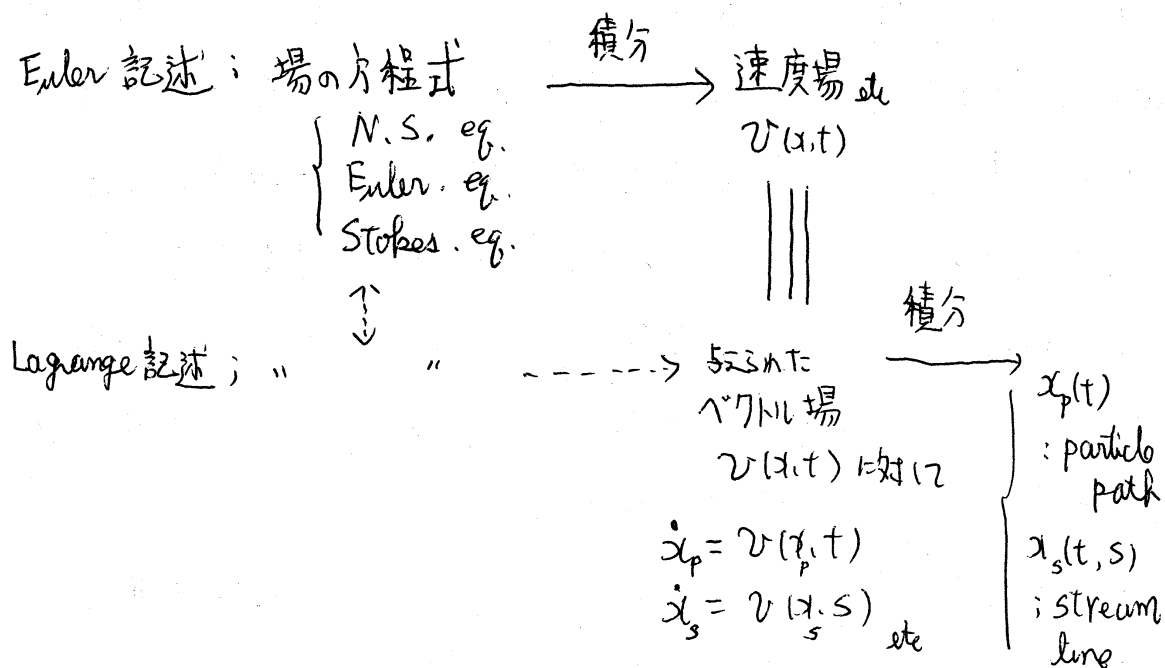


東大理 中村英史 (Fusashi Nakamura)

ラグランジュカオスとは粒子の軌道を追ってそのカオス的振舞を調べるのが目的であるが、別の立場から見直してみよう。



図をみればわかるように、ラグランジュカオスとはラグランジュ記述における速度場の積分曲線を求める操作である。ここで速度場の積分曲線と述べていたが流体力学では三種類ある。

① Stream line

$$\frac{dx}{ds} = v(x(s), t) \quad t \text{ は固定したパラメータとみる}$$

② Particle path

$$\frac{dx}{dt} = v(x(t), t)$$

③ Streak line

いわゆるインク線の流れ

よく知られているように v が定常であれば、三つの積分曲線は一致するが非定常だと様子が全く異なる。Stream line は各時刻での速度場の積分曲線で、時刻 t をパラメータとして持つており領域中交叉したりすることは無い。これに対し Particle path は一つの粒子の軌跡を時間的に追ったもので、非定常の場合は、自分自身と交叉するなどのカオス的振舞を示す要素を持つており Mixing Problem にも関連している。最後の Streak line は初期条件を空間的には固定して時間的にずらしながら領域中にトレーサーを送り出しその後の様子を見るもので、ここでは扱わない。

まとめると、ラグランジュカオスとは、非定常速度場の非自励系としての積分曲線のことである。

§2 カオスとなる原因

§1 の最後で “ラケランジュカオスとは……積分曲線……” と書いたがもちろんすべての非定常ベクトル場の積分曲線がカオスの振舞をする分ではない。乱流などの Euler 記述においては速度場のカオスの振舞の原因は、速度場の支配方程式である Navier-Stokes 方程式中の速度場についての非線項である。(mm 部)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} = - \underbrace{(v \cdot \nabla) v}_{\text{mm}} - \nabla p + \nu \Delta v \\ \operatorname{div} v = 0 \end{array} \right.$$

では Particle Path はどうだろうか。

$$\dot{x} = v(x, t)$$

上式二つを較べてみればわかるように、Particle Path の非線形性は速度場 v が x の関数として非線形性を持つばかりでこれはむしろごく一般的である。又さらに進んで速度場 v そのものは解析的で層流であっても、Particle Path は複雑な振舞をする可能性もある。実際、コーヒーにミルクを入れたり（あまり速くかき混ぜてはダメ）、すみ絵流は、流れは Stokes 流と近似され得る場合でもミルクやすみ絵のトレーサーはラケランジュカオスとして複雑な configuration を示すのである。よって、速度場そのものの非線形性がなく流れ

が層流であつても Particle Path を見ればカオス的状況を観察できるし、又、Stokes 流でも Mixing Problem に対するモデルとみなせるのである。

§3 解析法

今まで述べた様に Particle Path は元の速度場の方程式からみれば二回積分しなくてはならないが、カオス的振舞を見るには速度場は乱れていなくともよい。むしろ層流においてもカオス的振舞がみられるという事が興味深い。(もちろん非定常でなくてはならない。) これは非定常流の Stream line と Particle Path の定性的差の現われであるが、突き詰めて考えれば非自励系の常微分方程式の積分曲線を空間に射影しているからである。時間軸方向にもう一つ次元を加えれば、自励系となってしまう。ということは逆に考えてカオス的振舞を示す Particle Path でも何らかの秩序構造が見られるかも知れない。そこで空間内に固定した断面と Particle Path との交点をとった Poincaré Map を調べてみた。

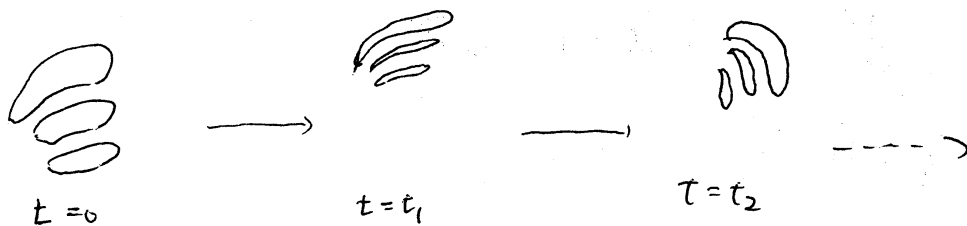
さて、速度場として何を持つてくるかというのは重要な問題であるが、ここでは今まで述べた理由から Stokes 流を考

える事にした。領域としては円柱を考へ軸方向には周期的であるとした。Stokes 流を持つてきたのは、

- ① 解析解の存在
- ② 速度場の重ね合わせができる

からである。

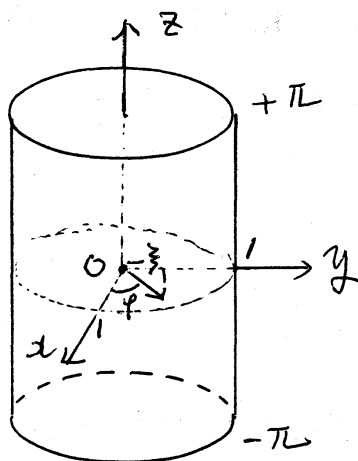
まず、定常解を求めそれに時間周期的な外力を加えた。外力は速度場の時間周期的成分を打ち消すように与えられていて、多少人工的ではあるがこうすると各時刻の Stream line 族は定常解の Stream line 族と位相的には同値であるという重要な性質が得られるのである。(下図)



この様な流れの中に落とされたトレーサーは次々と Stream line (この場合は全て閉じている!) を渡り歩いて、複雑な軌道を描くのである。

§4 計算

次の様な configuration で数値計算した。



円柱座標

軸方向 $z \in [-\pi, \pi]$ 動径方向 $\xi \in [0, 1]$ 角度方向 $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$\vec{v} \equiv \vec{v}(z, \xi, \varphi) = v_z \vec{e}_z + v_\xi \vec{e}_\xi + v_\varphi \vec{e}_\varphi$$

Stokes 流

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad } p + \nu \Delta \vec{v} \\ \text{div } \vec{v} = 0 \end{cases}$$

境界条件

- 定常流 $\iff$ 非撓動系

$$v_z|_{\xi=1} = \frac{1}{2} \sin z \sin \varphi$$

$$v_\xi|_{\xi=1} = 0$$

$$v_\varphi|_{\xi=1} = \frac{1}{2} \cos z (1 + \cos \varphi)$$

上の条件のもとでの厳密解は次の様になる。

$$v_2 = \sin z \sin \varphi \\ \times \left[C_{\varphi} \left\{ -I_0(z) + \frac{1}{3} I_2(z) \right\} + (D_+ - D_-) I_1(z) \right]$$

$$v_3 = \cos z \sin \varphi \\ \times \left[C_{\varphi} \frac{2}{3} I_1(z) + D_- I_0(z) - D_+ I_2(z) \right]$$

$$v_{\varphi} = \cos z \cdot \hat{B}_1 \cdot I_1(z) \\ + \cos z \cos \varphi [D_- I_0(z) + D_+ I_2(z)]$$

$I_n(z)$: n 次の変形 Bessel 函数

定数 :

$$C_{\varphi} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{2} C_{1\varphi} + \frac{1}{2} C_{2\varphi} \right)$$

$$D_- = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{2} D_{1-} + \frac{1}{2} D_{2-} \right)$$

$$D_+ = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{2} D_{1+} + \frac{1}{2} D_{2+} \right)$$

$$\Delta = \frac{2}{3} \left\{ I_1^2 (I_0 + I_2) + I_0 I_2 (I_2 - 3I_0) \right\} > 0 \quad I_n \equiv I_n(1)$$

$$C_{1\varphi} = \frac{1}{2} I_1 (I_2 - I_0)$$

$$D_{1-} = \frac{1}{6} (I_2^2 - 3I_0 I_2 + 2I_1^2)$$

$$D_{1+} = \frac{1}{6} (I_0 I_2 - 3I_0^2 + 2I_1^2)$$

$$C_{2\varphi} = 2I_0 I_2$$

$$D_{2-} = -\frac{2}{3} I_1 I_2$$

$$D_{2+} = \frac{2}{3} I_1 I_0$$

$$\hat{B}_1 = \frac{1}{2I_1}$$

この主流の境界条件を時間周期的に変動させることにより
擾動を与える。すなわち、

$$v_x|_{z=1} = \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \sin \frac{2\pi}{T} t\right) \sin z \sin \varphi$$

この時、解の形式的型は変わらない。定数部の $\varepsilon = 3$ で、

$$C_{\psi} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{2} C_{1\psi} + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \sin \omega t \right) C_{2\psi} \right)$$

$$D_- = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{2} D_{1-} + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \sin \omega t \right) D_{2-} \right)$$

$$D_+ = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{2} D_{1+} + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \sin \omega t \right) D_{2+} \right)$$

と、変わったわけである。

ここで注意しなければならないのは、擾動系の速度場はもはや Stokes 流ではないことである。すなわち Γ が非常に大きく準定常とみるか、あるいは $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ を打ち消す様な外力を加えたと解釈しなくてはならない。しかしながら後にも述べる様にこの形の速度場の stream line は各時刻でトポロジーが同じであるので、particle path の様子の違いがはっきり見えてくるという利点がある。

さて今回の解析では題に示した様に局所的な事柄を対象にした。すなわち、特定の積分曲線が主流と擾動系との間に異なる振舞を不すかを調べた。その前に速度場と stream line

の一般的性質を列挙しておこう。

● 非摂動系の速度場と (stream) line の特徴

$$\textcircled{1} \quad v_z(-z) = v_z(z), \quad v_\varphi(-z) = v_\varphi(z), \quad v_r(-z) = -v_r(z)$$

つまり $z \in [0, \pi]$ のみで考えればよく $z \in [0, \pi]$ はその対称 ($z=0$ 面に関する) 移動から得られる

$$\textcircled{2} \quad v_z\left(\frac{\pi}{2}+z\right) = v_z\left(\frac{\pi}{2}-z\right), \quad v_z\left(\frac{\pi}{2}+z\right) = -v_z\left(\frac{\pi}{2}-z\right), \quad v_\varphi\left(\frac{\pi}{2}+z\right) = -v_\varphi\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$$

line は $z = \frac{\pi}{2}$ について対称、つまりちぎれて閉じている。

よって z 軸上安定な周期軌道かホモクリンティック軌道のみがこれから得られる。

$$\textcircled{3} \quad v_z|_{z=0} = v_z|_{z=\pi} = 0$$

line はすべて $z \in [0, \pi]$ に閉じ込められている。 $z=0, \pi$

では slip condition を考えられる

$$\textcircled{4} \quad \text{stagnation points: } \vec{x}_0, \text{ a.t. } \vec{v}(\vec{x}_0) = \vec{0}$$

$$1. \quad z=0, \quad \varphi=\pi, \quad \xi=0.00382 \quad \text{elliptic}$$

$$2. \quad z=\pi, \quad \varphi=\pi, \quad \xi=0.00382 \quad \text{elliptic}$$

$$3. \quad z=\frac{\pi}{2}, \quad \varphi=\pi, \quad 0.00382 < \xi < 1.0 \quad \text{hyperbolic}$$

固有ベクトルは $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 面に平行

$$4. \quad z=\frac{\pi}{2}, \quad \varphi=0, \quad 0 \leq \xi \leq 1.0 \cup \varphi=\pi, \quad 0 < \xi < 0.00382 \quad \text{elliptic}$$

これらは速度場の式から求められるものである。

この様な主流の stream line のうち特に stagnation point を通らないものを一本えらび、C とする。C は、

$$t=0, \quad z = \frac{5}{6}\pi, \quad \xi = 0.8, \quad \psi = 0.0$$

という初期条件で出発した周期軌道で、その周期は $T_0 = 16.0$ である。(図1)、ただし図1は、左上の図は、円柱の上からの投影図、左下は -y 方向からの (x-z 平面内の) 投影図、右下は +x 方向からの (y-z 平面内の) 投影図である。以下、この形式で作図する。

このCに対し、2種類の擾動を加える。どちらも同じ初期条件から出発し、擾動の振幅 ε は 0.1 で、一つはCと同じ周期 $T_1 = 16.0$ の時間周期の擾動がある場合の C_1 、もう一つは $T_2 = 10.0$ の場合の C_2 である。特に C_1 は共鳴現象が期待できる。(図2, 3)。

ところが、図2、図3を見ればわかるように C_1 、 C_2 はたいがう様子が異なる。Cの周期の30倍の時間、particle pathを追跡したのであるが、共鳴現象が期待せられた C_1 より C_2 の方がはるかに乱れている。これをもっと詳しく見るため、各座標の時間変動をプロットしたのが図4~6である。 C_1 、 C_2 とCの周期や外力の周期よりはるかに長い周期を持つことがわかる。さらに0.1秒おきに409.6秒記録した各座標データをフーリエ変換してみた。(図7~9) これらを較べてみると次の様

な特徴がわかる。

- C_1 も C_2 も C に対して長い周期の変動が加わる。特に C_2 の方が影響を受けやすい。直観的には、 C_1 の方が共鳴を受けて不安定になりやすいと思われる。実際、図7と図8を較べればわかるように C_1 はある種の共鳴現象とみられるが不安定ではない。他方図9を見れば C_2 が共鳴現象でないことは明らかである。
- 図4-6をみて、3座標の変動の受け手の違いに気がつく。 C_1 では $T = 16.0$ の振動に長周期擾動が加わり、 ε modulate されているとみえるが、 C_2 では長周期変動の上に短い周期変動が小さく重ねられている。

以上よりさらに2つの数値計算をした。

- i) 加えた外力の周期ごとに particle の位置を Plot する。(図10, 11)
- ii) $\varphi = 0.0$ と $\varphi = \pi$ 2つの平面と断面とする Poincaré map を Plot する。(図12, 13)

図10-2をみるとわかるとおり、 $t = 16.1n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) で particle を Plot すると向の構造もみえながら $t = 16.0n$ で Plot すると(図10-1)、見事に閉曲線を得る。これは C_1 が共鳴

現象と解釈され得ることを示している。図11をみればやはり C_2 は共鳴現象ではなく予測不能なカオス的振舞を示している。図10, 11のような操作は時間軸に周期的な断面を置く Poincaré map であるが、断面が物理空間 (3次元) のためまた見にくい。そこで11)のような空間的 Poincaré map をとった。するとあれほど異なってみえた C_1 , C_2 に重要な共通点があることがわかる。すなわち両者ともある曲面上に乗っているという点である。(図12, 13)。(注; この主張はすべての角度へ向に断面をとらなければ正当化できな。ここには載せないが実際そうになっている。)。ただし, C_1 , C_2 の違いは歴然としていて C_2 の場合は x - z 平面に大きく広がっていて $x < 0$ の領域にも伸びている。さて, この Poincaré map でも実はまた3次元性をもつ。すなわち, 今度は時間軸へ向は降りてしまふからである。そこで, 図14, 15のような解析をした。図中, $x_p(n)$ は n 回目に x - z 平面を横切ったときの x 座標であり, $t \bmod T$ は, 横切った時刻 t (正確には n 回目に横切った時刻 t_n) を振動の周期 T で割った余りである。図14-1, 2を見ればわかるように C_1 はほぼ23回ごとに x - z 平面の同じ点の付近を通る。この周期は 144.27 [sec] である。一方図15をみると, C_2 の場合は全く周期性がなくカオス的振舞を示すことがわかる。

§5 まとめ

今回の計算で以下のことがわかった。

- 中立的安定な周期軌道 γ (周期 T) に時間周期的な摂動を加えると摂動の周期が T と同じな時は, $\text{particle path } \gamma_t$ は物理空間内だけでは不規則に見えるが, Poincaré map をとって自由度を下げる γ の長周期な modulation を受けている。
- 摂動の周期が T の整数比であっても, カオス的振舞を示す。

今後は摂動の周期をいろいろ変化させた時の particle path の様子, 特に周期性からカオス性への分岐を調べる必要がある。

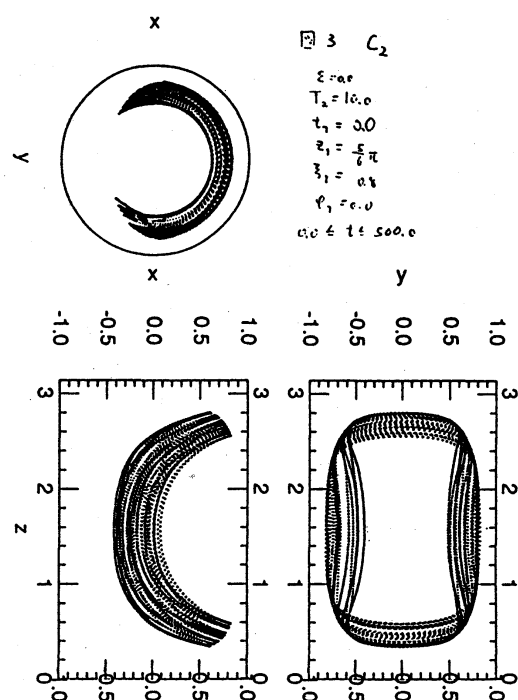
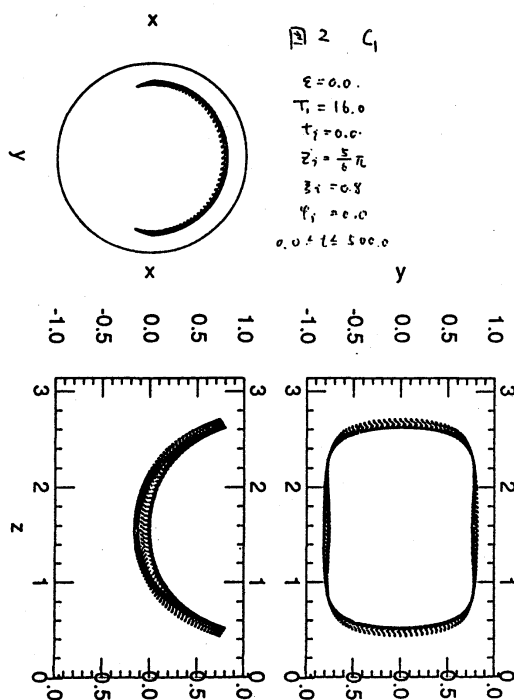
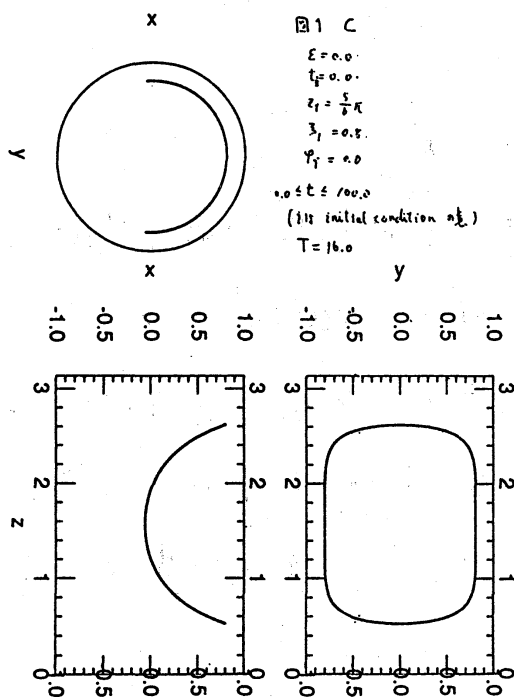


图 4-1 : C

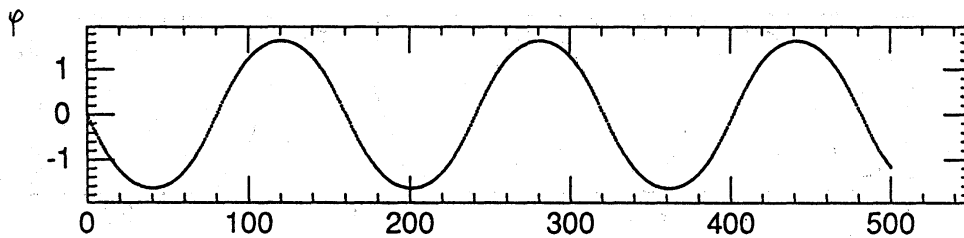
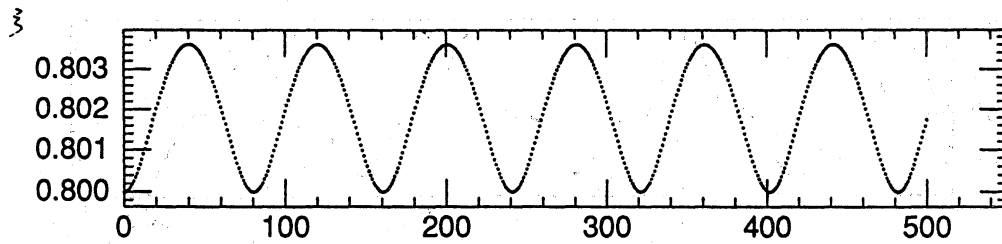
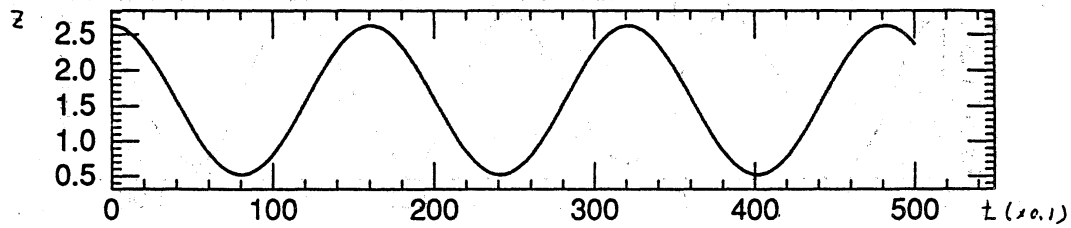
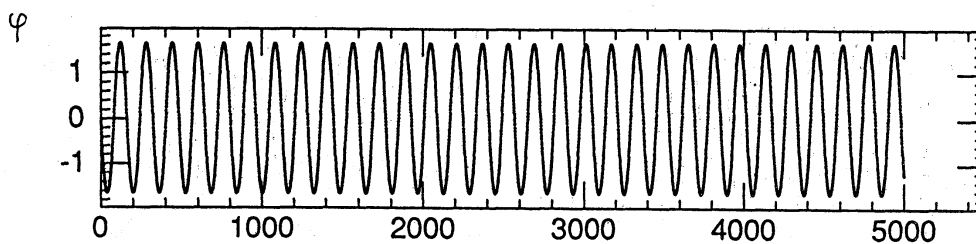
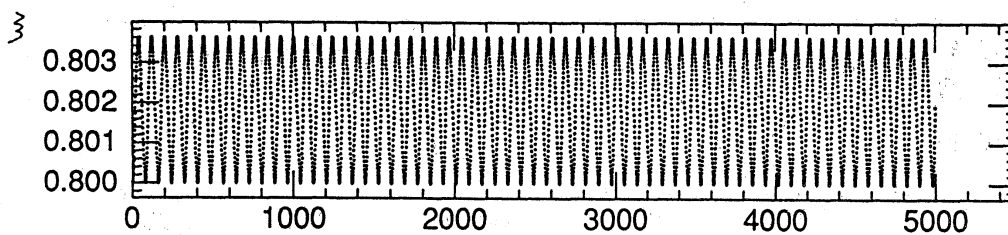
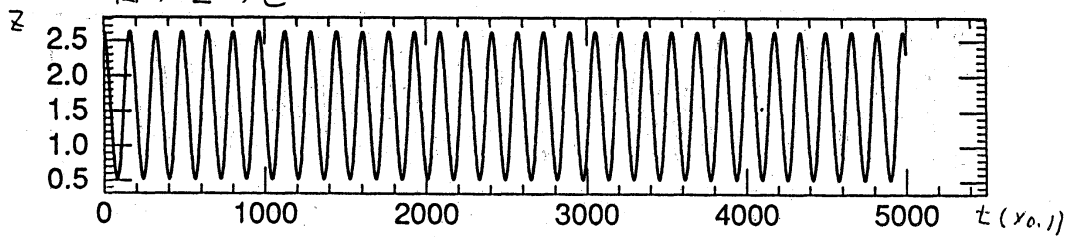
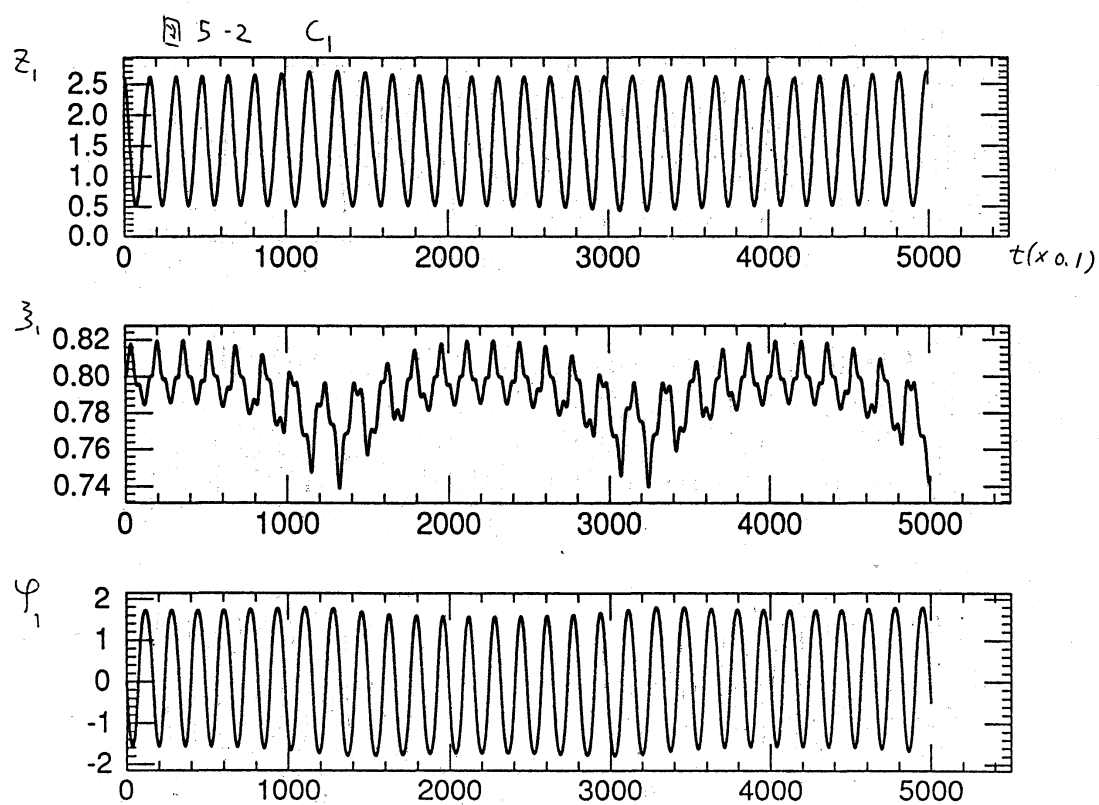
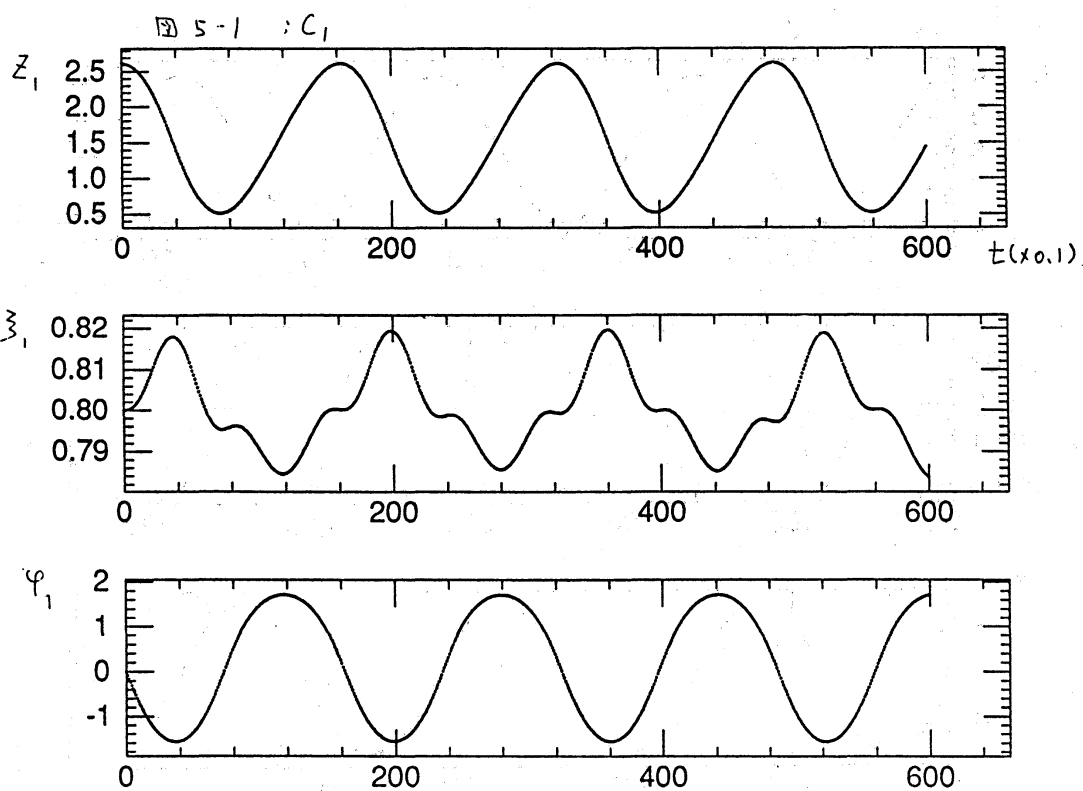


图 4-2 : C





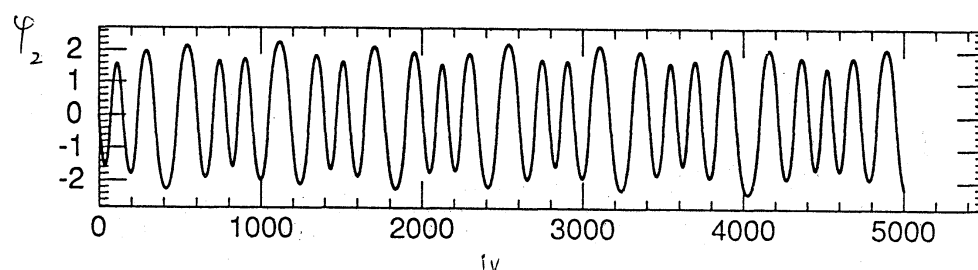
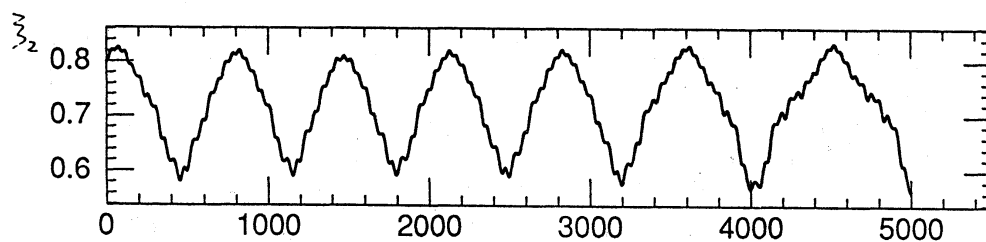
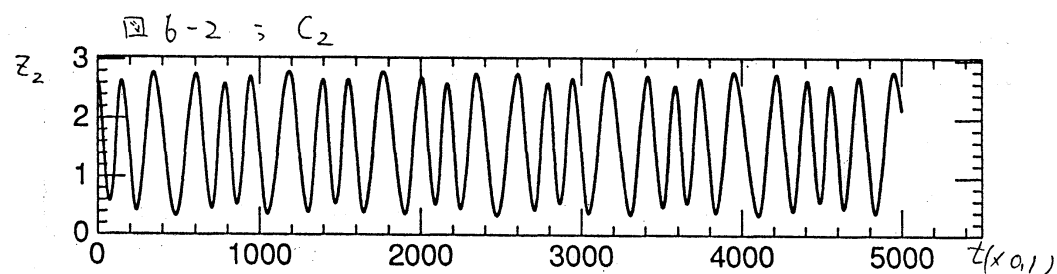
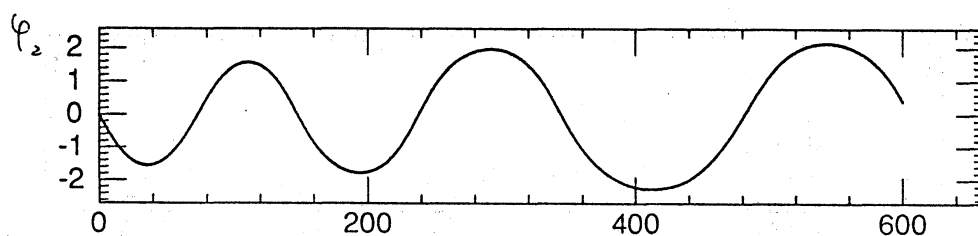
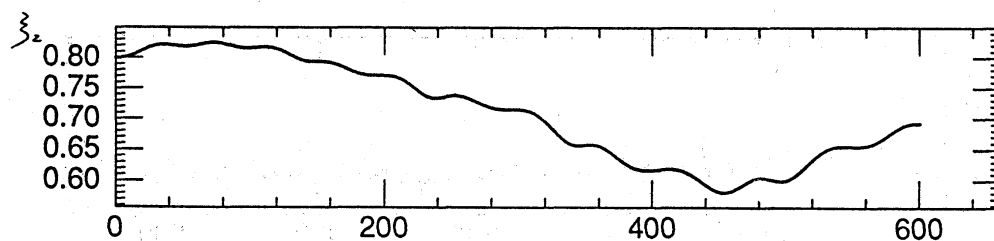
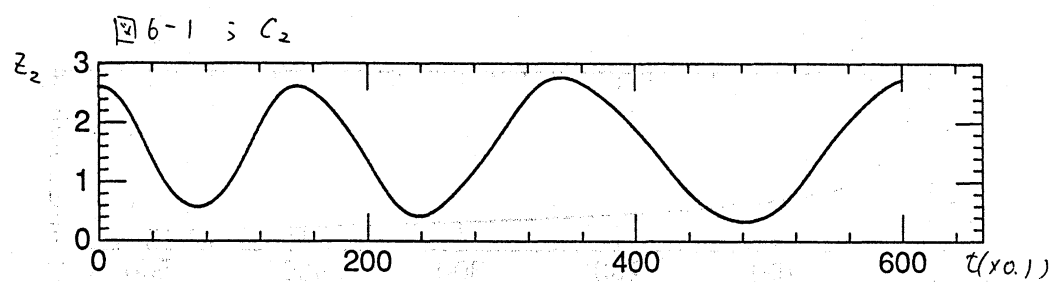


Fig 7 : C

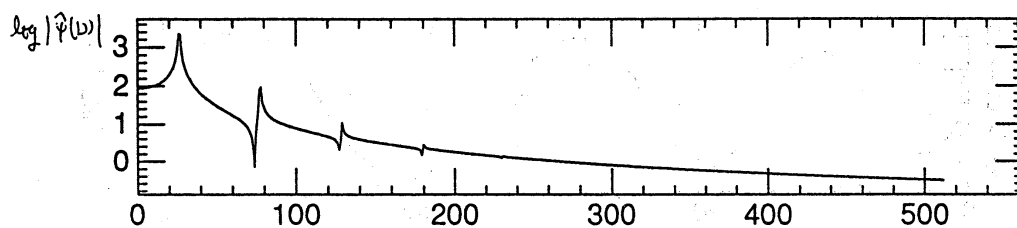
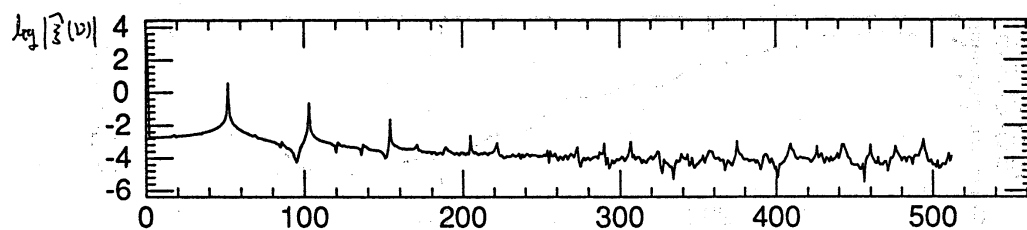
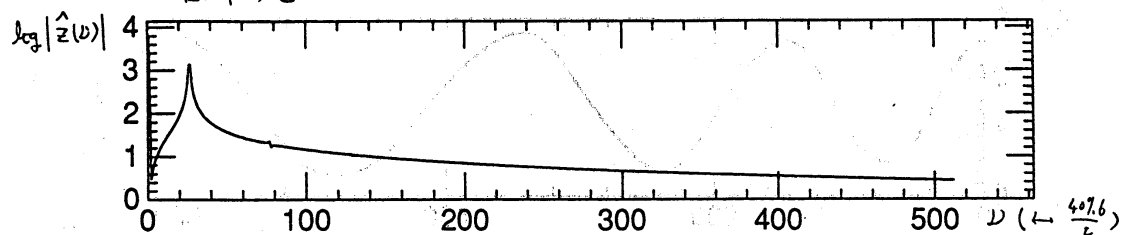
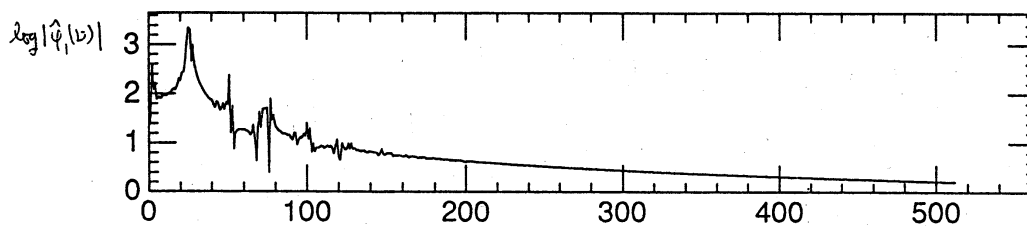
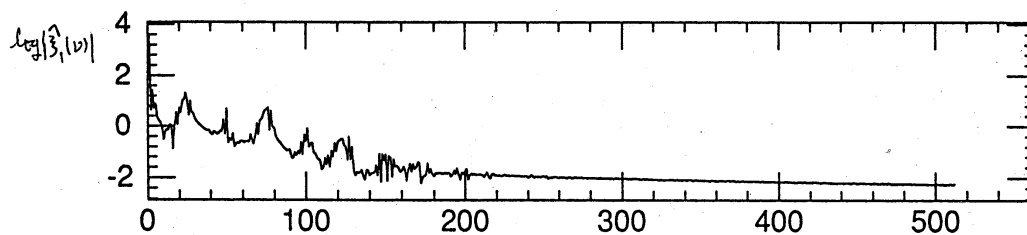
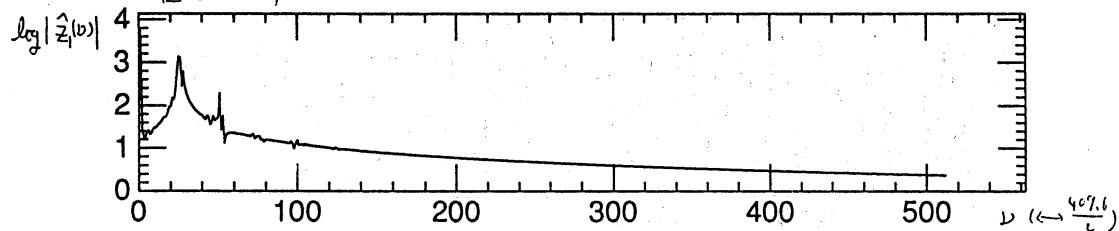
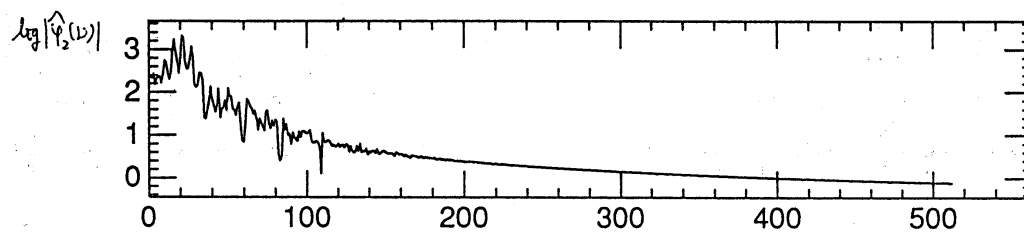
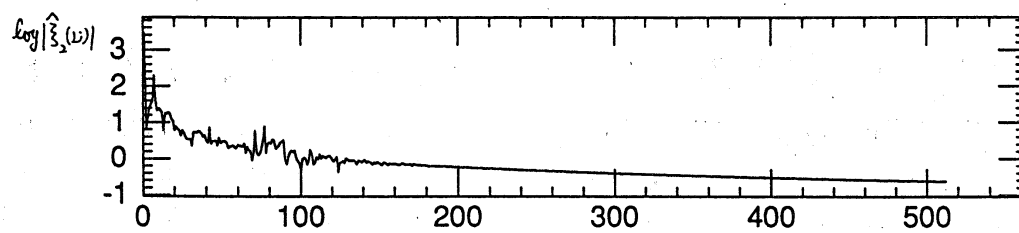
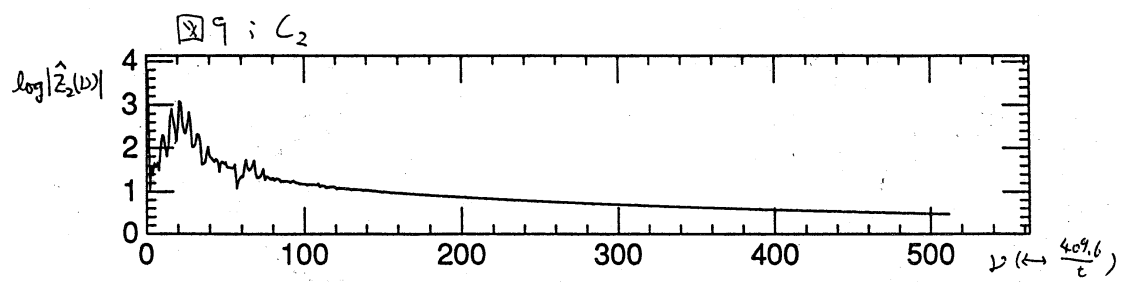
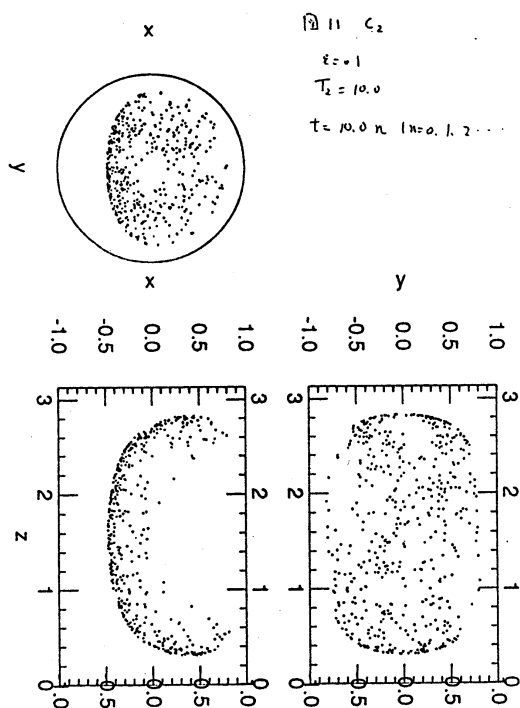
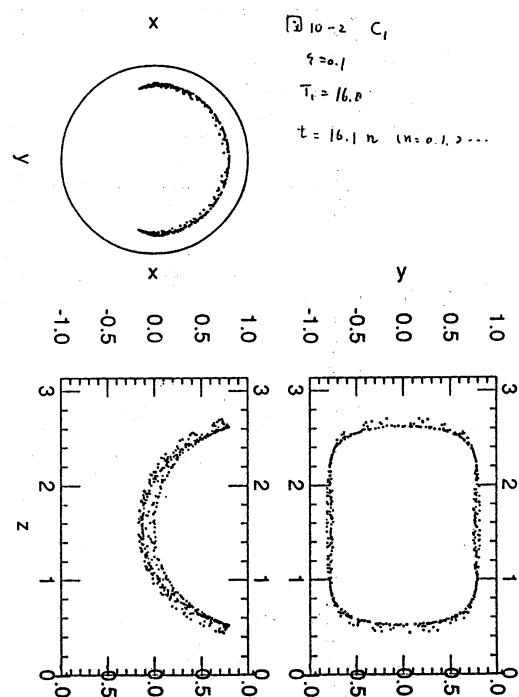
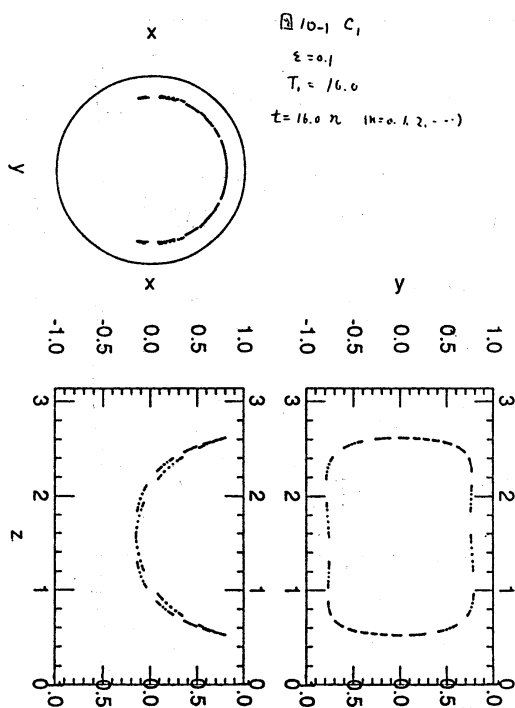


Fig 8 : C_1







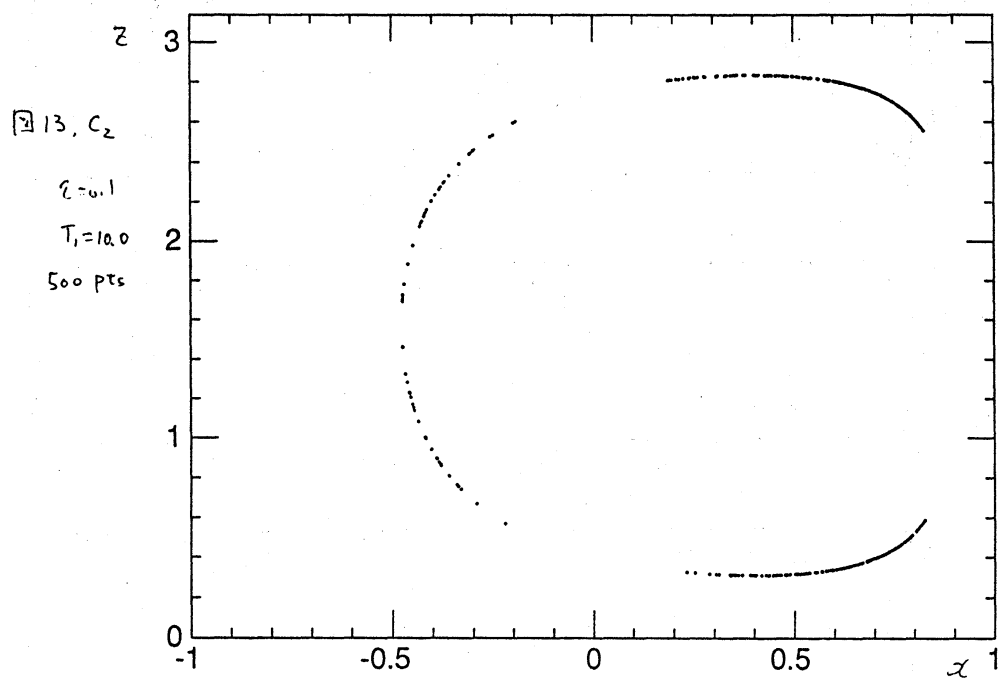
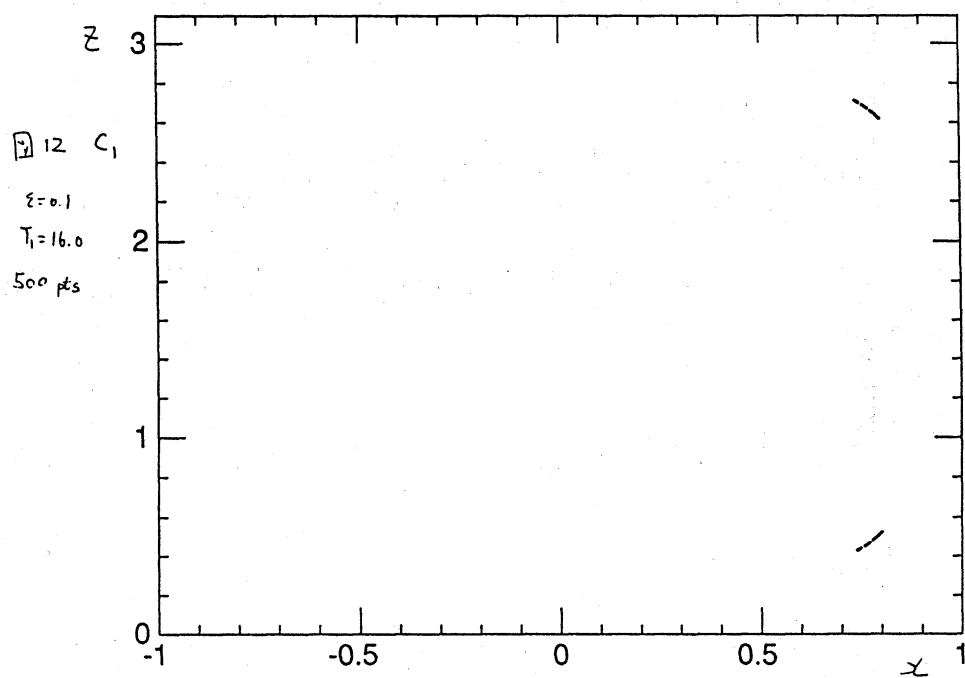
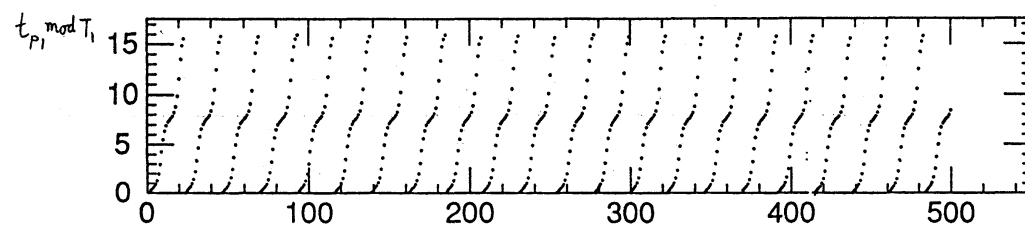
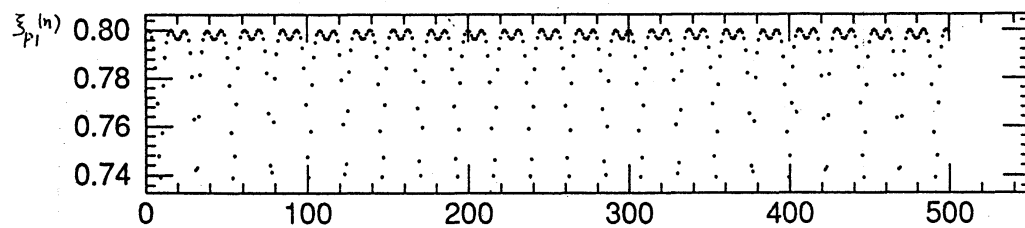
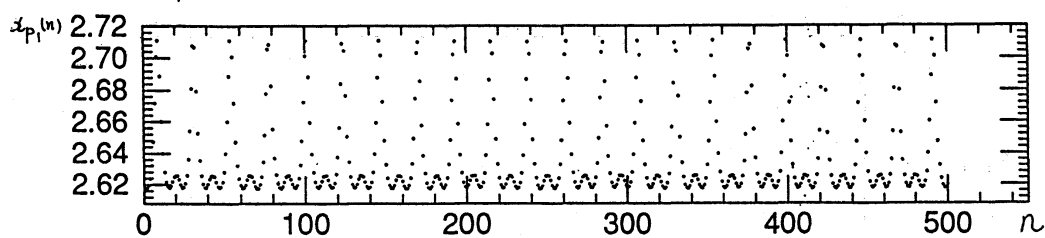
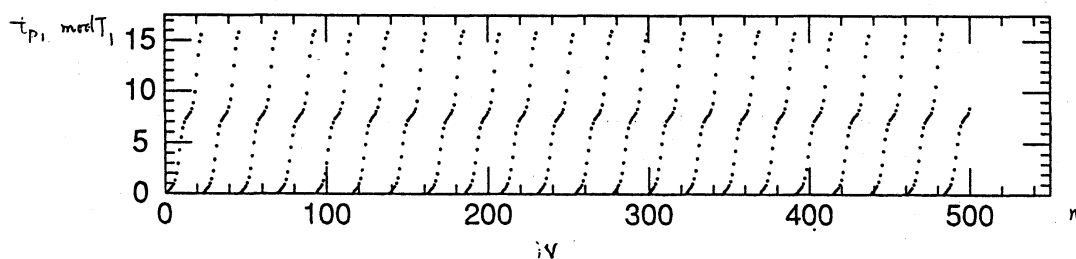
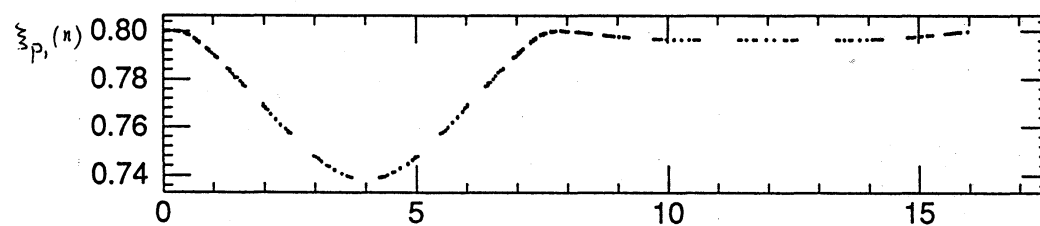
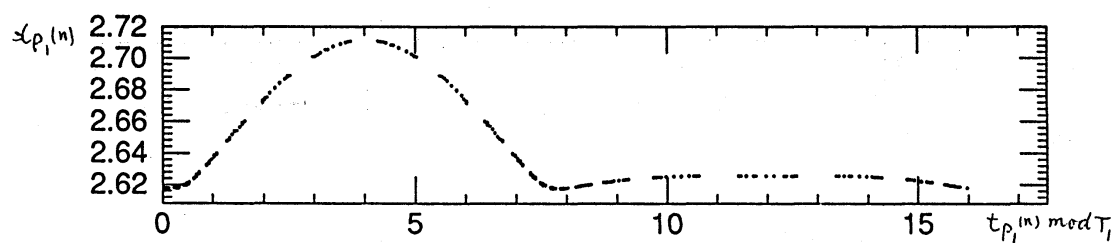
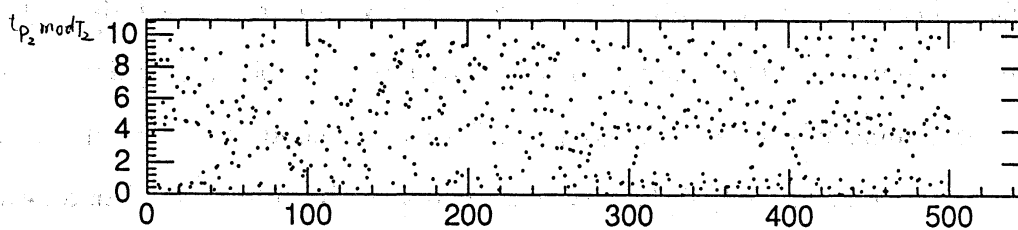
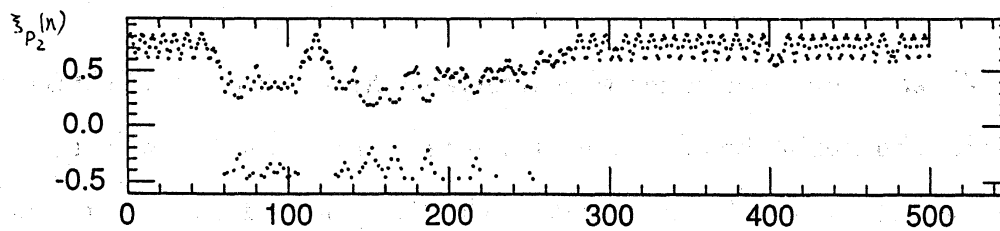
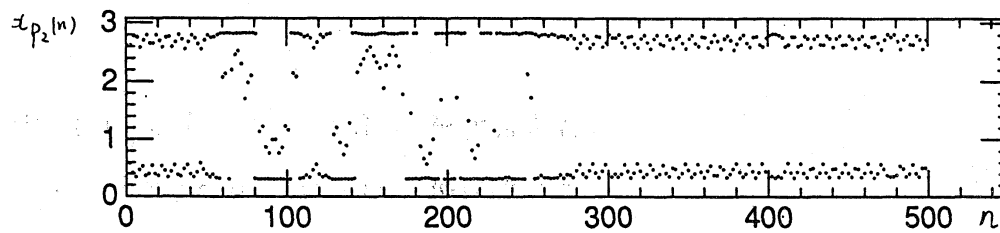


Fig 14-1; C_1 Fig 14-2; C_1 

15.1 : C_2



15.2 : C_2

