

量子系の時間演算子と量子ダイナミクスとの関連の可能性について

早稲田大・理工 宮本 学 (Manabu Miyamoto)¹

Department of Physics, Waseda Univ.

概要

公理的アプローチから、量子系のハミルトニアンと正準交換関係を満たす作用素、すなわち時間演算子が考察される。特に、1次元自由粒子系のハミルトニアンと正準交換関係を満たす、Aharonov-Bohmの時間演算子が対称作用素として矛盾無く定義される他、それらの不確定性関係において最小不確定性状態が存在しないことが報告される。また、波動関数の時間的な自己相関関数と時間演算子との興味深い関係が導出され、様々な考察が成される。

1 Introduction

時間演算子 (time operator) T とは、一般的には着目している物理系のハミルトニアン演算子 H と正準交換関係

$$[T, H] = i. \quad (1.1)$$

を満たす作用素として定義される (以下、物理学における慣例にしたがって、ヒルベルト空間上の作用素を演算子と呼ぶこともあるが、呼称の併用をご了承願いたい)。この作用素は、時間とエネルギーの不確定性関係を量子力学の理論の枠組から導出しようとする試み (例えば、文献 [1] を参照) や、原子などの量子力学的粒子が特定の位置に到着する到着時間 (arrival time) を量子論で記述する試み (例えば Muga と Leavense による文献 [2] を参照) 等において幅広く研究されてきた。また、これらの研究において、Pauli による時間演算子が存在しないという主張 [3] も見直されている [4, 5, 6]。

我々はさらに、上述の2つの研究の他に、時間演算子の研究が量子ダイナミクスの解析に繋がるのではないかと考えている。その第一の理由は、時間演算子の定義自身である正準交換関係 (1.1) にある。正準交換関係は、2つの演算子の互いの性質を強く制限する代数関係である。したがって、(1.1) を介することで、時間演算子 T に関する知識からハミルトニアン H や時間発展演算子 e^{-itH} に関する情報が得られることが期待される。この議論から行くと、時間演算子の研究は、正準交換関係だけでなくハミルトニアンと何らかの交換関係を満たす作用素の研究として捉えられる。実際、 H , A および C を自己共役作用素とすると、それらが交換関係 $[H, iA] = C$ ($C > 0$) を満たすことと、 H の持つスペクトルの種類との関係が Putnam [7] や加藤 [8] 等によって調べられた。さらに、Lavine [9] 等によってシュレーディンガー作用素に応用された [10]。第二の理由は、古典力学のエルゴード理論における次の事実にある：古典系が K -流であるならば、系のリューヴィル演算子 (の絶対連続な部分) と正準交換関係 $[Q, L] = i$ を満たす自己共役作用素 Q が存在する [11, 12]。 L と H は時間発展の生成子という意味では数学的に等価であるから、我々は素朴な意味で時間演

¹ E-mail: miyamo@hep.phys.waseda.ac.jp

算子 T から量子ダイナミクスに関する何らかの情報を得られることが期待できる。時間演算子の量子ダイナミクスとの関連を研究することは、時間演算子の解釈や量子ダイナミクス自身の理解に繋がるばかりか、時間とエネルギーの不確定性関係ならびに到着時間などの古くからの問題に新しい視点を提供するだろう。

我々は公理的量子力学 [13] を基にして時間演算子を解析して行く。公理的量子力学とは、von Neumann が数学的に整備した形での量子力学を指す。公理的手法を取ること、時間演算子を持つ数学的に特異な点を明快にすることができる。その結果、時間演算子の示唆する物理的内容が理解し易くなるだろう。このようなアプローチは、近年の到着時間の研究でも見られる。

本小論では、量子ダイナミクスとの関連を念頭に置きつつ、我々が時間演算子に関して得た幾つかの結果を紹介する。第2節において、Aharonov と Bohm によって提案された1次元自由粒子系の時間演算子を紹介する。この作用素は、提案された当時から数学的な問題点を指摘されたが、実際には対称作用素として数学的に問題なく定義できることがわかる。Aharonov-Bohm の時間演算子は、Weyl の関係式に似た次の関係式:

$$Te^{-itH} = e^{-itH}(T + t), \forall t \in \mathbf{R}^1 \quad (1.2)$$

を満たすことが確かめられる。ここで、 T と H はそれぞれヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の対称作用素および自己共役作用素である。第3節では、この関係式を導入し、それに関する幾つかの事実を紹介する。特に、次の不等式:

$$\left| \langle \psi, e^{-itH} \psi \rangle \right|^2 \leq \frac{4(\Delta T)_\psi^2 \|\psi\|^2}{t^2}, \quad \psi \in \text{Dom}(T) \quad (1.3)$$

が導出される。ここで、 $(\Delta T)_\psi := \|(T - \langle \psi, T \psi \rangle) \psi\|$ は状態 $\psi (\in \mathcal{H})$ における T の標準偏差であり、左辺の $\left| \langle \psi, e^{-itH} \psi \rangle \right|^2$ は初期状態 ψ の時間に関する自己相関関数 (もしくは survival probability) と呼ばれる物理量である。上の不等式は、物理において非常に馴染みのある自己相関関数が、馴染みのない量 $(\Delta T)_\psi$ と直接に結び付くことを主張する興味深い結果である。第4節では、1次元自由粒子系以外の時間演算子が存在する物理系を紹介する。特に、1次元自由粒子系のハミルトニアンとユニタリー変換で結びつくようなハミルトニアンを持つ物理系が考察される。第5節において、1次元自由粒子系を例として不等式 (1.3) を考察する。特に、自己相関関数が $1/t^2$ よりも速く減衰ことは、量子ダイナミクスにおいてどのような意味を持つのかを中心に議論を行う。最後に結論を第6節で述べる。

2 Aharonov-Bohm の時間演算子

この節では、下に有界なハミルトニアンと正準交換関係を満たす作用素 (時間演算子) の例として、Aharonov と Bohm により考案された作用素 T_0 を紹介する [14] (以下、Aharonov-Bohm の時間演算子と呼ぶ)。Aharonov-Bohm の時間演算子 T_0 は、 $T_0 = (QP^{-1} + P^{-1}Q)/2$ で定義され、1次元自由粒子系のハミルトニアン $H_0 := P^2/2$ と正準交換関係を満たすことが確かめられる。ここで、 Q と P はそれぞれ位置演算子と運動量演算子であり、また P^{-1} は P の逆作用素である。しかし、

作用素 P^{-1} は, P が 0 固有値を持つ事から, 上手く定義できるかどうか問題となった. そこで, この問題を公理的な立場から捉え直してみよう. 作用素 Q, P を $L^2(\mathbf{R}^1)$ 上の作用素として定義するとき, それらの自己共役性は保証される. また, 固有値とスペクトルという言葉は, 関数解析における用語としてそれらの意味が明確に区別される. このとき, P は $\mathbf{R}^1$ 全体をスペクトルに持つが固有値は持たないことになる. したがって, P は単射であり P^{-1} が定義できる. 自己共役作用素についての一般論から, このとき P^{-1} は自己共役作用素となることもわかる. よって, 公理的立場から問題は解決される.

T_0 についても同様に問題は起きない. 素朴には, T_0 を $L^2(\mathbf{R}^1)$ 上の作用素として次のように定義することが考えられる:

$$T_0 := \frac{1}{2} (QP^{-1} + P^{-1}Q),$$

$$\text{Dom}(T_0) := \text{Dom}(QP^{-1}) \cap \text{Dom}(P^{-1}Q).$$

このとき, $\text{Dom}(T_0)$ は $L^2(\mathbf{R}^1)$ で稠密であることがわかる. 例えば, $L^2(\mathbf{R}_k^1)$ で稠密な部分空間:

$$\mathcal{C}_i := \left\{ \hat{\psi} \in C_0^\infty(\mathbf{R}_k^1) \mid \text{supp } \hat{\psi} \subset \mathbf{R}_k^1 \setminus \{0\} \right\}, \quad (2.1)$$

を考えれば良い. $\mathcal{C}_i \subset F\text{Dom}(T_0) = \text{Dom}(FT_0F^{-1})$ が解かり, したがって, T_0 の共役作用素 T_0^* も定義できる (ここで, $\hat{\psi} := F\psi$, F はフーリエ変換: $F: L^2(\mathbf{R}^1) \rightarrow L^2(\mathbf{R}_k^1)$). T_0 の作り方から, T_0 が対称作用素, すなわち $T_0 \subset T_0^*$ が示される.

自己共役作用素と対称作用素を区別することは重要である [13]. このことは, 最近の到着時間の研究においても認識されている [5]. また, H_0 が下に有界であるにも関わらず Pauli の議論に抵触しないのは, T_0 が対称作用素であるからとも言える. さらに, 不足指数を用いることで, T_0 が自己共役拡大をもたないことも文献 [5] において示されている.

次に, 次節への準備として, T_0 の対称拡大を導入しておく.

定義 2.1 $L^2(\mathbf{R}^1)$ 上の作用素 $\widetilde{T}_0$ を以下で定義する:

$$\text{Dom}(\widetilde{T}_0) := \left\{ \psi \in L^2(\mathbf{R}^1) \mid \begin{array}{l} \hat{\psi} \in AC(\mathbf{R}_k^1 \setminus \{0\}), \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\hat{\psi}(k)}{|k|^{1/2}} = 0, \\ \int_{\mathbf{R}_k^1} \left| \frac{d\hat{\psi}(k)/k}{dk} + \frac{1}{k} \frac{d\hat{\psi}(k)}{dk} \right|^2 dk < \infty \end{array} \right\},$$

$$(\widetilde{T}_0\psi)(k) := \frac{i}{2} \left(\frac{d\hat{\psi}(k)/k}{dk} + \frac{1}{k} \frac{d\hat{\psi}(k)}{dk} \right), \quad \text{a.e. } k \in \mathbf{R}_k^1, \quad \psi \in \text{Dom}(\widetilde{T}_0).$$

命題 2.1 $\widetilde{T}_0$ は対称作用素で, $T_0 \subset \widetilde{T}_0$. さらに, 任意の $t \in \mathbf{C}$ ($\text{Im}t \leq 0$) と任意の $\psi \in \text{Dom}(\widetilde{T}_0)$ に対して $e^{-itH_0}\psi \in \text{Dom}(\widetilde{T}_0)$ であって,

$$\widetilde{T}_0 e^{-itH_0} = e^{-itH_0} (\widetilde{T}_0 + t), \quad \forall t \in \mathbf{C} (\text{Im}t \leq 0), \quad (2.2)$$

が成り立つ. ただし, $H_0 := P^2/2$.

上の関係式 (2.2) は、実は T_0 と H_0 とでは満たされない。何故なら e^{-itH_0} が、 $\text{Dom}(T_0)$ を不変にしないからである。例えば、運動量表示において、以下の関数を考えると良い:

$$g(k) := \begin{cases} e^{-1/k^2} \frac{1}{1+|k|^s} & (k \neq 0), \\ 0 & (k = 0). \end{cases}$$

ただし、 $1/2 < s \leq 3/2$. 次節で関係式 (2.2) を調べることで、 $\widetilde{T}_0$ と H_0 の満たす一般的性質を導く。

3 時間演算子の一般的性質

前節での関係式 (2.2) を抽象化して、以下の関係式を定義する:

$$Te^{-itH} = e^{-itH}(T+t), \quad \forall t \in \mathbf{R}^1. \quad (3.1)$$

ここで、 T と H はそれぞれヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の対称作用素および自己共役作用素とする。この節では (3.1) をみたす作用素 T と H を考察し、いくつかの結果を紹介する。証明は省略するが、興味のある読者は文献 [6] を見ていただきたい。

次の命題は、Weyl の関係式と (3.1) の関係を表す。

命題 3.1 T を閉対称作用素とし、 T と H が (3.1) をみたすとき、 $\mathcal{H}$ で稠密な部分空間 $\mathcal{D}$ が存在して、

- (i) $\mathcal{D} \subset \text{Dom}(TH) \cap \text{Dom}(HT)$,
- (ii) $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$,
- (iii) $\text{Dom}(TH) \cap \text{Dom}(HT)$ 上で、 $TH - HT = i$.
- (iv) さらに、もしも T が自己共役ならば、 T と H は Weyl の関係式:

$$e^{-isT}e^{-itH} = e^{-ist}e^{-itH}e^{-isT}, \quad \forall s, \forall t \in \mathbf{R}^1$$

をみたす。

ここで、 T は閉であると仮定したが、 T と H が (3.1) をみたすならば、 T の閉包と H も (3.1) をみたすので、実際には (3.1) だけから出発して良い。上の証明は、本質的に文献 [15] に依っている。(2.2) と上の (iii) から、 $\widetilde{T}_0$ は正に 1 次元自由粒子系の時間演算子と呼べるだろう。また、上の (iv) から明らかに $\widetilde{T}_0$ は自己共役ではない。何故なら、仮にそうだとすると、Weyl の関係式の解に関する von Neumann の一意性定理により、 $\widetilde{T}_0$ と H_0 はそれぞれ $L^2(\mathbf{R}^1)$ 上の位置演算子 Q と運動量演算子 P にユニタリー同値となる。しかし、このことは H_0 が下に有界であることと矛盾する。

H_0 のスペクトルに関して次の事実がわかる。

定理 3.1 T と H は関係式 (3.1) を満たすとする。このとき、

$$\|E(B)\psi\|^2 \leq \|T\psi\| \|\psi\| |B|, \quad \forall \psi \in \text{Dom}(T), \forall B \in \mathbf{B}^1 \quad (3.2)$$

が成り立つ。ここで、 $E(B)$ は H のスペクトル測度、 $\mathbf{B}^1$ は $\mathbf{R}^1$ の全ての開集合を含む最小の Borel 集合体である。また、 $|B|$ は B のルベグ測度である。上の不等式と $\text{Dom}(T)$ が稠密であることから、 H は絶対連続であることが示される。

ここで, Putnam [16] と加藤 [8] によって導出された不等式

$$\|C^{1/2}E_H(B)\psi\|^2 \leq \|A\|\|\psi\|^2|B|, \quad \forall \psi \in \mathcal{H} \quad \forall B \in \mathbf{B}^1. \quad (3.3)$$

に着目したい. この式は, H, A および C が有界な自己共役作用素であつて, $[H, iA] = C(> 0)$ をみたすという条件のもとで導かれる. 不等式 (3.2) は, 不等式 (3.3) の非有界作用素の場合の類似といえる. しかし, (3.2) は (3.3) から直接導けるものではないことを注意したい.

時間とエネルギーの不確定性関係に関して, 次の定理を挙げる.

定理 3.2 T と H は関係式 (3.1) を満たすとする. このとき, $H \geq 0$ であり, かつ全ての $t \in \mathbf{C}$ ($\text{Im } t \leq 0$) に対して関係式 (3.1) を満たすならば,

$$(\Delta T)_\psi (\Delta H)_\psi > \frac{1}{2}, \quad \forall \psi \in \text{Dom}(TH) \cap \text{Dom}(HT) \quad (\|\psi\| = 1)$$

と成る. 特に上の不等式 (不確定性関係) において等号は成立しない.

命題 3.1 の (iii) より, 上の不等式自身は Schwarz の不等式から直ちに導かれる. しかし, 等号が成立しない, すなわち最小不確定性状態が存在しないことは自明ではない. これは, Weyl の関係式と関係式 (3.1) の大きな違いである. 1 次元自由粒子系における Aharonov-Bohm の時間演算子 $\widetilde{T}_0$ は (2.2) をみたすから, 上述の定理が適用できる. したがって, $\widetilde{T}_0$ と H_0 の不確定性関係において, 最小不確定性状態は存在しない. 実は, この事は Kobe による次の結果から予想された [1]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Delta \widetilde{T}_0)_{\varphi_n} (\Delta H_0)_{\varphi_n} = \frac{1}{2}.$$

ここで, $\varphi_n(k) = N_n k^n e^{-ak^2}$ ($a > 0$, n は 2 以上の自然数, N_n は規格化定数) である. このとき, φ_n は L^2 の収束列ではない事に注意されたい. また同様に, Wigner [17] および Baute 等 [18] による結果からも示唆されていた.

我々は今まで, 関係式 (3.1) を満たす作用素の表現を求める事なしに考察してきた. しかし, 仮に表現を求めることができれば, これらの事実は容易に求まるに違いない. 関係式 (3.1) の表現論は, Schmüdgen [19] によって詳細に調べられている.

我々は, 時間演算子と量子ダイナミクスとの関連に興味がある. ところで, 時間とエネルギーの不確定性関係に関する議論では, それと自己相関関数とを関係付ける試みがたびたび見られる (例えば, [20, 21, 22] を参照). ここで, 自己相関関数について説明しておく. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ とハミルトニアン H で記述される物理系を考える. このとき, 各状態 ψ ($\in \mathcal{H}$) に対して定義される $t \in \mathbf{R}^1$ の関数 $\left| \langle \psi, e^{-itH} \psi \rangle \right|^2$ を状態 ψ の自己相関関数 (autocorrelation function) と呼ぶ. 状態 ψ の survival probability と呼ばれる. 物理的には, これは初期状態 ψ と時刻 t の状態 $e^{-itH} \psi$ との間の遷移確率を表す. ψ によって生成される 1 次元部分空間への射影作用素を P_ψ とすると, $\left| \langle \psi, e^{-itH} \psi \rangle \right|^2 = \|P_\psi e^{-itH} \psi\|^2$ と表せる. 自己相関関数は, 古典・量子, さらには理論・実験を問わず非常に重要な役割を持つ. 例えば, 原子に束縛された電子の波動関数の示す復元現象 (revival phenomena) は, 実際に高励起状態の Rb 原子により Rydberg 原子を作り, その最外殻電子の波動関数の自己相関関数を観測することで確認された (例えば, [23, 24, 25]). 次の結果は, その自己相関関数と時間演算子が直接に関連するという意味で興味深い.

定理 3.3 T と H が関係式 (3.1) をみたすとき,

$$\left| \langle \psi, e^{-itH} \psi \rangle \right|^2 \leq \frac{4(\Delta T)_\psi^2 \|\psi\|^2}{t^2}, \quad \forall t \in \mathbf{R}^1 \setminus \{0\}, \forall \psi \in \text{Dom}(T), \quad (3.4)$$

が成り立つ. ここで, $(\Delta T)_\psi := \|(T - \langle \psi, T\psi \rangle)\psi\|$ である.

証明 $\psi \in \text{Dom}(T)$ とする. (3.1) より $Se^{-itH}\psi = e^{-itH}(S+t)\psi$ ($S := T - \langle \psi, T\psi \rangle$) が成り立つ. このとき,

$$\begin{aligned} t \langle \psi, e^{-itH} \psi \rangle &= \langle \psi, e^{-itH} S\psi \rangle - \langle \psi, Se^{-itH} \psi \rangle = \langle e^{itH} \psi, S\psi \rangle - \langle S\psi, e^{-itH} \psi \rangle, \\ |t| \left| \langle \psi, e^{-itH} \psi \rangle \right| &\leq 2\|S\psi\| \|\psi\|. \end{aligned}$$

これより, (3.4) が直ちに求まる. ■

この不等式から, T と H が固有値を持たないこともすぐにわかる. この不等式に馴染むために, これらを順に示したい.

系 3.1 T と H は関係式 (3.1) を満たすとする. このとき, T は固有値を持たない.

証明 T が固有値 $\lambda \in \mathbf{R}^1$ を持つと仮定する. したがって, 固有値 λ に属する 0 でない固有ベクトル $\psi_\lambda \in \text{Dom}(T)$ が存在する: $T\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$. このベクトルは規格化されているとして差し支えない: $\|\psi_\lambda\| = 1$. このとき, $(\Delta T)_{\psi_\lambda} = 0$ が成り立つ. 今, ψ_λ に不等式 (3.4) を適用すれば, $\langle \psi_\lambda, e^{-itH} \psi_\lambda \rangle = 0, \forall t \in \mathbf{R}^1 \setminus \{0\}$. e^{-itH} は $t \in \mathbf{R}^1$ について強連続であるから, $\|\psi_\lambda\|^2 = \lim_{t \rightarrow 0} \langle \psi_\lambda, e^{-itH} \psi_\lambda \rangle = 0$ となる. これは $\psi_\lambda \neq 0$ に矛盾する. したがって, T は固有値を持たない. ■

不等式 (3.4) に加えて, $\text{Dom}(T)$ が $\mathcal{H}$ で稠密であることを利用すれば, H が固有値を持たないことが示せる.

系 3.2 T と H は関係式 (3.1) を満たすとする. このとき, H は固有値を持たない.

証明 $\text{Dom}(T)$ は $\mathcal{H}$ において稠密であるから, 任意の $\psi \in \mathcal{H}$ に対して, ψ に収束する列が $\text{Dom}(T)$ から取れる. それを $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty \subset \text{Dom}(T)$ としよう: $\psi_n \rightarrow \psi, n \rightarrow \infty$. このとき,

$$\begin{aligned} &\left| \langle \psi, e^{-itH} \psi \rangle - \langle \psi_n, e^{-itH} \psi_n \rangle \right| \\ &= \left| \langle \psi, e^{-itH} \psi \rangle - \langle \psi, e^{-itH} \psi_n \rangle + \langle \psi, e^{-itH} \psi_n \rangle - \langle \psi_n, e^{-itH} \psi_n \rangle \right| \\ &\leq \|e^{itH} \psi\| \|\psi - \psi_n\| + \|\psi - \psi_n\| \|e^{-itH} \psi_n\| \leq (\|\psi\| + \|\psi_n\|) \|\psi - \psi_n\|. \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \pm\infty} \left| \langle \psi, e^{-itH} \psi \rangle \right| &\leq \limsup_{t \rightarrow \pm\infty} \left| \langle \psi_n, e^{-itH} \psi_n \rangle \right| + (\|\psi\| + \|\psi_n\|) \|\psi - \psi_n\| \\ &= (\|\psi\| + \|\psi_n\|) \|\psi - \psi_n\|. \end{aligned}$$

ここで、最後の等式において、不等式 (3.4) および $\psi_n \in \text{Dom}(T)$ を用いた。上の不等式は、全ての $n \in \mathbb{N}$ で成り立つから、 $n \rightarrow \infty$ の極限で、

$$\forall \psi \in \mathcal{H}, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \langle \psi, e^{-itH} \psi \rangle = 0 \quad (3.5)$$

が求まる。これは、 H が固有値を持たないことを意味する。何故なら、仮に H が固有値を持つと仮定しよう、すなわち、ある $\lambda \in \mathbb{R}^1$ があつて、 $H\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$ ($\psi_\lambda \neq 0$)。このとき、 ψ_λ の自己相関関数 $\left| \langle \psi_\lambda, e^{-itH} \psi_\lambda \rangle \right|^2$ は定数であるから、 $t \rightarrow \pm\infty$ で 0 には収束し得ない。これは (3.5) と矛盾する。よって、 H は固有値は持たない。 ■

H が固有値を持たないことは、定理 3.1 から H が絶対連続であるから、当然成り立たなければならない。しかし、 H が固有値を持たない事実は、上の証明からも解かるように、 H と関係式 (3.1) を満たす作用素 T が存在すれば、どのような状態の自己相関関数も、(3.5) に表されるように、 $t \rightarrow \pm\infty$ で減衰することしか許されない。 T を時間演算子、 H をハミルトニアンと捉えるとき、この事実は、時間演算子 T (対称でありさえすれば良い) が存在することと、物理系の状態の自己相関関数 $\left| \langle \psi, e^{-itH} \psi \rangle \right|^2$ のダイナミクスが密接に関係することを示唆する。

我々はまだ、不等式 (3.4) における自己相関関数がただ単に減衰するという性質しか用いていない。不等式 (3.4) において自己相関関数が $1/t^2$ のべきで上から押さえられる事実の考察は、1 次元自由粒子系の Aharonov-Bohm の時間演算子を例として第 5 節で行う。

4 時間演算子が存在するその他の系

この節では、1 次元自由粒子系以外で時間演算子が存在する系として、自由ハミルトニアン H_0 にポテンシャル $V(x)$ が加わったハミルトニアン H_1 ($:= H_0 + V$) を持つポテンシャル系を紹介する。

まず、Putnam による次の結果を引用したい [26]：実可測関数 $V(x)$ をポテンシャルとし、

$$0 \leq V(x) \leq \text{定数} < \infty, \quad V \in L^1(\mathbb{R}^1), \quad (4.1)$$

を満たすとする。このとき、ポテンシャル系のハミルトニアン H_1 ($:= H_0 + V$) は $L^2(\mathbb{R}^1)$ 上の自己共役作用素であり、さらに、波動作用素 (もしくは、Möller 演算子) $W_\pm$,

$$W_\pm := s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_1} e^{-itH_0} \quad (4.2)$$

が存在して、 $L^2(\mathbb{R}^1)$ 上でユニタリーとなる。ここで "s-" は強収束を表す。また、

$$H_1 = W_\pm H_0 W_\pm^* \quad (4.3)$$

が成り立つ。このとき、ポテンシャル系における時間演算子 $T_\pm$ を次のように定義する：

$$T_{1,\pm} := W_\pm \widetilde{T_0} W_\pm^*, \quad \text{Dom}(T_{1,\pm}) := W_\pm \text{Dom}(\widetilde{T_0}). \quad (4.4)$$

この時間演算子の構成方法は、到着時間の問題にける León 等 [27] や Baute 等 [28] の研究において既に提案されており、数値実験などから $T_{1,\pm}$ の固有関数の性質が調べられている。さて、 $\widetilde{T}_0$ と H_0 が関係式 (2.2) を満たしているのであった。したがって、 $T_{1,\pm}$ と H_1 も

$$T_{1,\pm} e^{-itH_1} = e^{-itH_1} (T_{1,\pm} + t), \quad \forall t \in \mathbb{C} \text{ (Im} t \leq 0), \quad (4.5)$$

を満たすから、 $T_{1,\pm}$ は正にポテンシャル系の時間演算子と見なせる。関係式 (4.5) から、 $\widetilde{T}_0$ と H_0 の場合と同様に $T_{1,\pm}$ と H_1 に対しても、第 3 節の結果が全て適用できる。特に、

$$\left| \langle \psi, e^{-itH_1} \psi \rangle \right|^2 \leq \frac{4(\Delta T_{1,\pm})_\psi^2 \|\psi\|^2}{t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}, \forall \psi \in \text{Dom}(T_{1,\pm}) \quad (4.6)$$

が成り立つ。

この時間演算子の構成方法は、ハミルトニアンが束縛状態を持つ場合にも適用できる。この場合、波動作用素が H_0 から H_1 の絶対連続な部分 (散乱状態に対応) へのユニタリー作用素になることを利用して、系を散乱状態に限定すれば良い [6]。これらの時間演算子の構成に関する議論は形式的なものにすぎない。しかし、ここで重要なことは、対象とする系の状態を散乱状態に限れば、多くのポテンシャル系で時間演算子が存在するという事実である。また、(4.6) と前節の最後に述べたことから、自己相関関数が $1/t^2$ より速く減衰する性質は、自由粒子系に限らずポテンシャル系においても特徴的なものと成り得る。

5 時間演算子により規定される自己相関関数のダイナミクス

この節では、1次元自由粒子系における波動関数の自己相関関数を例に見ながら、不等式 (3.4) を考察して行く。また後半において、1つの試みとして、1次元自由粒子系における波動関数の自己相関関数が $1/t^2$ で押さえられるとき、ポテンシャルによる擾動が加わると、 $1/t^2$ で押さえられる性質がどのように変化するかを考察する。

まず、1次元自由粒子系の自己相関関数を例にとりて、不等式 (3.4) に見られるような自己相関関数が $1/t^2$ で押さえられる性質を考察する。

例 5.1 L^2 -関数 $\varphi_n(k) = N_n k^n e^{-ak^2}$ ($a > 0$, n は非負整数, N_n は規格化定数) を考える。このとき φ_n の 1次元自由粒子系での自己相関関数は、 $\left| \langle \varphi_n, e^{-itH_0} \varphi_n \rangle \right|^2 = \left| \langle \hat{\varphi}_n, e^{-itk^2/2} \hat{\varphi}_n \rangle \right|^2 = (1 + t^2/16a^2)^{-(2n+1)/2}$ となる。

容易にわかるように、 $n \geq 2$ であれば $\varphi_n \in \text{Dom}(\widetilde{T}_0)$ が成り立つ。しかし、 φ_0 (Gauss 波束) と φ_1 は $\text{Dom}(\widetilde{T}_0)$ に属さない。 $\text{Dom}(\widetilde{T}_0)$ の積分の条件を満たさないからである。 φ_0 に関するこの事実は、次の議論からもわかる: $\left| \langle \varphi_0, e^{-itH_0} \varphi_0 \rangle \right|^2 = O(1/t)$ であるから、 $\varphi_0 \in \text{Dom}(\widetilde{T}_0)$ であるための必要条件である不等式 (3.4) を満たさない。したがって、 $\varphi_0 \notin \text{Dom}(\widetilde{T}_0)$ でなければならない。しかし、この議論は φ_1 には上手く働かない。何故なら、 $\left| \langle \varphi_1, e^{-itH_0} \varphi_1 \rangle \right|^2 = O(1/t^3)$ となり不等式と矛盾しないからである。以上の事実は以下のようにまとめられる: $\forall \psi \in L^2(\mathbb{R}^1)$,

$$\psi \in \text{Dom}(\widetilde{T}_0) \implies \exists C > 0, \forall t \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}, \left| \langle \psi, e^{-itH_0} \psi \rangle \right|^2 \leq \frac{C}{t^2}. \quad (5.1)$$

しかし、この逆は一般には成立しない。

上の事実から、 $\text{Dom}(\widetilde{T}_0)$ は、自己相関関数が $1/t^2$ で押さえられる性質を規定しきっていないことがわかる。しかし、それでも $\text{Dom}(\widetilde{T}_0)$ は $L^2(\mathbf{R}^1)$ で稠密であるから、不等式 (3.4) は、 $L^2(\mathbf{R}^1)$ において自己相関関数が $1/t^2$ で押さえられる運動が支配的であることを主張していると思われる。これらの事実をどのように特徴付けられるかが問題となる。

そこで、次のような問いを考える：1次元自由粒子系における波動関数 ψ の自己相関関数 $\left| \langle \psi, e^{-itH_0} \psi \rangle \right|^2$ が $1/t^2$ で押さえられるとする。このとき、ポテンシャル V の加わった摂動系のハミルトニアン H_1 ($:= H_0 + V$) に対しても、 $\left| \langle \psi, e^{-itH_1} \psi \rangle \right|^2$ は $1/t^2$ で押さえられるか？ これは、 $1/t^2$ で押さえられる性質を摂動に対する安定性で特徴付けようとする試みである。

この問いは、数学的には次のように表せる： $L^2(\mathbf{R}^1)$ 上の任意の自己共役作用素 A と正の実数 n に対して、 $L^2(\mathbf{R}^1)$ の部分集合 $C(A, n)$ を以下で定義する：

$$C(A, n) := \left\{ \psi \in L^2(\mathbf{R}^1) \mid \exists C > 0, \forall t \in \mathbf{R}^1 \setminus \{0\}, \left| \langle \psi, e^{-itA} \psi \rangle \right|^2 \leq \frac{C^2}{|t|^n} \right\}. \quad (5.2)$$

また、ポテンシャル $V(x)$ は (4.1) を満たすと仮定しよう。すると明らかに

$$\text{Dom}(\widetilde{T}_0) \subset C(H_0, 2) \subset L^2(\mathbf{R}^1), \quad (5.3)$$

及び

$$\text{Dom}(T_{1,\pm}) \subset C(H_1, 2) \subset L^2(\mathbf{R}^1) \quad (5.4)$$

が成り立つ。このとき上述の問いは次のように表せる：共通部分 $C(H_0, 2) \cap C(H_1, 2)$ は $L^2(\mathbf{R}^1)$ で稠密に成り得るか？ $\text{Dom}(\widetilde{T}_0)$ と $\text{Dom}(T_{1,\pm})$ は共に $L^2(\mathbf{R}^1)$ で稠密であるから、 $C(H_0, 2)$ と $C(H_1, 2)$ もそれぞれ稠密である。しかし、それらの共通部分が稠密であるかどうかは自明ではない。我々はこの問いに対し肯定的な答えを得た。以下に述べる結果の証明は省略するが、興味のある方は文献 [29] を参照されたい。

結果を述べる前に必要な準備を行う。まず、ポテンシャルを以下のクラスに限定する。これは波動作用素を固有関数展開を用いて記述するための技術的な要請である：

$$\exists \delta > 2, \exists c > 0, \forall x \in \mathbf{R}^1, |V(x)| \leq \frac{c}{(1 + |x|)^\delta}. \quad (5.5)$$

ポテンシャル $V(x)$ を持つ系のハミルトニアン H_1 を $L^2(\mathbf{R}^1)$ 上の作用素として $H_1 := H_0 + V$ で定義する。このとき、 H_1 は自己共役であって、さらに、正の固有値を持たないことが保証される [30]。また、このポテンシャルは Agmon-ポテンシャルと呼ばれるクラスに属するので、 H_1 は特異連続な部分を持たないこともわかる [31]。

さて、この H_1 と H_0 に対する波動作用素を用いて自己相関関数 $\left| \langle \psi, e^{-itH_1} \psi \rangle \right|^2$ を書き換えよう。波動作用素 $W_\pm$ を以下で定義する：

$$W_\pm := s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_1} e^{-itH_0}.$$

$V(x) \in L^1(\mathbf{R}^1) \cap L^2(\mathbf{R}^1)$ であるから, $W_{\pm}$ が存在して, かつ完全 (complete) である [32]. ただし, 今の場合 (4.2) と違って, 一般的に上の $W_{\pm}$ はユニタリーではなく部分等長作用素となる. すなわち,

$$W_{\pm}^* W_{\pm} = 1, \quad W_{\pm} W_{\pm}^* = P_{ac}(H_1). \quad (5.6)$$

ここで, $P_{ac}(H_1)$ は H_1 の絶対連続部分空間への射影作用素である (例えば文献 [33, 34, 35] を見よ). そして特に,

$$e^{-itH_1} W_{\pm} = W_{\pm} e^{-itH_0}, \quad \forall t \in \mathbf{R}^1. \quad (5.7)$$

このとき, (5.6) と (5.7) より, 全ての $\psi \in L^2(\mathbf{R}^1)$ に対して

$$\langle P_{ac}(H_1)\psi, e^{-itH_1} P_{ac}(H_1)\psi \rangle = \langle W_{\pm}^* \psi, e^{-itH_0} W_{\pm}^* \psi \rangle \quad (5.8)$$

が成り立つ. 固有関数展開を用いることで, 運動量表示において $W_{\pm}^* \psi$ を具体的に書き下せる. 特に, 適当な実数 s と s' で,

$$s + s' = \delta, \quad s > 3/2, \quad s' > 1/2, \quad s' \leq s, \quad (5.9)$$

を満たすものを選べば, L^2 -収束に頼ることなしに,

$$(\widehat{W_{\pm}^* \psi})(k) = \int_{\mathbf{R}^1} \overline{\varphi_{\pm}(x, k)} \psi(x) dx, \quad \text{a.e. } k \in \mathbf{R}_k^1, \quad \forall \psi \in L^{2,s}(\mathbf{R}^1), \quad (5.10)$$

と表せる. ここで, $(-)$ は複素共役を表す. また, $L^{2,s}(\mathbf{R}^1)$ は重み付きの L^2 -空間であって, $\int_{\mathbf{R}^1} (1 + |x|^2)^s |\psi(x)|^2 dx < \infty$ を満たす全ての L^2 -関数 ψ からなる. さらに, 条件 (5.9) の下で, $L^{2,s}(\mathbf{R}^1) \subset L^1(\mathbf{R}^1)$ が成り立つ. $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}_k^1 \setminus \{0\}$ 上で定義される関数 $\varphi_{\pm}(x, k)$ は, H_1 (より正確には H_1 の絶対連続な部分) の固有関数である. 条件 (5.5) と (5.9) の下で, $\varphi_{\pm}(x, k)$ は $L^{2,-s}(\mathbf{R}^1)$ に属することが保証されて, (5.10) の積分が有界となる. また, 1次元-Lippmann-Schwinger 方程式を満たす: それは, 全ての $x \in \mathbf{R}^1$ と全ての $k \in \mathbf{R}_k^1 \setminus \{0\}$ に対して, 以下のように与えられる,

$$\varphi_{\pm}(x, k) = (2\pi)^{-1/2} e^{ikx} + g_{\pm}(x, k), \quad (5.11)$$

ここで

$$g_{\pm}(x, k) := \mp \frac{1}{2i|k|} \int_{\mathbf{R}^1} e^{\mp i|k||x-y|} V(y) \varphi_{\pm}(y, k) dy. \quad (5.12)$$

同様の条件により, $k \in \mathbf{R}_k^1 \setminus \{0\}$ を固定するとき, $\varphi_{\pm}(x, k)$ は x の C^1 -関数であることが保証され, 時間に依存しない Schrödinger 方程式,

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \varphi_{\pm}(x, k) = k^2 \varphi_{\pm}(x, k), \quad (5.13)$$

を超関数の意味で満たす. ここでは, 今まで述べてきた固有関数展開についての証明は行わない. これらの証明には, 文献 [36, 37] を参考にした. (5.10) 及び (5.11) を用いれば, 確率振幅 (5.8) は以

下の4つの項に分解される:

$$\begin{aligned}
\langle P_{\text{ac}}(H_1)\psi, e^{-itH_1}P_{\text{ac}}(H_1)\psi \rangle &= \langle \widehat{\psi}, e^{-itk^2/2}\widehat{\psi} \rangle \\
&+ \left\langle \int_{\mathbf{R}^1} \overline{g_{\pm}(y, k)} \psi(y) dy, e^{-itk^2/2}\widehat{\psi} \right\rangle \\
&+ \left\langle e^{itk^2/2}\widehat{\psi}, \int_{\mathbf{R}^1} \overline{g_{\pm}(y, k)} \psi(y) dy \right\rangle \\
&+ \left\langle \int_{\mathbf{R}^1} \overline{g_{\pm}(y, k)} \psi(y) dy, e^{-itk^2/2} \int_{\mathbf{R}^1} \overline{g_{\pm}(y, k)} \psi(y) dy \right\rangle.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

ここで, $\psi \in L^{2,s}(\mathbf{R}^1)$ である. 我々の目標は, 上の分解に現れた4つの項それぞれを上手く $1/t$ で押さえるための条件を求めることに帰着する. その条件の1例として, 次の命題が求まる.

命題 5.1 ハミルトニアン H_1 ($:= H_0 + V$) を持つ1次元ポテンシャル系を考える, ただし, $V(x)$ は (5.5) を満たすとする. さらに, 各 $x \in \mathbf{I}$ ($:= \text{supp} V(x)$) に対し, (5.11) にある H_1 の固有関数 $\varphi_{\pm}(x, k)$ は $C^1(\mathbf{R}_k^1 \setminus \{0\})$ 級であって, 以下の3つの条件を満たすと仮定する:

$$\gamma_{\pm} := \sup_{x \in \mathbf{I}, k \in \mathbf{R}_k^1 \setminus \{0\}} |\varphi_{\pm}(x, k)| < \infty, \tag{5.15}$$

$$\delta_{\pm} := \sup_{x \in \mathbf{I}, k \in \mathbf{R}_k^1 \setminus \{0\}} \left| \frac{\varphi_{\pm}(x, k)}{k} \right| < \infty, \tag{5.16}$$

$$\gamma_{\partial, \pm} := \sup_{x \in \mathbf{I}, k \in \mathbf{R}_k^1 \setminus \{0\}} \left| \frac{\partial \varphi_{\pm}(x, k)}{\partial k} \right| < \infty. \tag{5.17}$$

このとき, 任意の $\psi \in \text{Dom}(\widetilde{T}_0) \cap S(\mathbf{R}^1)$ に対してある定数 $C > 0$ が存在して,

$$\left| \langle P_{\text{ac}}(H_1)\psi, e^{-itH_1}P_{\text{ac}}(H_1)\psi \rangle \right| \leq \frac{C}{|t|} \tag{5.18}$$

が全ての $t \in \mathbf{R}^1 \setminus \{0\}$ について成り立つ, すなわち,

$$P_{\text{ac}}(H_1)(\text{Dom}(\widetilde{T}_0) \cap S(\mathbf{R}^1)) \subset C(H_1, 2) \tag{5.19}$$

である.

上の命題における $S(\mathbf{R}^1)$ は, 急減少関数から成る空間を表す. また, 命題において $P_{\text{ac}}(H_1)$ が現れているのは, 条件 (5.5) を満たすポテンシャル $V(x)$ の形に応じて H_1 が (負のエネルギー固有値に対応する) 束縛状態をもつ場合があるためである. つまり, 上の命題はハミルトニアンが束縛状態をもつ場合にも適用できる.

条件 (5.5) の下で,

$$C(H_1, 2) \subset P_{\text{ac}}(H_1)L^2(\mathbf{R}^1) \tag{5.20}$$

が成り立つことに注意しよう. このことは次の補題から示される.

補題 5.1 $\mathcal{H}$ をヒルベルト空間, A を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする. このとき, $C(A) \subset P_c(A)\mathcal{H}$ が成り立つ. ただし,

$$C(A) := \left\{ \psi \in \mathcal{H} \mid \exists C > 0, \exists n > 0, \forall t \in \mathbf{R}^1 \setminus \{0\}, \left| \langle \psi, e^{-itA} \psi \rangle \right|^2 \leq \frac{C^2}{|t|^n} \right\},$$

および, $P_c(A) := P_{ac}(A) + P_{sing}(A)$ である.

ここで $P_{sing}(A)$ は, A の特異連続部分空間への射影作用素である [33, 34, 35]. 上の補題より, (5.20) は直ぐに示される. $C(H_1, 2)$ の定義および上の補題から, $C(H_1, 2) \subset P_c(H_1)L^2(\mathbf{R}^1)$ が得られる. 一方, (5.5) の直ぐ後で述べたように, 命題 5.1 における H_1 は特異連続な部分を持たない, すなわち $P_{sing}(H_1) = 0$. したがって, (5.20) が成り立つ.

関係式 (5.19) と (5.20) から,

$$P_{ac}(H_1)(\text{Dom}(\widetilde{T}_0) \cap \mathcal{S}(\mathbf{R}^1)) \subset C(H_1, 2) \subset P_{ac}(H_1)L^2(\mathbf{R}^1) \quad (5.21)$$

が求まる. このとき, これらの部分空間は互いに稠密に関係付いている. 何故なら, $\text{Dom}(\widetilde{T}_0) \cap \mathcal{S}(\mathbf{R}^1)$ は $L^2(\mathbf{R}^1)$ で稠密だからである. このことは, (2.1) にある $L^2(\mathbf{R}_k^1)$ の部分空間 $\mathcal{C}_i$ を考えると良い. 以上をまとめると, (5.3) と (5.21) より, 以下の結果が求まる.

定理 5.1 命題 5.1 の全ての条件が成り立つとき, $(P_{ac}(H_1)C(H_0, 2)) \cap C(H_1, 2)$ は $P_{ac}(H_1)L^2(\mathbf{R}^1)$ で稠密である.

H_1 の特異連続な部分を無視すれば, 一般的に $P_{ac}(H_1)L^2(\mathbf{R}^1)$ は H_1 で記述されるポテンシャル系の全ての散乱状態から成る空間と見なせる. ポテンシャルの条件 (5.5) にさらに, 条件 $V(x) \geq 0$ を加えれば, $V(x)$ は明らかに (4.1) を満たす. この場合, H_0 と H_1 はユニタリー同値であって, H_1 は絶対連続である. すなわち, $P_{ac}(H_1)$ は $L^2(\mathbf{R}^1)$ 上の恒等作用素である. ポテンシャルにこの条件を加えることで, 我々が探していた結果が求まる.

定理 5.2 命題 5.1 の全ての条件に加えて $V(x) \geq 0$ が成り立つとき, $C(H_0, 2) \cap C(H_1, 2)$ は $L^2(\mathbf{R}^1)$ で稠密である.

ここで, 定理 5.2 の応用例を挙げておく.

例 5.2 箱型障壁ポテンシャル系を考える:

$$V(x) := \begin{cases} V_0 & (|x| \leq a/2) \\ 0 & (|x| > a/2) \end{cases} \quad (5.22)$$

ここで, $a > 0$, $V_0 > 0$. ポテンシャル系のハミルトニアンを $L^2(\mathbf{R}^1)$ 上の作用素 H_1 ($:= H_0 + V$) で定義する. H_1 は自己共役である. 明らかに $V(x)$ は条件 (5.5) と $V(x) \geq 0$ を満たすから, $P_{ac}(H_1) = 1$, つまり H_1 は束縛状態を持たない. また, (5.11) と (5.13) の意味での H_1 の固有関数は, 多少の計算の後, 命題 5.1 の全ての条件 (5.15), (5.16), および (5.17) を満たすことが確かめられる. よって,

今考えているポテンシャル系に定理 5.2 が適用できる. したがって, 任意の $\psi \in \text{Dom}(\widetilde{T_0}) \cap S(\mathbf{R}^1)$, 任意の $V_0 > 0$, 及び任意の $a > 0$ に対して, ある定数 $C > 0$ が存在して,

$$\left| \langle \psi, e^{-itH_1} \psi \rangle \right| \leq \frac{C}{|t|} \quad (5.23)$$

が全ての $t \in \mathbf{R}^1 \setminus \{0\}$ について成り立つ. 特に $C(H_0, 2) \cap C(H_1, 2)$ は $L^2(\mathbf{R}^1)$ で稠密である.

6 結論

時間演算子は, 時間とエネルギーの不確定性関係を量子力学の理論の枠組から導出する試みや, 原子などの量子力学的粒子の到着時間を量子論で記述する試み等において研究されてきた. 特に, 最近における後者の研究では, 作用素の自己共役性と対称性の違いや, POVM(positive operator valued measure) を用いた一般化された測定の概念などが取り入れられている. これらの試みは, 量子力学の数学的・理論的基礎にのみ現れていた数々の概念が, 現実には起こっている現象とどのように関係しているかを知る上で興味深い.

我々は, 上記の 2 つの研究の他に, 時間演算子が量子ダイナミクスと関係することを指摘してきた. 特に不等式 (3.4) が示すように, 波動関数の自己相関関数のダイナミクスが時間演算子の存在と深く関わっている可能性がある. 不等式 (3.4) は, 例えば, 1 次元自由粒子系の Aharonov-Bohm の時間演算子 (定義 2.1) の定義域に属す波動関数の自己相関関数が, 自由ハミルトニアンで時間発展するとき, $1/t^2$ より速く減衰することを主張する. この定義域が $L^2(\mathbf{R}^1)$ で稠密であることから, 自己相関関数が $1/t^2$ より速く減衰する性質は, 自己相関関数のダイナミクスの種類において支配的だと考えられる. そこで第 5 節において, この $1/t^2$ より速く減衰する性質がポテンシャルによる摂動に対してどう変わるかを 1 次元自由粒子系を非摂動系に選び考察した. この問いに対し, 幾つかの条件の下で, 摂動・非摂動系の両方の時間発展に対し, 自己相関関数が $1/t^2$ より速く減衰するような波動関数の集合が, $L^2(\mathbf{R}^1)$ で稠密であることを示した (定理 5.1, 定理 5.2). この意味で上の問いは肯定的に答えられたと言える. 摂動として箱型障壁ポテンシャルを選べば, 必要な条件が満たされることも確認した. しかし, それらの条件はポテンシャルのクラスを具体的に特定できる形に書き下せていない (命題 5.1). これは今後の課題である.

上述の特徴的な集合の稠密性は, 実は Aharonov-Bohm の時間演算子の定義域の稠密な部分空間を含むことで保証されている. この事実は, 時間演算子が量子ダイナミクスにおいて重要な役割を持つことを十分に示唆していると言えるだろう.

謝辞

本小論は, 研究会「量子情報とその周辺分野の解析的研究」(京都大, 2001 年 1 月)において発表された. この研究会において, 大変貴重なご意見を頂いた. このような研究会に参加する機会を下さった, 大矢雅則先生 (東京理科大), ならびに渡邊昇先生 (東京理科大) に感謝します. また, 貴重なご意見を下さった新井朝雄先生 (北海道大) に感謝します.

参考文献

- [1] D. H. Kobe and V. C. Aguilera-Navarro, Phys. Rev. A **50**, 933 (1994).
- [2] J. G. Muga and C. R. Leavens, Phys. Rep. **338**, 353 (2000).
- [3] W. Pauli, *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*, edited by S. Flügge, Encyclopedia of Physics (Springer-Verlag, Berlin, 1958), Vol. V, pt. 1, pp.1–168. See footnote 1 on p. 60.
- [4] E. Galapon, preprint, quant-ph/9908033.
- [5] I. L. Egusquiza and J. G. Muga, Phys. Rev. A **61**, 012104 (1999).
- [6] M. Miyamoto, J. Math. Phys. **42**, 1038 (2001).
- [7] C. R. Putnam, *Commutation Properties of Hilbert Space Operators and Related Topics*, (Springer-Verlag, Berlin, 1967).
- [8] T. Kato, Studia Math. T. **31**, 535 (1968).
- [9] R. Lavine, Proc. Am. Math. Soc. **22**, 55 (1969).
- [10] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol.III: *Scattering Theory* (Academic Press, New York, 1979), Chap. XIII, Sec. 6 and 7.
- [11] B. Misra, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **75**, 1627 (1978).
- [12] I. Prigogine, *FROM BEING TO BECOMING, Time and Complexity in the Physical Sciences* (W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1980).
- [13] 新井朝雄, ヒルベルト空間と量子力学, 共立講座, 21 世紀の数学, 第 16 巻, (共立出版, 1997).
- [14] Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. **122**, 1649 (1961).
- [15] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol.I: *Functional Analysis* (Academic Press, New York, 1972), Corollary of Theorem VIII. 14.
- [16] Reference [7], Theorem 2.2.4.
- [17] E. P. Wigner, in *Aspects of Quantum Theory*, edited by A. Salam and E. P. Wigner (Cambridge University Press, London 1972), 237-247.
- [18] A. D. Baute, R. Sala Mayato, J. P. Palao, J. G. Muga, and I. L. Egusquiza, Phys. Rev. A **61**, 022118 (2000).
- [19] K. Schmüdgen, J. Funct. Anal. **50**, 8 (1983).

- [20] K. Bhattacharyya, J. Phys. A. **16**, 2993 (1983).
- [21] E. A. Gislason, N. H. Sabelli, and J. W. Wood, Phys. Rev. A **31**, 2078 (1985).
- [22] P. Pfeifer, Rev. Mod. Phys. **67**, 759 (1995).
- [23] J. A. Yeazell, M. Mallalieu, J. Parker, and C. R. Stroud, Jr, Phys. Rev. A **40**, 5040 (1989).
- [24] A. ten. Wolde and L. D. Noordam, Phys. Rev. A **40**, 485 (1989).
- [25] C. Leichtle, I. Sh. Averbukh, and W. P. Schleich, Phys. Rev. Lett. **77**, 3999 (1996).
- [26] Reference [7], Theorem 5.16.2.
- [27] J. León, J. Julve, P. Pitanga, and F. J. de Urriés Phys. Rev. A **61**, 062101 (2000).
- [28] A. D. Baute, I. L. Egusquiza, and J. G. Muga Phys. Rev. A **64**, 012501 (2001).
- [29] M. Miyamoto, preprint, quant-ph/0105033.
- [30] B. Simon, J. Math. Phys. **41**, 3523 (2000), Sec. V.
- [31] Reference [10], Chap. XIII, Sec. 8 and Theorem XIII.33.
- [32] S. T. Kuroda, Nuovo Cimento **12**, 431 (1959), Theorem 3.1; Theorem 5.1.
- [33] Reference [15], Chap. VII, Sec. 2.
- [34] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, (Springer-Verlag, Berlin, 1966), Chap. X.
- [35] 黒田茂俊, スペクトル理論 II, 岩波講座 基礎数学 解析学 (II) xi, (岩波書店, 1979), 第 2 章.
- [36] Reference [10], Chap. XI, Sec. 6 and its appendix.
- [37] 文献 [35], 第 5 章.