomial を求めるには, 次の補題を用いる。

補題 3. (Kidwell [4])

$\lambda = lk(K; K') \neq 0$ とする。 $W_K(L)$ の Alexander polynomial $\Delta_K(t)$ は, $L = K \cup K'$ の Alexander polynomial $\Delta(x, y)$ から, 次のようにして得られる。

$$\Delta_K(t) = \frac{(t-1) \Delta(t, t^{-\lambda})}{t^\lambda - 1}$$

上の公式を用いて $\Delta_{ng}(t)$ を求め, その degree を調べると, $\Delta_{ng}(t) \neq 0$ であることがわかる。 $\square$

次に p と q を互いに素な整数とし, $1 \leq q < 2p$, $\text{g.c.d.}(2p, q) = 1$ を満たすものとする。 2-bridge link $L(2p, q) = K \cup K'$ を考える。

定理2 $C_n(L(2p, q))$ は property P を持つ。

ただし, trivial knot となるものを除く。特に $n=2$ の時 $C_2(L(2p, q))$ は 2-bridge knot of type (p, q) である。

(証明の概略) $L(2p, q)$ は 2次の link の形に表わすことができる。

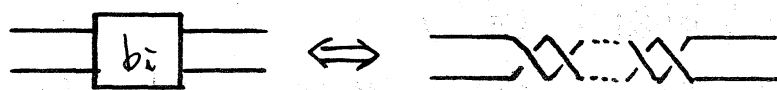
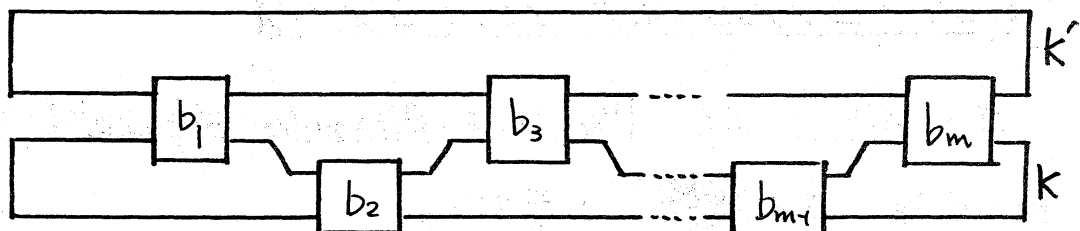


Fig. 5

b_i right hand full twists

ただし 各 b_i は次のようにして決まる整数である。

$$\frac{2p}{q} = 2b_1 + \frac{1}{-2b_2} + \frac{1}{2b_3} + \cdots + \frac{1}{-2b_{m-1}} + \frac{1}{2b_m}$$

(連分数展開)

$L(2p, q) = K \cup K'$ の Alexander polynomial $\Delta(x, y)$ を求めるために, 次の Fig. 6 の様な disk を K と K' に貼ることができる。これを用いて $\Delta(x, y)$ を計算し, 補題 3 を用いて $W_{\text{alg}}(L)$ の Alexander polynomial ε , 各 q ($\neq 0$) に対して求める。 $\square$

注 2-bridge knots の property P については, [8] によって証明されている。

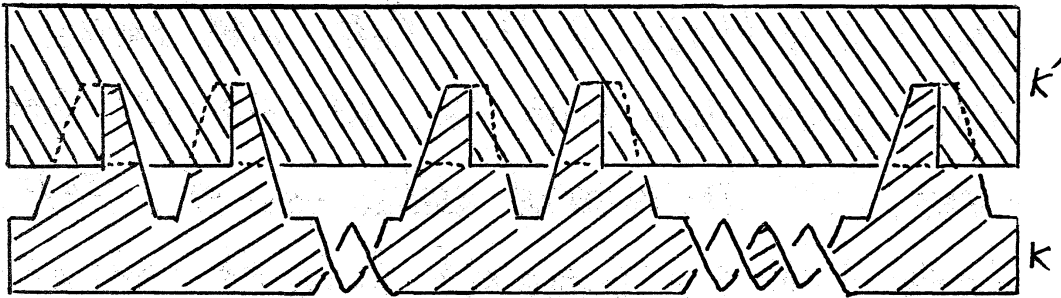


Fig. 6

最後に 9-crossings 以下の classical knots の property P について述べる。Riley [5] によって, かなり調べられたが, 次の knots については証明されていない。

8_{10} , 8_{17} , 9_n ($n=24, 29, 32, 33, 34, 38, 39, 41, 46, 47, 49$)

これらの中では 9_{41} , 9_{46} , 9_{47} , 9_{49} は periodic knots であり, 今までに用いた notation を用いれば,

$$9_{41} = C_2(L(-2, 1, 1)) \quad , \quad 9_{46} = C_3(L(18, 5))$$

$$9_{47} = C_3(L(16, 3)) \quad , \quad 9_{49} = C_3(L(14, 3))$$

である。したがって, これらの knots は property P を持つ。

また, 9_{29} , 9_{34} , 9_{38} , 9_{39} は strongly invertible knots であり,

これらは [3] によって, さらに 8_{10} , 9_{24} も [3] によつて

property P を持つことが証明されている。残りの 8_{17} , 9_{32} ,

9_{33} は, まだ証明されていない。

References

- [1] Bing, R.H., Martin, J.M. : Cubes with knotted holes, Trans. Amer. Math. Sci. 155, 217-231 (1971)
- [2] Cooper, D. : The universal abelian cover of a link, London Math. Soc. Lecture Note Series 48, 51-66 (1979)
- [3] Furusawa, S., Sakuma, M. : Dehn surgery on symmetric knots, preprint.
- [4] Kidwell, M.E. : Relations between Alexander polynomial and summit power of a closed braid, to appear in Math. Semi. Notes, Kobe Univ.
- [5] Riley, R. : Knots with the parabolic Property P, Quart. J. Math. 25. 273-283 (1974)
- [6] Rolfsen, D. : Knots and links, Math. Lect. Series 7, Berkeley : Publish or Perish Inc. (1976)
- [7] The proof of the Smith Conjecture, Proc. of Conference at Columbia University, New York, 1979, in preparation
- [8] Takahashi, M. : Two bridge knots have Property P, Memoirs, A.M.S. 29, no. 239 (1981)