

ロボット制御の微分方程式の固有値問題

埼玉大学理学部 辻岡邦夫 (Kunio Tsujioka)

ロボットの制御において、材質の軽量化、省エネルギー化のため、アームの弾力性は重要である。アームの運動が粘性項を持つ双曲型微分方程式の初期値境界値問題

$$(1) \quad u_{tt}(x,t) + 2\delta\alpha u_{txxxx}(x,t) + \alpha u_{xxxx}(x,t) = g(x)f(t) \quad (0 < x < 1, t > 0)$$

$$(2) \quad u(0,x) = a(x), \quad u_t(0,x) = b(x) \quad (0 < x < 1)$$

$$(3) \quad u(0,t) = u_x(0,t) = u_{xx}(1,t) = u_{xxx}(1,t) + (m/\rho)u_{xxxx}(1,t) = 0$$

で表される場合を考える。 m はアーム先端の集中荷重、 ρ はアームの線密度、 δ は粘性定数で、 $\alpha = EI/\rho$ とし、 E はアームのヤング率、 I は断面の二次モーメントである。 $f(t)$ はアームの回転角加速度、 $g(x)$ は固定された関数とする。アームの運動は $f(t)$ を通して制御される。境界条件(3)における $(m/\rho)u_{xxxx}(1,t)$ なる項が、アーム先端に強い効果を及ぼしている(坂和[1])。境界条件

$$u(0) = u'(0) = u''(1) = u'''(1) + k u''''(1) = 0 \quad (k = m/p)$$

を満たす関数 u に対して

$$A(k)u = u''''$$

とおくことにより, (1)-(2)-(3) を $L^2(0,1)$ における

2階の発展方程式の初期値問題

$$(4) \quad d^2u/dt^2 + 2\delta d A(k)du/dt + \alpha A(k)u = g f(t)$$

$$(5) \quad u(0) = a, \quad u_t(0) = b$$

で表す。 $g = g(x)$, $a = a(x)$, $b = b(x)$ は $L^2(0,1)$ の関数である。境界条件と作用素 $A(k)$ の階数が等しいので, $A(k)$ の扱いには注意を要する。 $A(k)$ の厳密な定義は後で与えるが, その前に, 固有値問題

$$(6) \quad u''''(x) - \lambda u(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

を次の境界条件のもとで考える。

$$(7) \quad 0 < k < \infty \text{ のとき } u(0) = u'(0) = u''(1) = u'''(1) + k u''''(1) = 0$$

$$k = \infty \text{ のとき } u(0) = u'(0) = u''(1) = u(1) = 0$$

$k = \infty$ の場合の境界条件は, 形式的に $k < \infty$ の場合の極限である。すなわち

$$u'''(1) + k u''''(1) = 0$$

の両辺を k で割って $k \rightarrow \infty$ とすると

$$u''''(1) = \lambda u(1) = 0$$

から, $u(1) = 0$ を得るからである。 $k = \infty$ の場合, $L^2(0,1)$

における作用素 $A(\infty)$ を次のように定義する。

$$D(A(\infty)) = \{ u \in L^2(0,1); u(0) = u'(0) = u''(1) = u(1) = 0 \}.$$

$A(\infty)$ は $L^2(0,1)$ における正值自己共役作用素であり、その固有値、固有関数は次のように与えられる。

定理 1 作用素 $A(\infty)$ の固有値は (6)–(7) の固有値であり、次の (8)–(9) を満たす $\omega_n(\infty)$ を用いて $\lambda = \omega_n(\infty)^4$ ($n=1, 2, \dots$) で表される。

$$(8) \quad \omega_n(\infty) \in (n\pi, (n+\frac{1}{2})\pi)$$

$$(9) \quad \sinh(\omega_n(\infty)) \cos(\omega_n(\infty)) - \cosh(\omega_n(\infty)) \sin(\omega_n(\infty)) = 0.$$

対応する固有関数 $\psi_n(\infty) = \psi_n(\infty, x)$ が

$$\begin{aligned} \psi_n(\infty, x) &= \cosh(\omega_n(\infty)x) - \cos(\omega_n(\infty)x) \\ &\quad - r_n(\infty)(\sinh(\omega_n(\infty)x) - \sin(\omega_n(\infty)x)) \\ r_n(\infty) &= (\cosh(\omega_n(\infty)) + \cos(\omega_n(\infty))) / (\sinh(\omega_n(\infty)) \\ &\quad + \sin(\omega_n(\infty))) \end{aligned}$$

で与えられる。 $\psi_n(\infty)$ を $L^2(0,1)$ で正規化した $\varphi_n(\infty)$ は $L^2(0,1)$ の完全正規直交系である

$0 < k < \infty$ のときを調べる。

定理 2 (i) $0 < k < \infty$ のとき、(6)–(7) の固有値は次の (10)–(11) を満たす $\omega_n(k)$ を用いて $\lambda = \omega_n(k)^4$ ($n=0, 1, 2, \dots$) と表される。

$$(10) \quad \omega_n(k) \in (n\pi, (n+\frac{1}{2})\pi)$$

$$\begin{aligned}
 (11) \quad & 1 + \cosh(\omega_n(k)) \cos(\omega_n(k)) \\
 & + k \omega_n(k) (\sinh(\omega_n(k)) \cos(\omega_n(k)) - \cosh(\omega_n(k)) \sin(\omega_n(k))) \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

対応する固有関数 $\psi_n(\infty) = \psi_n(\infty, x)$ が

$$\begin{aligned}
 \psi_n(k, x) &= \cosh(\omega_n(k)x) - \cos(\omega_n(k)x) \\
 &\quad - r_n(k) (\sinh(\omega_n(k)x) - \sin(\omega_n(k)x)) \\
 r_n(k) &= (\cosh(\omega_n(k)) + \cos(\omega_n(k))) / (\sinh(\omega_n(k)) + \sin(\omega_n(k)))
 \end{aligned}$$

で与えられる。

(ii) $\psi_n(k)$ は $L^2(0, 1)$ では直交しないうが、次の意味で直交性が成立する。 $H = L^2(0, 1) \times \mathbb{R}$ に内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を

$$(12) \quad \langle \{u, \alpha\}, \{v, \beta\} \rangle = (u, v) + k \alpha \beta$$

と、入れると $\{\psi_n(k), \psi_n(k, 1)\}$ は H で直交する。

$$(13) \quad \langle \{\psi_n(k), \psi_n(k, 1)\}, \{\psi_m(k), \psi_m(k, 1)\} \rangle = 0 \quad (m \neq n)$$

$\omega_n(k)$, $\psi_n(k)$ の n, k についての性質を調べる。

定理 3 (i) $0 < \omega_n(\infty) - (n + \frac{1}{4})\pi \leq 2 \exp(-2n\pi)$

($n = 1, 2, \dots$)

(ii) $n\pi < \omega_n(\infty) < \omega_n(k) < (n + \frac{1}{2})\pi$ ($n = 1, 2, \dots$)

(iii) 任意の $k_0 > 0$ に対し, C_1, C_2 が存在して

$$0 < \omega_n(k) - \omega_n(\infty) \leq C_1 (k(n+1))^{-1}$$

$$|\psi_n(k, x) - \psi_n(\infty, x)| \leq C_2 (k(n+1))^{-1}$$

($k_0 \leq k < \infty$, $\omega_0(\infty) = 0$, $\psi_0(\infty, x) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$)

これより, $k < \infty$ $\omega_n(k) \rightarrow \omega_n(\infty), \varphi_n(k, x) \rightarrow \varphi_n(\infty, x)$

($k \rightarrow \infty, n=1, 2, \dots$)

$\omega_0(k) \rightarrow 0, \varphi_0(k, x) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$)

$k \rightarrow \infty$ のとき $\varphi_0(k)$ は「退化」し $\{\varphi_n(k)\} (n=1, 2, \dots)$ が $L^2(0, 1)$ で基底をなす。すなわち

定理 4 ある $k_1 > 0$ が存在して, $k_1 \leq k < \infty$ のとき, $\{\varphi_n(k)\} (n=1, 2, \dots)$ は $L^2(0, 1)$ でリース基底をなす。

$k_1 \leq k < \infty$ のとき, 任意の $u \in L^2(0, 1)$ に対し, u の $x=1$ での trace τ

$$(14) \quad \tau u(1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(k, 1)$$

とおく。ただし $u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(k)$ である。(14)の右辺の収束は $\{\varphi_n(k), \varphi_n(k, 1)\} \in H$ にベッセルの不等式を適用すれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(k, 1)^2 < \infty$$

を得ることから分かる。作用素 $A(k)$ を次のように定義する。

$$\begin{cases} D(A(k)) = \{u \in H^2(0, 1); u(0) = u'(0) = u''(1) = u'''(1) + \\ \quad k \tau u'''(1) = 0\} \\ A(k) u = u'''' \quad (u \in D(A(k))) \end{cases}$$

$\{\varphi_n(k)\}$ を用いて, $A(k)$ は次のように表される。

$$\text{定理 5} \quad D(A(k)) = \left\{ u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \varphi_n(k); \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 n^8 < \infty \right\}$$

$$A(k)u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \omega_n(k)^4 \varphi_n(k), \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \varphi_n(k)$$

この定理を用いれば (4) - (5) が固有関数展開で解ける。

定理 6 $a \in D(A(k)), b \in L^2(0,1)$ のとき (4) - (5) の解は

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \varphi_n(k)$$

の形で得られる。ただし $u_n(t)$ は 次の常微分方程式の初期値問題の解である。

$$\begin{cases} u_n''(t) + 2\delta\alpha \omega_n(k)^4 u_n'(t) + \alpha \omega_n(k)^4 u_n(t) = g_n f(t) \\ u_n(0) = a_n, \quad u_n'(0) = b_n \end{cases}$$

ただし, $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \varphi_n(k), a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(k), b = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(k)$ とする。

定理 7 $f = 0, \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|n^4 + |b_n|n^2) < \infty$

のとき, 上の解は, 境界条件

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u_{xx}(1,t) = u_{xxx}(1,t) + k u_{xxxx}(1,t) = 0$$

を満たす。

注 1 坂和-松野-福島 ([1]) は (1) - (3) を解くため (12) を内積とするヒルベルト空間を考へ, 固有関数展開を用いた。 $\{\varphi_n(k), \varphi_n(k,1)\} \quad (n=0,1,2,\dots)$ を H で正規化したものを同じ記号でかく。 $\{\varphi_n(k), \varphi_n(k,1)\} \quad (n=0,1,\dots)$ は H における正規直交系である。

任意の $u \in L^2(0,1)$ に対して $\{u, \tau u(1)\} \in H$ は,
 $\{\varphi_n(k), \varphi_n(k, 1)\} \ (n=1, 2, \dots)$ で展開できる。

注2 任意の $k > 0$ に対して, $\varphi_n(k) \ (n=1, 2, \dots)$ が
 $L^2(0,1)$ でリース基底をなすかどうかは, 目下不明である。

注3 境界条件

$$0 < k < \infty \text{ のとき } u(0) = u'(1) + k u''(1) = 0$$

$$k = \infty \text{ のとき } u(0) = u(1) = 0$$

を満たす関数 u に対し

$$A(k)u = -u''$$

とあれば, (1) は粘性項付き波動方程式となる。上と同様の
 考察をすれば

$$k = \infty \text{ のとき}$$

$$\text{固有値 } \omega_n(\infty)^2 = (n\pi)^2, \text{ 固有関数 } \varphi_n(\infty, x) = \sin \omega_n(\infty)x \\ (n=1, 2, \dots)$$

$$0 < k < \infty \text{ のとき}$$

$$\text{固有値 } \omega_n(k)^2, \text{ 固有関数 } \varphi_n(k, x) = \sin \omega_n(k)x \\ (\omega_0(k) < \omega_1(k) < \dots < \omega_n(k) < \dots)$$

をもち

$$k \rightarrow \infty \text{ のとき } \omega_n(k) \rightarrow \omega_n(\infty) = n\pi \\ (n=0, 1, \dots)$$

Non-harmonic Fourier Series に関する理論を

使うと, 任意の $k > 0$ に対して, $\psi_n(k)$ ($n=1, 2, \dots$) が $L^2(0, 1)$ でリース基底となすことが分かり, (1) が固有関数展開により解ける。

文 献

[1] 坂和愛幸, 分布定数系としてのロボットアームの弾性振動の安定化制御, 昭和 60 年度科学研究費補助金 (一般研究 (B)) 研究成果報告書, 昭和 61 年 3 月