

defect d のいくつかの計算例

清水 達郎 (慶應義塾大学 総合政策学部)*

Tatsuro Shimizu
Faculty of Policy Management,
Keio University

1 Introduction

タイトルにある d は閉多様体 M とその基本群の非輪状な表現 ρ の組に対する不変量で, defect と呼ばれる. defect は Chern-Simons 摂動論を背景に持ち, その出自から, Reidemeister torsion と関連があることが期待される ([4], [5]). 実際にいくつかの場合でその関係が示されている:

- 多様体の次元が 3 次元かつ 1st Betti 数が 1 以上, さらに表現が可換なときは defect と Reidemeister torsion は本質的に一致する ([2],[3])
- defect は境界付き多様体に対しても拡張される. 拡張された defect と Reidemeister torsion の 3 次元多様体の torus に沿った切り貼りに関する振る舞いは本質的に一致する. ([1])

本稿では, defect と Reidemeister torsion の関係を調べるため, $S^1 \times Y$ の直積の形をした多様体について defect の計算方法を述べる. なお, ほぼ同様の議論で一般に $X \times Y$ の形の多様体について計算ができるが, 本稿では, $X = S^1$ の場合に, より具合性が高い証明を与える.

謝辞. RIMS 共同研究 (公開型)『変換群論の新しい展開』の世話人である 川上 智博先生, 田村 俊輔先生に感謝を申し上げます.

2 不変量 d

この章では defect d の定義を与える. より詳しくは [1] 等を参照.
まずは準備として, 局所係数チェインについて言葉を用意する.

2.1 局所係数チェイン

X を多様体, $\rho: \pi_1(X) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ を表現とする. V は有限次元線形空間. コンパクト k 次元多様体 N から X への連続写像 $c: N \rightarrow X$ と, N の基点 $b \in N$ が与えられ, 以下

*〒252-0882 神奈川県藤沢市遠藤 5322

e-mail: tshimizu@sfc.keio.ac.jp

本研究は科研費 (課題番号: 25K07016) の助成を受けたものである。

キーワード: Chern-Simons 摂動論, Reidemeister torsion

の (条件) を満たす $e \in V_{c(b)}$ がとれたとする:

(条件) 任意の $\gamma \in c_*(\pi_1(N)) \subset \pi_1(X)$ に対し $\rho(\gamma)(e) = e$.

このとき N を, b がひとつの頂点となるように適当に単体分割し, $c(b)$ に係数 e を与えれば, c は X の (特異) k チェインとなる. このチェインを単に $N \otimes e$ と表すことにする:

$$N \otimes e \in C_k(X; V_\rho).$$

たとえば N が可縮なときは上記 (条件) は自動的に満たされる.

2.2 defect d

M を閉多様体, $\rho: \pi_1(M) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ を有限次元線形表現とする. ただし V は有限次元線形空間. また, $\rho^* = {}^t\rho^{-1}: \pi_1(M) \rightarrow \mathrm{GL}(V^*)$ を ρ の双対表現とする. ρ は acyclic (非輪状) と仮定する. すなわち,

$$H_i(M; V_\rho) = 0, i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

このとき ρ^* も acyclic であることに注意する.

M の non-vanishing vector field $s \in \Gamma TM$ をひとつとる. ここで TM は M の接束で, ΓTM は $TM \rightarrow M$ の切断全体を表す. d は $(M, \rho; s)$ の三つ組みに対して定義される位相不変量で, $H_1(M; V_{\rho^*} \otimes V_\rho)$ に値をとる.

2.3 d の構成

Δ を対角線集合

$$M \times M \supset \Delta = \{(x, x) \mid x \in M\}$$

とする. Δ の $M \times M$ における法束 ν_Δ を以下の束同型 ι によって接束 TM と同一視する:

$$\iota: TM \xrightarrow{\cong} \nu_\Delta, (x, u) \mapsto ((x, x), (-u, u)).$$

ここで $x \in M, u \in T_x M$ である. よって TM の切断 s は ν_Δ の切断を与える.

d を定義するため, ホモロジー群の間の同型を 3 つ用意する:

同型 (1) ∂^{-1}

多様体対 $(M \times M, M \times M \setminus \Delta)$ に対するホモロジー完全列

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(M \times M) \rightarrow H_{n+1}(M \times M, M \times M \setminus \Delta) \xrightarrow{\partial} H_n(M \times M \setminus \Delta) \rightarrow H_n(M \times M) \rightarrow \cdots$$

を考える. ホモロジー群の係数は

$$V_{\rho^*} \boxtimes V_\rho = \pi_1^* V_{\rho^*} \otimes \pi_2^* V_\rho$$

である. ここで $\pi_i: M \times M \ni (x_1, x_2) \mapsto x_i \in M$ は射影である ($i = 1, 2$). また $\boxtimes$ は外部テンソル積を表す. ρ, ρ^* が acyclic なので Künneth の公式から

$$H_i(M \times M; V_{\rho^*} \boxtimes V_\rho) = 0, i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

である．よって特に完全列中の境界準同型 $\partial : H_{n+1}(M \times M, M \times M \setminus \Delta) \rightarrow H_n(M \times M \setminus \Delta)$ は同型である．したがって逆写像

$$\partial^{-1} : H_n(M \times M \setminus \Delta) \rightarrow \partial : H_{n+1}(M \times M, M \times M \setminus \Delta)$$

が存在する．

同型 (2) E

次に切除同型

$$E : H_{n+1}(M \times M, M \times M \setminus \Delta) \rightarrow H_{n+1}(N(\Delta), N(\Delta) \setminus \Delta)$$

をとる．ここで $N(\Delta)$ は $M \times M$ における Δ の管状近傍．

同型 (3) τ

最後に Thom 同型：

$$\tau : H_{n+1}(N(\Delta), N(\Delta) \setminus \Delta) \rightarrow H_1(\Delta) (= H_1(M)).$$

右辺の $H_1(\Delta) = H_1(M)$ は ι が誘導する同型によって同一視している．

以上3つの同型写像を合成することで、以下の同型が得られる：

$$\Phi := \tau \circ E \circ \partial^{-1} : H_n(M \times M \setminus \Delta; V_{\rho}^* \boxtimes V_{\rho}) \xrightarrow{\cong} H_1(M; V_{\rho}^* \otimes V_{\rho}).$$

ここで $V_{\rho}^* \boxtimes V_{\rho}|_{\Delta} = V_{\rho}^* \otimes V_{\rho}$ であることに注意．

次に s を用いて $H_n(M \times M \setminus \Delta)$ のホモロジークラスを構成する． s を用いて Δ を摂動したものを $s(\Delta)$ とする． $s(\Delta)$ は Δ のごく近傍にあるので、 $V_{\rho}^* \boxtimes V_{\rho}|_{s(\Delta)} \cong V_{\rho}^* \otimes V_{\rho}$ とみなせる． $V^* \otimes V = \text{Hom}(V, V) \ni 1$ は $\pi_1(M)$ の対角作用で不変であるから、ホモロジー類

$$[s(\Delta) \otimes 1] \in H_n(M \times M \setminus \Delta; V_{\rho}^* \boxtimes V_{\rho})$$

を得る．

定義 2.1.

$$d(M, \rho; s) = \Phi([s(\Delta) \otimes 1]) \in H_1(M; V_{\rho}^* \otimes V_{\rho}).$$

$d(M, \rho; s)$ は s に依存するが、その差は $H_1(M; \mathbb{Z})$ に入っていることが確かめられる：
 s_1, s_2 を non-vanishing vector field とするとき、

$$d(M, \rho, s_1) - d(M, \rho; s_2) \in H_1(M; \mathbb{Z}).$$

そこで s のよらない不変量 $d(M, \rho)$ を、 $d(M, \rho; s)$ を up to $H_1(M; \mathbb{Z})$ で考えたものとして定義する：

定義 2.2.

$$d(M, \rho) := [d(M, \rho; s)] \in H_1(M; V_{\rho}^* \otimes V_{\rho}) / H_1(M; \mathbb{Z}).$$

注意 2.3. d は Morse 理論を用いて記述することができ、それを用いると境界付き多様体に拡張することができる。詳細は [1] を参照。

3 d の図形的意味

Φ を与える同型を追っていくことで d の図形的な解釈を与える。特異チェイン $\Sigma \in C_{n+1}(M \times M, V_{\rho^*} \boxtimes V_{\rho})$ であって

$$\partial \Sigma = s(\Delta) \otimes 1$$

を満たすものとする。このチェイン Σ を **propagator** とよぶ^{*1}。 Σ は $\partial^{-1}(s(\Delta) \otimes 1)$ を代表する。切除同型と Thom 同型を経由することで

$$[\Sigma \cap \Delta] = d(M, \rho; s)$$

が分かる。すなわち Δ を摂動した $s(\Delta)$ が $M \times M$ 内で bound するチェイン Σ (propagator) の Δ との交差が d を代表する。この意味で d は、framing s 付きの Δ の self-linking number ととらえることができる。

4 S^1 の defect の計算

多様体が S^1 の場合に具体的に propagator を構成することで defect を計算する。 $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ とみなし θ を座標とする。 $\alpha \neq 1$ を長さ 1 の複素数とすると、表現 $\pi_1(S^1) = \langle t \rangle \mapsto \rho(t) = \alpha \in GL(\mathbb{C})$ は acyclic である。 non-vanishing section s の取り方は up to homotopy で 2 つあるが、ここでは $s = \frac{d}{d\theta}$ ととる。このとき s による Δ の摂動は

$$\{(\theta, \theta + \varepsilon) \mid \theta \in S^1\} \subset S^1 \times S^1$$

とみなすことができる。ここで $0 < \varepsilon$ は十分小さな正定数である。 $S^1 \times S^1$ の部分多様体

$$\{(\theta, \theta + x) \mid \varepsilon \leq x \leq \varepsilon + 2\pi\} \subset S^1 \times S^1$$

は $\{x = 0\}$ 上の点を base point として、係数 $\frac{1}{\alpha-1} \in \mathbb{C} = \mathbb{C}_{\rho^*} \otimes \mathbb{C}_{\rho}$ を与えることで $C_2(S^1 \times S^1, \mathbb{C}_{\rho^*} \otimes \mathbb{C}_{\rho})$ のチェインを与える：

$$\Sigma = \{(\theta, \theta + x) \mid \varepsilon \leq x \leq \varepsilon + 2\pi\} \otimes \frac{1}{\alpha-1} \in C_2(S^1 \times S^1, \mathbb{C}_{\rho^*} \otimes \mathbb{C}_{\rho}).$$

構成から

$$\partial \Sigma = \alpha s(\Delta) \otimes \frac{1}{\alpha-1} - s(\Delta) \otimes \frac{1}{\alpha-1} = s(\Delta) \otimes 1$$

であり、 Σ は propagator. よって

$$d(S^1, \rho; s) = [\Sigma \cap \Delta] = \frac{-\alpha}{\alpha-1} [\Delta \otimes 1] \in H_1(\Delta; \mathbb{C}_{\rho^*} \otimes \mathbb{C}_{\rho}).$$

^{*1} Σ は Chern-Simons 摂動論で用いられる propagator の仮定を緩めた一般化とみることができるため。

$\mathbb{C}_{\rho^*} \otimes \mathbb{C}_{\rho} = \mathbb{C}$ なので $H_1(\Delta; \mathbb{C}_{\rho^*} \otimes \mathbb{C}_{\rho}) = \mathbb{C}$. この同一視の元,

$$d(S^1, \rho; s) = \frac{-\alpha}{\alpha - 1}.$$

注意 4.1. Reidemeister-Turaev torsion は Reidemeister torsion の精密化で, 三つ組み $M, \rho; s$ に対する不変量である. 上記 S^1, ρ, s に対しての値 $\text{Tor}(S^1, \alpha; s)$ は $\text{Tor}(S^1, \alpha; s) = \frac{1}{\alpha-1}$ である. t をパラメータとし, $f(t) = \frac{1}{t-1}$ とおくと,

$$\begin{aligned} \text{Tor}(S^1, \alpha; s) &= f(\alpha), \\ d(S^1, \alpha; s) &= t \frac{d}{dt} \log f(t)|_{t=\alpha} \end{aligned}$$

が成り立つ. より一般的に, M が 3 次元多様体で 1st Betti 数が 1 以上, 表現がアーベルのときには Tor と d の間に同様の関係が成り立つ. ([2],[3])

5 $S^1 \times Y$ の defect の計算

S^1 に関する notation は前の章を引き継ぐ. Y を $n-1$ 次元閉多様体, ρ_Y を (acyclic とは限らない) 任意の表現とする. このとき ρ が acyclic であることから $\rho \boxtimes \rho_Y$ は acyclic である. 射影 $S^1 \times Y \rightarrow S^1$ によって s を引き戻した $\tilde{s}$ は $S^1 \times Y$ の non-vanishing vector field であり,

$$d(S^1 \times Y, \rho \boxtimes \rho_Y; \tilde{s})$$

が定義される. defect は $H_1((S^1 \times Y) \times (S^1 \times Y); (\mathbb{C}_{\rho^*} \boxtimes V_{\rho_Y^*}) \otimes (\mathbb{C}_{\rho} \boxtimes V_{\rho_Y}))$ に値をとるが, $(\mathbb{C}_{\rho^*} \boxtimes V_{\rho_Y^*}) \otimes (\mathbb{C}_{\rho} \boxtimes V_{\rho_Y}) = \mathbb{C} \boxtimes \text{Hom}(V, V)_{\rho_Y}$ であり, $1 \in \text{Hom}(V, V)$ により $(\mathbb{C} \boxtimes \mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \boxtimes \text{Hom}(V, V)_{\rho_Y}$. よって

$$\mathbb{C} \subset H_1((S^1 \times Y) \times (S^1 \times Y); (\mathbb{C}_{\rho^*} \boxtimes V_{\rho_Y^*}) \otimes (\mathbb{C}_{\rho} \boxtimes V_{\rho_Y})).$$

defect $d(S^1 \times Y, \rho \boxtimes \rho_Y; \tilde{s})$ はこの $\mathbb{C}$ に属していて, 次の命題のように計算される:

命題 5.1.

$$d(S^1 \times Y, \rho \boxtimes \rho_Y; \tilde{s}) = \frac{-\alpha}{\alpha - 1} \chi(Y).$$

ここで $\chi(Y)$ は Y の Euler 数である.

証明 $(S^1 \times Y) \times (S^1 \times Y) = (S^1 \times S^1) \times (Y \times Y)$ であり, この対応の元 $\Delta = \Delta_{S^1} \times \Delta_Y$ である. $(S^1 \times S^1) \times (Y \times Y)$ の $n+1$ チェイン Σ' を以下で定める.

$$\Sigma' = \{((\theta, \theta + \varepsilon + x), (p, \varphi_x(p)) \mid 0 \leq x \leq 2\pi\} \otimes \frac{1}{\alpha - 1}.$$

ただし base point は $\{\varepsilon = 0\}$ 上の点とする. また, $\varphi = \{\varphi_t : Y \xrightarrow{\cong} Y\}_{0 \leq t \leq 2\pi}$ は diffeomorphism の族で $\varphi_0 = \varphi_{2\pi} = \text{id}$ かつ φ_ε が 0 と横断的であるものをとる. 構成

から,

$$\begin{aligned}
 \partial\Sigma' &= (-\{((\theta, \theta + \varepsilon), (p, \varphi_0(p)))\} + \alpha\{((\theta, \theta + 2\pi + \varepsilon), (p, \varphi_{2\pi}(p)))\}) \otimes \frac{1}{\alpha - 1} \\
 &= (-\{((\theta, \theta + \varepsilon), (p, p))\} + \alpha\{((\theta, \theta + 2\pi + \varepsilon), (p, p))\}) \otimes \frac{1}{\alpha - 1} \\
 &= (s(\Delta_{S^1}) \times \Delta_Y) \otimes \frac{1}{\alpha - 1}.
 \end{aligned}$$

よって Σ' は propagator である. したがって

$$\begin{aligned}
 &d(S^1 \times Y, \rho \boxtimes \rho_Y) \\
 &= [\Sigma' \cap (\Delta_{S^1} \times \Delta_Y)] \\
 &= \{((\theta, \theta + \varepsilon + (2\pi - \varepsilon)), (p, \varphi_{2\pi - \varepsilon}(p)))\} \otimes \frac{1}{\alpha - 1} \\
 &= (\Delta_{S^1} \otimes \frac{1}{\alpha - 1})\chi(Y).
 \end{aligned}$$

□

注意 5.2. 同様の議論でより一般に閉多様体 A, B と $\pi_1(A)$ の acyclic な表現 $\rho_A, \pi_1(B)$ の任意の表現 ρ_B に対し $d(A \times B, \rho_A \boxtimes \rho_B) = d(A, \rho_A)\chi(B)$ が示される.

参考文献

- [1] T. Kitano and T. Shimizu, Gluing formula for an invariant related to the Chern-Simons perturbation theory, arXiv, 2023
- [2] C. Lescop, On the cube of the equivariant linking pairing for knots and 3-manifolds of rank one, arXiv, 2010.
- [3] Schwarz, A. The partition function of degenerate quadratic functional and Ray-Singer invariants. Lett. Math. Phys. 2, 247, 1978
- [4] T. Shimizu, A geometric description of the Reidemeister-Turaev torsion of 3-manifolds, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Volume 179, Issue 2, pp. 233 - 258, 2025
- [5] E. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomial, Comm. Math. Phys. 121, 1989