

半無限 Bruhat 半順序の盤判定法とその応用

石井 基裕^{*†}

Motohiro Ishii

群馬大学 共同教育学部 数学教育講座

Department of Mathematics, Cooperative Faculty of Education,
Gunma University

概要

A_{n-1} 型において、「Young 盤に記入される数値の横方向の大小関係」「対称群 (Weyl 群) $\mathfrak{S}_n$ の Bruhat 半順序」「量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ の表現の結晶基底のテンソル積構造」は互いに同値な構造の異なる側面であると解釈することができる (図 1). 本稿では主に $B_n^{(1)}$ 型の場合に焦点を当て、 A_{n-1} 型の場合に見られる上述の状況の類似として、アフィン Weyl 群の半無限 Bruhat 半順序に対する盤判定法とアフィン量子群のレベルゼロ基本表現の結晶基底の盤模型とについて述べる.

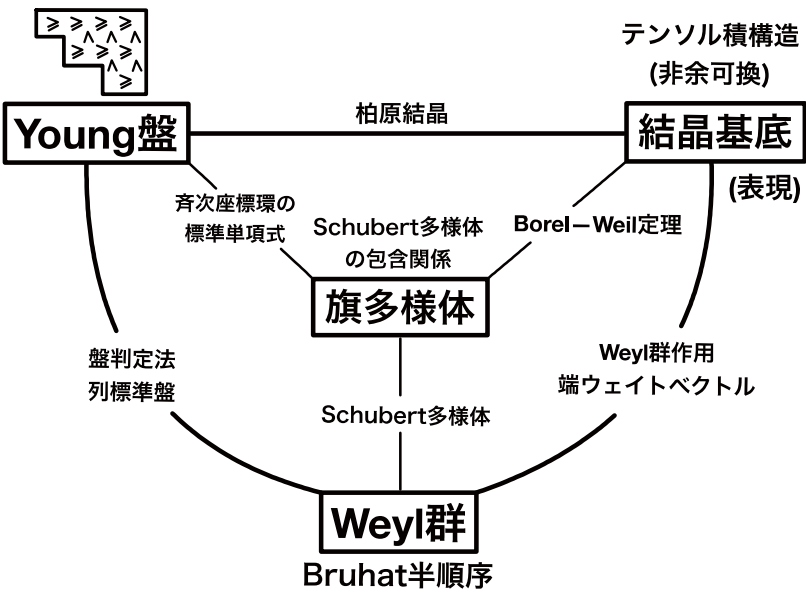


図 1: A_{n-1} 型の場合の対応関係 (発表スライドからの抜粋)

^{*}e-mail: m.ishii[at]gunma-u.ac.jp

[†]本研究は科研費 (課題番号: 16K17577, 20K14278) の補助を受けました.

1 半無限 Bruhat 半順序の Deodhar 型判定法

$\mathfrak{g}$ を有限次元複素単純 Lie 環とし, そのルート系 Δ , 単純ルート系 $\{\alpha_i \mid i \in I\}$, 単純余ルート系 $\{h_i \mid i \in I\}$ をとる. $\Delta^+ \subseteq \Delta$ を $\mathfrak{g}$ の正ルート全体の集合とする. 余ルート格子 $Q^\vee = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}h_i$ の元 $\xi \in Q^\vee$ を

$$\xi = \sum_{i \in I} \underbrace{c_i(\xi)}_{\in \mathbb{Z}} h_i \quad (1.1)$$

と表記する. W を $\mathfrak{g}$ の Weyl 群とし, 単純鏡映を $r_i \in W$ ($i \in I$) と表記する. このとき, 長さ関数 $\ell : W \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $w \mapsto \ell(w)$, を次で定める.

$$\ell(w) = \min\{\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid (\exists i_1, \dots, i_\ell \in I)(w = r_{i_1} \cdots r_{i_\ell})\} \quad (w \in W). \quad (1.2)$$

$J \subseteq I$ に対して,

- $\Delta_J = \Delta \cap \sum_{j \in J} \mathbb{Z}\alpha_j$, $\Delta_J^+ = \Delta^+ \cap \sum_{j \in J} \mathbb{Z}\alpha_j$, $Q_J^\vee = \bigoplus_{j \in J} \mathbb{Z}h_j \subseteq Q^\vee$,
- $W_J = \langle r_j \mid j \in J \rangle \subseteq W$,
- $W^J = \{w \in W \mid w(\Delta_J^+) \subseteq \Delta^+\}$

と定める. 部分集合 $W^J \subseteq W$ は剰余類集合 W/W_J の完全代表系を与える.

$\mathfrak{g}_{\text{af}}$ を $\mathfrak{g}$ に付随する非振アフィン Lie 環とする. δ を $\mathfrak{g}_{\text{af}}$ の虚零ルートとする. Δ_{af}^+ を $\mathfrak{g}_{\text{af}}$ の正実ルート全体の集合とする. 以下, $\mathfrak{g}$ の基本ウェイト ϖ_i ($i \in I$) を $\mathfrak{g}_{\text{af}}$ のレベルゼロウェイトとみなす ($\text{mod } \mathbb{C}\delta$ で定まる). $\mathfrak{g}_{\text{af}}$ の Weyl 群 (W に付随するアフィン Weyl 群) を

$$W_{\text{af}} = W \ltimes Q^\vee = \{wt_\xi \mid w \in W, \xi \in Q^\vee\} \quad (1.3)$$

と表記する. $e \in W_{\text{af}}$ を単位元とする. $\beta \in \Delta_{\text{af}}^+$ が定める鏡映を $r_\beta \in W_{\text{af}}$ と表記する. 半無限長さ関数 $\ell^\infty : W_{\text{af}} \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto \ell^\infty(x)$, を次で定める.

$$\ell^\infty(x) = \ell(w) + \sum_{i \in I} c_i(\xi) \quad (x = wt_\xi \in W_{\text{af}}, w \in W, \xi \in Q^\vee). \quad (1.4)$$

ただし, $\xi \in Q^\vee$ に対して $c_i(\xi) \in \mathbb{Z}$ は (1.1) で定まるものである. 半無限長さ関数は負の値もとることに注意せよ.

$J \subseteq I$ に対する有限型ルートデータのアフィン化を次に導入する.

- $(\Delta_J)_{\text{af}}^+ = \Delta_J^+ \sqcup \{\alpha + n\delta \mid \alpha \in \Delta_J, n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$,
- $(W_J)_{\text{af}} = \langle r_\beta \mid \beta \in (\Delta_J)_{\text{af}}^+ \rangle \cong W_J \ltimes Q_J^\vee \subseteq W_{\text{af}}$,
- $(W^J)_{\text{af}} = \{x \in W_{\text{af}} \mid x((\Delta_J)_{\text{af}}^+) \subseteq \Delta_{\text{af}}^+\}$.

部分集合 $(W^J)_{\text{af}} \subseteq W_{\text{af}}$ は剰余類集合 $W_{\text{af}}/(W_J)_{\text{af}}$ の完全代表系を与え, 自然な全射

$$\Pi^J : W_{\text{af}} \twoheadrightarrow W_{\text{af}}/(W_J)_{\text{af}} \cong (W^J)_{\text{af}} \quad (1.5)$$

が定まる. $(W_\emptyset)_{\text{af}} = \{e\}$, $(W^\emptyset)_{\text{af}} = W_{\text{af}}$ であることに注意せよ.

定義 1.1 ($(W^J)_{\text{af}}$ の半無限 Bruhat 半順序). $J \subseteq I$ とする. 次の (1)–(2) で定まる $(W^J)_{\text{af}}$ 上の二項関係 $\succeq$ は半順序であり, これを $(W^J)_{\text{af}}$ の **半無限 Bruhat 半順序** という.

(1) 任意の $x \in (W^J)_{\text{af}}$, $\beta \in \Delta_{\text{af}}^+$ に対して,

$$r_\beta x \xleftarrow{\beta} x \xleftrightarrow{\text{def}} r_\beta x \in (W^J)_{\text{af}} \text{ かつ } \ell_{\frac{\infty}{2}}(r_\beta x) = \ell_{\frac{\infty}{2}}(x) + 1. \quad (1.6)$$

(2) 任意の $x, y \in (W^J)_{\text{af}}$ に対して,

$$x \succeq y \xleftrightarrow{\text{def}} (\exists k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})(\exists \beta_1, \dots, \beta_k \in \Delta_{\text{af}}^+) \left(x \xleftarrow{\beta_1} \dots \xleftarrow{\beta_k} y \right). \quad (1.7)$$

注意 1.2. 半無限 Bruhat 半順序 (と同値な構造) は様々な文脈において独立に導入されている. いくつか代表的なものを挙げる.

(1) Lusztig [15] の generic order を $\succeq_L$ と表記すると, 任意の $x, y \in W_{\text{af}}$ に対して,

$$x \succeq y \iff y^{-1} \succeq_L x^{-1}. \quad (1.8)$$

(1.8) の詳細については, 例えば [8] を参照せよ.

(2) Peterson [21] の stable Bruhat order は半無限 Bruhat 半順序に一致する.

(3) $(W^J)_{\text{af}}$ の半無限 Bruhat 半順序の Hasse 図形の矢は (1.6) によって与えられる. 標準的準同型 $W_{\text{af}} \rightarrow W$ のもとで $(W^J)_{\text{af}}$ の半無限 Bruhat 半順序の Hasse 図形を送った像は W^J に付随する量子 Bruhat グラフ [1, 17] に一致する. 逆に, W^J に付随する量子 Bruhat グラフから $(W^J)_{\text{af}}$ の半無限 Bruhat 半順序 (の Hasse 図形) を復元することもできる [8].

(4) 半無限旗多様体の中の半無限 Schubert 部分多様体は W_{af} の部分集合によって添字付けられる. このとき, 半無限 Schubert 部分多様体の間の包含関係は W_{af} の半無限 Bruhat 半順序に対応する [12].

Coxeter 群の Bruhat 半順序に対する Deodhar 型判定法 [4] の類似として, 次が成り立つ.

定理 1.3 ([6, 8]). $J \subseteq I$ とする. 任意の $x, y \in (W^J)_{\text{af}}$ に対して,

$$x \succeq y \text{ in } (W^J)_{\text{af}} \iff (\forall i \in I \setminus J) (\Pi^{I \setminus \{i\}}(x) \succeq \Pi^{I \setminus \{i\}}(y) \text{ in } (W^{I \setminus \{i\}})_{\text{af}}).$$

証明の概略. $(\Rightarrow)$ は [8] で, $(\Leftarrow)$ は [6] で示された. ここでは $(\Leftarrow)$ の証明の概略を述べる.

$J \subseteq I$ とする. $\lambda = \sum_{i \in I \setminus J} \varpi_i$ とおく. $\mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ を型 λ の半無限 Lakshmibai–Seshadri パスのなす $U'_q(\mathfrak{g}_{\text{af}}) := U_q([\mathfrak{g}_{\text{af}}, \mathfrak{g}_{\text{af}}])$ 上の柏原結晶とする [8]. また, $\mathbb{B}_{\succeq y}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda) \subseteq \mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ を [18] で導入された部分集合とする. 集合 $\mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ は, $(W^J)_{\text{af}}$ の元の有限な減少列 $(x_1 \succeq x_2 \succeq \dots \succeq x_k)$ であってある条件を満たすものの全体として与えられる. その中で, $x_k \succeq y$ を満たすものの全体として部分集合 $\mathbb{B}_{\succeq y}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda) \subseteq \mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ が定められる. 任意の $x \in (W^J)_{\text{af}}$ に対し

て, $(x) \in \mathbb{B}_{\succeq y}^{\infty}(\lambda)$ が成り立つ. [3, 7, 8, 10] 等の結果に基づき, [6]において単射な写像 $\Phi: \mathbb{B}_{\succeq y}^{\infty}(\lambda) \hookrightarrow \bigotimes_{i \in I \setminus J} \mathbb{B}_{\succeq \Pi^{I \setminus \{i\}}(y)}^{\infty}(\varpi_i)$ が導入されている.

今, $(\forall i \in I \setminus J) (\Pi^{I \setminus \{i\}}(x) \succeq \Pi^{I \setminus \{i\}}(y) \text{ in } (W^{I \setminus \{i\}})_{\text{af}})$ を仮定すると,

$$\bigotimes_{i \in I \setminus J} (\Pi^{I \setminus \{i\}}(x)) \in \bigotimes_{i \in I \setminus J} \mathbb{B}_{\succeq \Pi^{I \setminus \{i\}}(y)}^{\infty}(\varpi_i)$$

が成り立つ. 更に, $\mathbb{B}_{\succeq y}^{\infty}(\lambda)$ と $\bigotimes_{i \in I \setminus J} \mathbb{B}_{\succeq \Pi^{I \setminus \{i\}}(y)}^{\infty}(\varpi_i)$ との $U'_q(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ 上の柏原結晶構造に基づく数学的帰納法により, $\bigotimes_{i \in I \setminus J} (\Pi^{I \setminus \{i\}}(x))$ の Φ による逆像が空集合でないことが示される. すると, その逆像が $\{(x)\} \subseteq \mathbb{B}_{\succeq y}^{\infty}(\lambda)$ であることは容易に確認される. 従って, $(x) \in \mathbb{B}_{\succeq y}^{\infty}(\lambda)$ である. よって, $x \succeq y$ である. $\square$

2 半無限 Bruhat 半順序の盤判定法

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ とする. この章では $A_{n-1}^{(1)}$, $B_n^{(1)}$, $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$ 型の場合にそれぞれ半無限 Bruhat 半順序に対する盤判定法を述べる. 盤判定法の導出は次の手順 (1)–(4) により遂行される [6, 7].

- (1) 各 $i \in I$ に対して, 1 列型の盤 (有限全順序集合) の集合 $\text{CST}(\varpi_i) = \{\mathsf{T}_w^{(i)} \mid w \in W\}$ を導入する.¹ ここで, 次の写像は全単射であることを注意しておく.

$$W^{I \setminus \{i\}} \rightarrow \text{CST}(\varpi_i), w \mapsto \mathsf{T}_w^{(i)}. \quad (2.1)$$

以下, $\mathsf{T} \in \text{CST}(\varpi_i)$ に対して, T の (上から) u 番目の成分を $\mathsf{T}(u)$ と表記する.

- (2) 各 $i \in I$ に対して, 写像 $\mathcal{Y}_i: W_{\text{af}} \rightarrow \text{CST}(\varpi_i) \times \mathbb{Z}$, $w t_{\xi} \mapsto (\mathsf{T}_w^{(i)}, c_i(\xi))$, は全単射

$$\mathcal{Y}_i|_{(W^{I \setminus \{i\}})_{\text{af}}} : (W^{I \setminus \{i\}})_{\text{af}} \xrightarrow{\sim} \text{CST}(\varpi_i) \times \mathbb{Z} \quad (2.2)$$

を誘導する ($\xi \in Q^{\vee}$ に対して, $c_i(\xi) \in \mathbb{Z}$ は (1.1) で定まるものである). この写像と (1.5) の写像とは $\mathcal{Y}_i = \mathcal{Y}_i \circ \Pi^{I \setminus \{i\}}$ を満たす.

- (3) 全単射 (2.2) が半順序集合の同型を与えるような $\text{CST}(\varpi_i) \times \mathbb{Z}$ における半順序 $\succeq$ を定める.
- (4) 定理 1.3 と手順 (1)–(3) とにより, $(W^J)_{\text{af}}$ の半無限 Bruhat 半順序 $\succeq$ は, 各 $i \in I \setminus J$ における $\text{CST}(\varpi_i) \times \mathbb{Z}$ の半順序 $\succeq$ によって判定される.

定理 2.1 (半無限 Bruhat 半順序の盤判定法 [6]). W_{af} の型は $A_{n-1}^{(1)}$, $B_n^{(1)}$, $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$ のいずれかであるとする. $J \subseteq I$ とする. 任意の $x, y \in (W^J)_{\text{af}}$ に対して,

$$x \succeq y \text{ in } (W^J)_{\text{af}} \iff (\forall i \in I \setminus J) (\mathcal{Y}_i(x) \succeq \mathcal{Y}_i(y) \text{ in } \text{CST}(\varpi_i) \times \mathbb{Z}).$$

¹CST = column strict tableau.

手順 (1)–(4) の中で最も非自明な議論を要する部分は (3) である. (3) を遂行する上で, $(W^{I \setminus \{i\}})_{\text{af}}$ の半無限 Bruhat 半順序の被覆関係の分類が鍵となる. これは, 注意 1.2 (3) によると, $W^{I \setminus \{i\}}$ に付随する量子 Bruhat グラフの矢の分類と同値である. これらの分類結果の詳細については [6] を参照せよ.

この章の以降の節では, $A_{n-1}^{(1)}$, $C_n^{(1)}$, $B_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$ の順番でそれぞれの型について手順 (1) と (3) について述べる. $k, l \in \mathbb{Z}$ に対して, $k > 0$ のとき $[k] = \{1, \dots, k\}$, $k \leq 0$ のとき $[k] = \emptyset$, $k \leq l$ のとき $[k, l] = \{k, k+1, \dots, l\}$, $k > l$ のとき $[k, l] = \emptyset$ とおく.

2.1 $A_{n-1}^{(1)}$ 型の場合

A_{n-1} 型 Dynkin 図形の頂点集合 $I = [n-1]$ を次の図 2 のようにとる.



図 2: A_{n-1} 型の Dynkin 図形

$W = \mathfrak{S}_n$ (n 次対称群) である. $i \in I$, $w \in W$ に対して,

$$T_w^{(i)} = \{T_w^{(i)}(1) < \dots < T_w^{(i)}(i)\} := \{w(1), \dots, w(i)\} \subseteq [n] \quad (2.3)$$

と定める. そして, $\text{CST}(\varpi_i) = \{T_w^{(i)} \mid w \in W\}$ と定める.

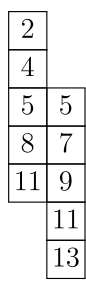
定義 2.2 ([7]). $i \in I$ とする. 任意の $(T, c), (T', c') \in \text{CST}(\varpi_i) \times \mathbb{Z}$ に対して,

$$(T, c) \succeq (T', c') \stackrel{\text{def.}}{\iff} \begin{cases} (d := c - c' \geq 0) \text{ かつ,} \\ (\forall u \in [i - d])(T(u + d) \geq T'(u)). \end{cases}$$

例 2.3 ($i = 5$ の場合). $\text{CST}(\varpi_5) \times \mathbb{Z}$ において,

$$(\{2, 4, 5, 8, 11\}, -1) =: \left(\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline 8 \\ \hline 11 \\ \hline \end{array}, -1 \right) \succeq \left(\begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 7 \\ \hline 9 \\ \hline 11 \\ \hline 13 \\ \hline \end{array}, -3 \right) := (\{5, 7, 9, 11, 13\}, -3)$$

である. 実際, 定義 2.2 の条件は, 上に与えられている 2 つの 1 列型の盤を右図のように $d = (-1) - (-3) = 2 \geq 0$ だけ上下にずらして並べて得られる歪型の盤が (半標準) Young 盤であると言い換えられる. ただし, 本稿では, 柏原結晶のテンソル積構造との整合性を考慮し, Young 盤の定義として [5] のものを左右反転させたものを採用する. すなわち, 本稿では, Young 盤に記入される数値は右から左に向けて広義単調増加である.



2.2 $C_n^{(1)}$ 型の場合

C_n 型 Dynkin 図形の頂点集合 $I = [n]$ を次の図 3 のようにとる.



図 3: C_n 型の Dynkin 図形

次の全順序集合を考える.

$$\mathcal{C} = \{1 \prec 2 \prec \cdots \prec n \prec \bar{n} \prec \cdots \prec \bar{2} \prec \bar{1}\}. \quad (2.4)$$

このとき,

$$W = \langle (j \ j+1)(\bar{j} \ \bar{j+1}) \ (j \in [n-1]), (n \ \bar{n}) \rangle \subseteq \mathfrak{S}(\mathcal{C}) \quad (2.5)$$

である. ただし, $\mathfrak{S}(\mathcal{C})$ は $\mathcal{C}$ の置換群である. また, $s, t \in \mathcal{C}$ に対して, $(s \ t) \in \mathfrak{S}(\mathcal{C})$ は s と t との互換である. $i \in I$, $w \in W$ に対して,

$$T_w^{(i)} = \{T_w^{(i)}(1) \prec \cdots \prec T_w^{(i)}(i)\} := \{w(1), \dots, w(i)\} \subseteq \mathcal{C} \quad (2.6)$$

と定める. そして, $\text{CST}(\varpi_i) = \{T_w^{(i)} \mid w \in W\}$ と定める.

定義 2.4 ([6]). $i \in I$ とする. 任意の $(T, c), (T', c') \in \text{CST}(\varpi_i) \times \mathbb{Z}$ に対して,

$$(T, c) \succeq (T', c') \stackrel{\text{def.}}{\iff} \begin{cases} (d := c - c' \geq 0) \text{ かつ,} \\ (\forall u \in [i - d])(T(u + d) \succeq T'(u) \text{ in } \mathcal{C}). \end{cases}$$

2.3 $B_n^{(1)}$ 型の場合

B_n 型 Dynkin 図形の頂点集合 $I = [n]$ を次の図 4 のようにとる.



図 4: B_n 型の Dynkin 図形

W , $T_w^{(i)}$, $\text{CST}(\varpi_i)$ 等の設定は $C_n^{(1)}$ 型の場合と同じである.

定義 2.5 ([6]). $i \in [2, n-1]$ とする. 任意の $(T, c), (T', c') \in \text{CST}(\varpi_i) \times \mathbb{Z}$ に対して,

$$(T, c) \succeq (T', c') \stackrel{\text{def.}}{\iff} \begin{cases} (d := c - c' \geq 0) \text{ かつ,} \\ (\forall u \in [i - d])(T(u + d) \succeq T'(u) \text{ in } \mathcal{C}) \text{ かつ,} \\ \text{次の (i)–(ii) のいずれかが成り立つ.} \end{cases}$$

(i) $d \in 2\mathbb{Z}$.

(ii) $(d \in 2\mathbb{Z} + 1)$ かつ $(d \in [i - 1] \Rightarrow \mathsf{T}'(i - d) \preceq n \text{ in } \mathcal{C})$ であり, 更に,

$$\left(\begin{array}{l} d \in [i] \text{ かつ,} \\ \{a_1 < \cdots < a_{n-i+d}\} := [n] \setminus \{\mathsf{T}'(u) \mid u \in [i - d]\} \text{ かつ,} \\ \mathsf{T}'(i - d + 1) = \overline{a_d} \end{array} \right) \Longrightarrow 1 \prec a_d \prec \mathsf{T}(a_d).$$

定義 2.6 ([6]). $i \in \{1, n\}$, $(\mathsf{T}, c), (\mathsf{T}', c') \in \text{CST}(\varpi_i) \times \mathbb{Z}$ とし, $d := c - c'$ とおく.

(1) $i = 1$ の場合,

$$(\mathsf{T}, c) \succeq (\mathsf{T}', c') \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} d \geq 2, \text{ または} \\ (d = 1) \text{ かつ } (\mathsf{T}(1) \neq 1) \text{ かつ } (\mathsf{T}'(1) = \bar{1}), \text{ または} \\ (d = 1) \text{ かつ } (\mathsf{T}'(1) \neq \bar{1}), \text{ または} \\ (d = 0) \text{ かつ } (\mathsf{T}(1) \succeq \mathsf{T}'(1) \text{ in } \mathcal{C}). \end{cases}$$

(2) $i = n$ の場合,

$$(\mathsf{T}, c) \succeq (\mathsf{T}', c') \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} (d := c - c' \geq 0) \text{ かつ,} \\ (\forall u \in [i - 2d])(\mathsf{T}(u + 2d) \succeq \mathsf{T}'(u) \text{ in } \mathcal{C}). \end{cases}$$

2.4 $D_n^{(1)}$ 型の場合

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 4}$ とする. D_n 型 Dynkin 図形の頂点集合 $I = [n]$ を次の図 5 のようにとる.



図 5: D_n 型の Dynkin 図形

次の半順序集合を考える (n と $\bar{n}$ とは比較不可能な関係にある).

$$\mathcal{D} = \left\{ 1 \prec 2 \prec \cdots \prec n - 1 \prec \frac{n}{\bar{n}} \prec \overline{n - 1} \prec \cdots \prec \bar{2} \prec \bar{1} \right\}. \quad (2.7)$$

$s \in [n]$ に対して, $\bar{s} := s$ と定める. このとき,

$$W = \left\{ w \in \mathfrak{S}(\mathcal{D}) \mid (\forall s \in [n]) \left(w(\bar{s}) = \overline{w(s)} \right) \text{ かつ } \#\{s \in [n] \mid w(s) \succeq \bar{n}\} \in 2\mathbb{Z} \right\}. \quad (2.8)$$

ただし, $\mathfrak{S}(\mathcal{D})$ は $\mathcal{D}$ の置換群である. また, 有限集合 X に対して, その元の個数を $\#X$ と表記する.

$i \in I \setminus \{n-1\}$, $w \in W$ に対して,

$$\mathsf{T}_w^{(i)} = \{\mathsf{T}_w^{(i)}(1) \prec \cdots \prec \mathsf{T}_w^{(i)}(i)\} := \{w(1), \dots, w(i)\} \subseteq \mathcal{D} \quad (2.9)$$

と定める. また, $w \in W$ に対して,

$$\mathsf{T}_w^{(n-1)} = \{\mathsf{T}_w^{(n-1)}(1) \prec \cdots \prec \mathsf{T}_w^{(n-1)}(n)\} := \{w(1), \dots, w(n-1), w(\bar{n})\} \subseteq \mathcal{D} \quad (2.10)$$

と定める. そして各 $i \in I$ に対して, $\text{CST}(\varpi_i) = \{\mathsf{T}_w^{(i)} \mid w \in W\}$ と定める. 写像 $\|\cdot\| : \mathcal{D} \rightarrow [n]$ を $s \mapsto s$, $\bar{s} \mapsto s$ ($s \in [n]$) によつて定める.

定義 2.7 ([6]). $i \in [n-2]$ とする. 任意の $(\mathsf{T}, c), (\mathsf{T}', c') \in \text{CST}(\varpi_i) \times \mathbb{Z}$ に対して,

$$(\mathsf{T}, c) \succeq (\mathsf{T}', c') \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} (d := c - c' \geq 0) \text{ かつ,} \\ (\forall u \in [i-d])(\mathsf{T}(u+d) \succeq \mathsf{T}'(u) \text{ in } \mathcal{D}) \text{ かつ,} \\ \text{次の (i)–(iii) のいずれかが成り立つ.} \end{cases}$$

(i) $d \in 2\mathbb{Z}$.

(ii) $(d \in 1+2\mathbb{Z})$ かつ $(\mathsf{T}'(i) \preceq n)$.

(iii) $(d \in 1+2\mathbb{Z})$ かつ $(\mathsf{T}'(i) \succeq \bar{n})$ である. 更に,

$$\begin{aligned} a &:= \min([n] \setminus \{\|\mathsf{T}'(u)\| \mid u \in [i], \mathsf{T}'(u) \succeq \bar{n}\}), \\ b &:= \min([n] \setminus \{\|\mathsf{T}'(u)\| \mid u \in [i]\}) \end{aligned}$$

とおくとき, $(d \in [i] \Rightarrow \mathsf{T}(d) \succeq a)$ である. また, $a < b$ であるとき, $\mathsf{T}'(k) \prec b \prec \mathsf{T}'(k+1)$ を満たす $k \in [i-1]$ をとると,

$$\begin{aligned} &(\forall u \in [2, \min\{k, i-d+1\}]) (\mathsf{T}(u+d-1) \succeq \mathsf{T}'(u)) \text{ かつ,} \\ &(k \in [i-d] \Rightarrow \mathsf{T}(k+d) \succeq b). \end{aligned}$$

定義 2.8 ([6]). $i \in \{n-1, n\}$ とする. 任意の $(\mathsf{T}, c), (\mathsf{T}', c') \in \text{CST}(\varpi_i) \times \mathbb{Z}$ に対して,

$$(\mathsf{T}, c) \succeq (\mathsf{T}', c') \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} (d := c - c' \geq 0) \text{ かつ,} \\ (\forall u \in [n-2d])(\mathsf{T}(u+2d) \succeq \mathsf{T}'(u) \text{ in } \mathcal{D}). \end{cases}$$

3 レベルゼロ基本表現の結晶基底の盤模型 ($B_n^{(1)}$ 型の場合)

この章では $\mathfrak{g}$ を B_n 型単純 Lie 環とする ($\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$). このとき, $I = [n]$ である. 以下, $i \in [n-1] = I \setminus \{n\}$ とする.²

$U_q(\mathfrak{g})$ の最高ウェイト ϖ_i の基本表現の結晶基底に対する次の 2 つの実現を考察する.

² $i = n$ は B_n 型 Dynkin 図形 (図 4) の minuscule 頂点であり, 扱いは比較的容易であるため, この場合の議論は本稿では省略する. $A_{n-1}^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}$ 型を含め, 本稿で省略する場合の詳細は [6, 7] を参照せよ.

- 型 ϖ_i の柏原–中島盤のなす $U_q(\mathfrak{g})$ 上の柏原結晶 $\text{KN}(\varpi_i)$ による実現 [11].
- 型 ϖ_i の Lakshmibai–Seshadri パスのなす $U_q(\mathfrak{g})$ 上の柏原結晶 $\text{LS}(\varpi_i)$ による実現 [14].

これら 2 つの実現の間の $U_q(\mathfrak{g})$ 上の柏原結晶としての同型写像

$$\text{KN}(\varpi_i) \xrightarrow{\sim} \text{LS}(\varpi_i), \quad C \mapsto (rC, lC) \quad (3.1)$$

を与えるアルゴリズムが [13] で示されている ([22] も参照せよ).

この章では, $U'_q(\mathfrak{g}_{\text{af}}) := U_q([\mathfrak{g}_{\text{af}}, \mathfrak{g}_{\text{af}}])$ の端ウェイト ϖ_i のレベルゼロ基本表現 [10] について, 上の事実の類似を述べる. まず, [16] において, $\text{LS}(\varpi_i)$ の拡張として量子 Lakshmibai–Seshadri パスのなす $U'_q(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ 上の柏原結晶 $\text{QLS}(\varpi_i)$ が導入され, これがレベルゼロ基本表現の結晶基底に対する実現を与えることが示されている. 更に, [6, 7] において, 第 2 章で述べた半無限 Bruhat 半順序に対する盤判定法をもとに, $\text{KN}(\varpi_i)$ の拡張として量子柏原–中島盤のなす $U'_q(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ 上の柏原結晶 $\text{QKN}(\varpi_i)$ が導入され, 同型写像

$$\text{QKN}(\varpi_i) \xrightarrow{\sim} \text{QLS}(\varpi_i), \quad \tilde{C} \mapsto (r\tilde{C}, l\tilde{C}), \quad (3.2)$$

およびその逆写像を与えるアルゴリズムが示されている. 結果的に, $\text{QKN}(\varpi_i)$ もレベルゼロ基本表現の結晶基底に対する実現を与えることが分かる. 本稿では $\text{QLS}(\varpi_i)$ の定義の詳細は省略するが, マヤ図形を用いた $\text{QLS}(\varpi_i)$ の特徴付けについては後述する (命題 3.13). $\text{QKN}(\varpi_i)$ の $U'_q(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ 上の柏原結晶構造については, 付録 A にまとめておく.

3.1 B_n 型の柏原–中島盤

量子柏原–中島盤の定義を述べるための準備として, この節では通常の柏原–中島盤について述べる. 次の全順序集合を考える.

$$\mathcal{B} = \{1 \prec 2 \prec \cdots \prec n \prec 0 \prec \bar{n} \prec \cdots \prec \bar{2} \prec \bar{1}\}. \quad (3.3)$$

$s \in [n]$ に対して, $\bar{s} := s$ と定める.

定義 3.1 ([11]). 写像 $C : [i] \rightarrow \mathcal{B}$ が次の 3 条件を満たすとき, C を型 ϖ_i の **柏原–中島盤** という.

$$(\text{KN1}) \quad C(1) \preceq C(2) \preceq \cdots \preceq C(i),$$

$$(\text{KN2}) \quad \text{任意の } p, q \in [i] \text{ に対して, } (p \neq q \text{ かつ } C(p) = C(q)) \Rightarrow (C(p) = C(q) = 0),$$

$$(\text{KN3}) \quad \text{任意の } p, q \in [i] \text{ に対して, } \left(s := C(p) = \overline{C(q)} \in [n] \right) \Rightarrow (q - p > i - s).$$

型 ϖ_i の柏原–中島盤全体の集合を $\text{KN}(\varpi_i)$ と表記する.

注意 3.2. 以下では, (KN1) を満たす写像 $C : [i] \rightarrow \mathcal{B}$ と多重集合 $\{\{C(u) \mid u \in [i]\}\}$ とを同一視する.

定理 3.3 ([13]). 定義 3.1 の条件 (KN1)–(KN2) を満たす写像 $C: [i] \rightarrow \mathcal{B}$ に対して,

$$I_C := \{z_1 \succeq \cdots \succeq z_k\} := \{z \in C \mid z \preceq 0, z, \bar{z} \in C\} \quad (3.4)$$

と定める. このとき, C が条件 (KN3) を満たすための必要十分条件は, 次の条件を満たすような $k (= \#I_C)$ 個の $[n]$ の元 $y_1 > \cdots > y_k$ が存在することである.

- $y_1 = \max\{y \in \mathcal{B} \mid y \prec z_1, y, \bar{y} \in C\},$
- $y_\nu = \max\{y \in \mathcal{B} \mid y \prec \min\{y_{\nu-1}, z_\nu\}, y, \bar{y} \notin C\} \ (\nu \in [2, k]).$

このとき, $J_C := \{y_1 > \cdots > y_k\}$ とおき,

$$rC := (C \setminus \{\bar{z} \mid z \in I_C\}) \cup \{\bar{y} \mid y \in J_C\}, \quad lC := (C \setminus I_C) \cup J_C \quad (3.5)$$

と定めると, $(rC, lC) \in \text{LS}(\varpi_i)$ である.³ そしてこの構成が同型写像 (3.1) を与える.

例 3.4 ($n = 9, i = 5$ の場合). $C = \{2, 3, 0, \bar{9}, \bar{3}\} \in \text{KN}(\varpi_5)$ である. 実際, $I_C = \{0 \succeq 3\}$ かつ $J_C = \{8 > 1\}$ である. このとき, $rC = \{\bar{1}, 2, 3, \bar{8}, \bar{9}\}$ かつ $lC = \{1, 2, \bar{3}, 8, \bar{9}\}$ である.

注意 3.5. 写像 $\|\cdot\|: \mathcal{B} \setminus \{0\} \rightarrow [n]$ を $s \mapsto s, \bar{s} \mapsto s \ (s \in [n])$ によって定める. このとき, 一般に $C \in \text{KN}(\varpi_i)$ に対して $\|rC\| = \|lC\|$ が成り立つ. ただし, 写像 $\|\cdot\|$ による $rC, lC \subseteq \mathcal{B} \setminus \{0\}$ の像を $\|rC\|, \|lC\| \subseteq [n]$ と表記している.

3.2 $B_n^{(1)}$ 型の量子柏原–中島盤

この節では, 量子柏原–中島盤の定義と同型写像 (3.2) について述べる.

定義 3.6 ([6]). $\tilde{B} := B \sqcup \{\bar{0}\}$ とおく. 写像 $\tilde{C}: [i] \rightarrow \tilde{B}$ が条件

$$(\exists m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \begin{cases} 2m \leq i \text{ かつ,} \\ (u > i - 2m) \Leftrightarrow (\tilde{C}(u) = \bar{0}) \text{ かつ,} \\ C := \tilde{C}|_{[i-2m]} \in \text{KN}(\varpi_{i-2m}) \end{cases} \quad (3.6)$$

を満たすとき, $\tilde{C}$ を型 ϖ_i の量子柏原–中島盤という. 型 ϖ_i の量子柏原–中島盤全体の集合を $\text{QKN}(\varpi_i)$ と表記する. 以下, $\tilde{C} \in \text{QKN}(\varpi_i)$ と多重集合 $\{\tilde{C}(u) \mid u \in [i]\}$ とを同一視する.

$\tilde{C} \in \text{QKN}(\varpi_i)$ に対して, (3.6) のように $C := \tilde{C}|_{[i-2m]} \in \text{KN}(\varpi_{i-2m})$ とおく. また, 注意 3.5 に留意して, $\{x_1 < \cdots < x_{n-i+2m}\} := [n] \setminus \|rC\| = [n] \setminus \|lC\|$ とおき,

$$K_{\tilde{C}} := \{x_1 < \cdots < x_{2m}\} \subseteq [n] \quad (3.7)$$

³写像 (2.1) のもとで $rC, lC \in \text{CST}(\varpi_i)$ に対応する元 $w, v \in W^{I \setminus \{i\}}$ をとるとき, (rC, lC) は型 ϖ_i の Lakshmibai–Seshadri パス $(w, v; 0, \frac{1}{2}, 1) \in \text{LS}(\varpi_i)$ を表す. また, 本来は rC を右側 (right), lC を左側 (left) に表記すべきものであるが, 柏原結晶のテンソル積構造 (パス模型の定式化) との整合性を考慮し, 本稿では本来の表記を左右反転させて, rC を左側, lC を右側に記載している.

と定める. そして,

$$r\tilde{C} := rC \cup K_{\tilde{C}}, \quad l\tilde{C} := lC \cup \{\bar{x} \mid x \in K_{\tilde{C}}\} \quad (3.8)$$

と定める.

定理 3.7 ([6]). 写像 $\text{QKN}(\varpi_i) \rightarrow \text{QLS}(\varpi_i)$, $\tilde{C} \mapsto (r\tilde{C}, l\tilde{C})$, は $U'_q(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ 上の柏原結晶としての同型写像である.

例 3.8 ($n = 9$, $i = 7$ の場合). $\tilde{C} = \{2, 3, 0, \bar{9}, \bar{3}, \bar{0}, \bar{0}\} \in \text{QKN}(\varpi_7)$ である. 実際, $m = 1$ として定義 3.6 の条件 (3.6) が満たされ, 例 3.4 より $C := \tilde{C}|_{[5]} = \{2, 3, 0, \bar{9}, \bar{3}\} \in \text{KN}(\varpi_5)$ である. このとき, $I_C = \{0 \geq 3\}$, $J_C = \{8 > 1\}$, $K_{\tilde{C}} = \{4 < 5\}$ であり, $rC = \{\bar{1}, 2, 3, \bar{8}, \bar{9}\}$ かつ $lC = \{1, 2, \bar{3}, 8, \bar{9}\}$, および $r\tilde{C} = \{\bar{1}, 2, 3, 4, 5, \bar{8}, \bar{9}\}$ かつ $l\tilde{C} = \{1, 2, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, 8, \bar{9}\}$ である.

注意 3.9. (1) レベルゼロ基本表現を包含する表現のクラスである Kirillov–Reshetikhin 加群の結晶基底に対して, 本稿で述べたものとは別の盤模型である Kirillov–Reshetikhin 盤が [20] において既に導入されている. この盤模型は艀装配位全単射を記述する上で重要な役割を果たす.

(2) [2] において, 量子 alcove 模型の設定で定理 3.7 に相当する内容が議論されている.

3.3 マヤ図形による $\text{QLS}(\varpi_i)$ の特徴付け

この節では, $\text{QLS}(\varpi_i)$ に対するマヤ図形による特徴付けについて述べる.

注意 3.5 の拡張である次の事実は, $W^{I \setminus \{i\}}$ に付随する量子 Bruhat グラフの矢の分類結果から導かれる.

補題 3.10 ([6]). 任意の $(T, T') \in \text{QLS}(\varpi_i)$ に対して, $\|T\| = \|T'\|$ である.

$J = [j, k] \subseteq [n]$ ($j, k \in [n]$, $j \leq k$) という形の $[n]$ の部分集合を区間と呼ぶことにする. 区間 $J = [j, k]$, $J' = [j', k'] \subseteq [n]$ に対して, $k + 1 < j'$ が成り立つとき, $J < J'$ と表記する. 任意の $T \in \text{CST}(\varpi_i)$ に対して, $J_1 < \dots < J_\mu$ かつ $\|T\| = \bigsqcup_{\nu=1}^\mu J_\nu$ を満たす区間 $J_1, \dots, J_\mu \subseteq [n]$ が一意的に存在する. このとき,

$$\mathcal{M}(T) = \left(J_\nu \cap \{\|T(u)\| \mid u \in [i], T(u) \succeq \bar{n} \text{ in } \mathcal{B}\} \right)_{\nu=1}^\mu \in \prod_{\nu=1}^\mu 2^{J_\nu} \quad (3.9)$$

と定める. ただし, 2^J は集合 J の冪集合を表す. 以下では, 次の例で見るように $\mathcal{M}(T)$ をマヤ図形とみなす.

例 3.11 ($n = 16$, $i = 12$ の場合). $T = \{1, 2, \bar{3}, 4, \bar{7}, 8, \bar{9}, \bar{12}, 13, \bar{14}, \bar{15}, 16\} \in \text{CST}(\varpi_{12})$ に対して, $\|T\| = [1, 4] \sqcup [7, 9] \sqcup [12, 16]$, $[1, 4] < [7, 9] < [12, 16]$ である. このとき, 次の (3.10) のように $\|T\|$ の元に対応する箱を用意し, 区間ごとに連結させて配置する. そし

て, T の $\neg$ 付きの元に対応する箱に $\bullet$ を記入した形として $\mathcal{M}(T) = (M_1, M_2, M_3)$ を表示する.

$$\mathcal{M}(T) = \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{\bullet} & \boxed{} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 7 & 8 & 9 \\ \boxed{\bullet} & \boxed{} & \boxed{\bullet} \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ \boxed{\bullet} & \boxed{} & \boxed{\bullet} & \boxed{\bullet} & \boxed{} \end{array} \quad (3.10)$$

ただし, $M_1 = \{3\} \subseteq [1, 4]$, $M_2 = \{7, 9\} \subseteq [7, 9]$, $M_3 = \{12, 14, 15\} \subseteq [12, 16]$ である. (3.10) の右辺を型 $([1, 4] < [7, 9] < [12, 16])$ のマヤ図形と呼ぶ. 1 番目と 2 番目の箱の組と, n 番目の箱については, 次の定義 3.12 の (i) と (iii) で述べるような特別な振る舞いがあるため, 箱を灰色で示して他の箱との区別を明確にしている.

定義 3.12. 同じ型の 2 つのマヤ図形に対する次の 3 種類の二項関係 $\leftarrow$ を考える.

(i) 1 番目の箱と 2 番目の箱の両方ともに $\bullet$ があるとき, それらを消去する.

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \boxed{} & \boxed{} \end{array} \leftarrow \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \boxed{\bullet} & \boxed{\bullet} \end{array}$$

(ii) $s \in [2, n]$ とする. s 番目の箱に $\bullet$ があり, $(s-1)$ 番目の箱が空箱であるとき, $\bullet$ を s 番目の箱から $(s-1)$ 番目の箱に移動する.

$$\begin{array}{cc} s & s \\ \boxed{\bullet} & \boxed{} \end{array} \leftarrow \begin{array}{cc} s & s \\ \boxed{} & \boxed{\bullet} \end{array}$$

(iii) n 番目の箱が空箱であるとき, n 番目の箱に $\bullet$ を追加する.

$$\begin{array}{c} n \\ \boxed{\bullet} \end{array} \leftarrow \begin{array}{c} n \\ \boxed{} \end{array}$$

このとき, 1 つ指定した型のマヤ図形全体の集合において, (i)–(iii) を被覆関係として定まる半順序を $\supseteq$ と表記し, (i) を除く (ii)–(iii) のみを被覆関係として定まる半順序を $\supseteq'$ と表記する.

補題 3.10 より, $(T, T') \in \text{QLS}(\varpi_i)$ であるならば $\mathcal{M}(T)$ の型と $\mathcal{M}(T')$ の型とは一致することに注意せよ. 次の事実, $W^{I \setminus \{i\}}$ に付随する量子 Bruhat グラフの矢の分類結果から導かれる.

命題 3.13 ([6]). $\|T\| = \|T'\|$ を満たす任意の $T, T' \in \text{CST}(\varpi_i)$ に対して, 次が成り立つ.

(1) $(T, T') \in \text{QLS}(\varpi_i) \iff \mathcal{M}(T) \supseteq \mathcal{M}(T')$.

(2) $(T, T') \in \text{LS}(\varpi_i) \iff \mathcal{M}(T) \supseteq' \mathcal{M}(T')$.

注意 3.14. マヤ図形の集合における半順序 $\supseteq$ (resp. $\supseteq'$) の Hasse 図形は, $W^{I \setminus \{i\}}$ に付随する $\frac{1}{2}$ -量子 Bruhat グラフ (resp. $\frac{1}{2}$ -Bruhat グラフ) に一致する. 特に, 定義 3.12 の (i) は量子矢に対応し, 定義 3.12 の (ii)–(iii) は Bruhat 矢に対応する.

例 3.15 ($n = 9, i = 7$ の場合). 例 3.8 の設定で, $(rC, lC) \in \text{LS}(\varpi_5)$ かつ $(r\tilde{C}, l\tilde{C}) \in \text{QLS}(\varpi_7)$ が成り立つことを命題 3.13 を用いて確認する. まず,

$$\begin{array}{cc} \mathcal{M}(rC) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \bullet & \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 8 & 9 \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} & \mathcal{M}(r\tilde{C}) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \bullet & \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 8 & 9 \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \\ \\ \mathcal{M}(lC) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \text{ } & \text{ } & \bullet \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 8 & 9 \\ \hline \text{ } & \bullet \\ \hline \end{array} & \mathcal{M}(l\tilde{C}) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline \text{ } & \text{ } & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 8 & 9 \\ \hline \text{ } & \bullet \\ \hline \end{array} \end{array}$$

である. このとき, 次が成り立つ.

$$\begin{array}{l} \mathcal{M}(rC) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \\ \xleftarrow{\text{(iii)}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \text{ } \\ \hline \end{array} \\ \xleftarrow{\text{(ii)}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ } & \bullet \\ \hline \end{array} \\ \xleftarrow{\text{(ii)}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ } & \bullet & \text{ } \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ } & \bullet \\ \hline \end{array} \\ \xleftarrow{\text{(ii)}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ } & \text{ } & \bullet \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ } & \bullet \\ \hline \end{array} = \mathcal{M}(lC), \\ \\ \mathcal{M}(r\tilde{C}) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \bullet & \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \\ \xleftarrow{\text{(iii)}} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \bullet & \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \text{ } \\ \hline \end{array} \\ \xleftarrow{\text{(ii)}} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \bullet & \text{ } & \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ } & \bullet \\ \hline \end{array} \\ \xleftarrow{\text{(ii)}} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \text{ } & \bullet & \text{ } & \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ } & \bullet \\ \hline \end{array} \\ \xleftarrow{\text{(ii)}} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \text{ } & \text{ } & \bullet & \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ } & \bullet \\ \hline \end{array} \\ \xleftarrow{\text{(i)}} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet & \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ } & \bullet \\ \hline \end{array} \\ \xleftarrow{\text{(ii)}} \dots \xleftarrow{\text{(ii)}} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \text{ } & \text{ } & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ } & \bullet \\ \hline \end{array} = \mathcal{M}(l\tilde{C}). \end{array}$$

よって, $\mathcal{M}(rC) \supseteq' \mathcal{M}(lC)$ かつ $\mathcal{M}(r\tilde{C}) \supseteq \mathcal{M}(l\tilde{C})$ である.

例 3.16 ($n = 16, i = 12$ の場合). 次の $T, T' \in \text{CST}(\varpi_{12})$ を考える (例 3.11 も参照せよ).

$$T = \{1, 2, \bar{3}, 4, \bar{7}, 8, \bar{9}, \bar{12}, 13, \bar{14}, \bar{15}, 16\}, \quad T' = \{\bar{1}, \bar{2}, 3, \bar{4}, 7, \bar{8}, \bar{9}, 12, \bar{13}, \bar{14}, 15, 16\}.$$

このとき, $(T, T') \in \text{QLS}(\varpi_{12})$ である. 実際,

$$\begin{array}{cc} \mathcal{M}(T) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \text{ } & \text{ } & \bullet & \text{ } \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline \bullet & \text{ } & \bullet \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ \hline \bullet & \text{ } & \bullet & \bullet & \text{ } \\ \hline \end{array} \\ \\ \mathcal{M}(T') = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \bullet & \bullet & \text{ } & \bullet \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline \text{ } & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ \hline \text{ } & \bullet & \bullet & \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array} \end{array}$$

であり、次が成り立つ.

$$\begin{array}{l}
 \mathcal{M}(T) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare & \bullet & \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & \square & \bullet \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \bullet & \square & \bullet & \bullet & \blacksquare \\ \hline \end{array} \\
 \xleftarrow{(ii)} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare & \square & \bullet \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & \square & \bullet \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \bullet & \square & \bullet & \bullet & \blacksquare \\ \hline \end{array} \\
 \xleftarrow{(ii)} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare & \square & \bullet \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \bullet & \square & \bullet & \bullet & \blacksquare \\ \hline \end{array} \\
 \xleftarrow{(ii)} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare & \square & \bullet \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \bullet & \bullet & \bullet & \blacksquare \\ \hline \end{array} \\
 \xleftarrow{(i)} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \square & \bullet \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \bullet & \bullet & \bullet & \blacksquare \\ \hline \end{array} \\
 \xleftarrow{(ii)} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \square & \bullet \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \bullet & \bullet & \square & \bullet \\ \hline \end{array} \\
 \xleftarrow{(iii)} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \square & \bullet \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \bullet & \bullet & \square & \blacksquare \\ \hline \end{array} = \mathcal{M}(T').
 \end{array}$$

よって、 $\mathcal{M}(T) \supseteq \mathcal{M}(T')$ である.

3.4 同型写像 $\text{QKN}(\varpi_i) \rightarrow \text{QLS}(\varpi_i)$ の逆写像

この節では、定理 3.7 の同型写像の逆写像を与えるアルゴリズムについて述べる.

定理 3.17 ([6]). $(T, T') \in \text{QLS}(\varpi_i)$ に対して、次の (1)–(5) を定める.

- (1) $\|T\| = \|T'\| = \bigsqcup_{\nu=1}^{\mu} J_{\nu} \subseteq [n]$ (区間への分割), $J_1 < \cdots < J_{\mu}$,
- (2) $\mathcal{M}(T) = (M_{\nu})_{\nu=1}^{\mu}$, $\mathcal{M}(T') = (M'_{\nu})_{\nu=1}^{\mu} \in \prod_{\nu=1}^{\mu} 2^{J_{\nu}}$ ((3.9) を参照せよ),
- (3) $f := \begin{cases} \#M_{\mu} - \#M'_{\mu} & (n \in J_{\mu} \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$
- (4) $m := \begin{cases} \frac{1}{2}(\#M'_1 - \#M_1) & (\{1, 2\} \subseteq J_1 \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$
- (5) $l := \#(M_1 \setminus M'_1)$, $\{y^1 < \cdots < y^l\} := M_1 \setminus M'_1$ とおき,

$$\begin{aligned}
 z^1 &:= \min \{z \in J_1 \mid z \succ y^1, z \in M'_1 \setminus M_1\}, \\
 z^{\nu} &:= \min \{z \in J_1 \mid z \succ \max\{y^{\nu}, z^{\nu-1}\}, z \in M'_1 \setminus M_1\} \quad (\nu \in [2, l]).
 \end{aligned}$$

このとき、 $f, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であり、

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{C}} &:= (J_1 \setminus (M_1 \cup M'_1)) \cup \{z^{\nu}, \bar{z}^{\nu} \mid \nu \in [l]\} \cup \{\bar{z} \mid z \in M_1 \cap M'_1\} \\
 &\cup \bigcup_{\nu=2}^{\mu} ((J_{\nu} \setminus M_{\nu}) \cup \{\bar{z} \mid z \in M'_{\nu}\}) \cup \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{f \text{ 個}} \cup \underbrace{\{\bar{0}, \dots, \bar{0}\}}_{2m \text{ 個}}
 \end{aligned}$$

と定めると, $\tilde{C} \in \text{QKN}(\varpi_i)$ かつ $(T, T') = (r\tilde{C}, l\tilde{C})$ である. 更に, $C := \tilde{C}|_{[i-2m]} \in \text{KN}(\varpi_{i-2m})$ に対して, 次が成り立つ.

$$I_C = \{z^\nu \mid \nu \in [l]\} \cup \bigcup_{\nu=2}^{\mu} (M'_\nu \setminus M_\nu) \cup \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{f \text{ 個}}, \quad J_C = \bigcup_{\nu=1}^{\mu} (M_\nu \setminus M'_\nu).$$

注意 3.18. (1) 定義より $\text{LS}(\varpi_i) \subseteq \text{QLS}(\varpi_i)$ かつ $\text{KN}(\varpi_i) \subseteq \text{QKN}(\varpi_i)$ である (定義 3.6 の記号で, $m = 0$ である量子柏原-中島盤は通常の柏原-中島盤に他ならない). 定理 3.17 を $\text{LS}(\varpi_i)$, $\text{KN}(\varpi_i)$ に限定して適用することにより, 型 ϖ_i の通常の Lakshmibai-Seshadri パスと柏原-中島盤に対するマヤ図形による特徴付けが得られる.

(2) 次の写像は $U_q(\mathfrak{g})$ 上の柏原結晶としての同型写像である.

$$\text{QKN}(\varpi_i) \rightarrow \bigsqcup_{m=0}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \text{KN}(\varpi_{i-2m}), \quad \tilde{C} = C \cup \underbrace{\{\bar{0}, \dots, \bar{0}\}}_{2m \text{ 個}} \mapsto C. \quad (3.11)$$

ただし, $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor := \max \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq \frac{i}{2}\}$ であり, $C := \tilde{C}|_{[i-2m]} \in \text{KN}(\varpi_{i-2m})$ である.

(3) 定理 3.17 の記号で, $(T, T') \in \text{QLS}(\varpi_i)$ の次数関数 [19] の値は $\text{Deg}(T, T') = -m$ として与えられる.

例 3.19 ($n = 16$, $i = 12$ の場合). 例 3.16 で述べた $(T, T') \in \text{QLS}(\varpi_{12})$ に定理 3.17 のアルゴリズムを適用して, 対応する量子柏原-中島盤 $\tilde{C} \in \text{QKN}(\varpi_i)$ を求める.

$$(1) \|T\| = \|T'\| = \underbrace{[1, 4]}_{J_1 :=} \sqcup \underbrace{[7, 8]}_{J_2 :=} \sqcup \underbrace{[12, 16]}_{J_3 :=} \quad (\mu = 3).$$

$$(2) \mathcal{M}(T) = (\underbrace{\{3\}}_{M_1 :=}, \underbrace{\{7, 9\}}_{M_2 :=}, \underbrace{\{12, 14, 15\}}_{M_3 :=}), \quad \mathcal{M}(T') = (\underbrace{\{1, 2, 4\}}_{M'_1 :=}, \underbrace{\{8, 9\}}_{M'_2 :=}, \underbrace{\{13, 14\}}_{M'_3 :=}) \in \prod_{\nu=1}^3 2^{J_\nu}.$$

$$(3) n = 16 \in J_3 \text{ より, } f := \#M_3 - \#M'_3 = 3 - 2 = 1.$$

$$(4) \{1, 2\} \subseteq [1, 4] = J_1 \text{ より, } m := \frac{1}{2}(\#M'_1 - \#M_1) = \frac{1}{2}(3 - 1) = 1.$$

$$(5) \{y^1\} := M_1 \setminus M'_1 = \{3\} \quad (l = 1, y^1 = 3) \text{ であり,}$$

$$z^1 := \min \{z \in J_1 = [1, 4] \mid z \succ y^1 = 3, z \in M'_1 \setminus M_1 = \{1, 2, 4\}\} = 4.$$

このとき,

$$\tilde{C} = \{4, 8, 13, 16, 0, \bar{14}, \bar{13}, \bar{9}, \bar{8}, \bar{4}, \bar{0}, \bar{0}\} \in \text{QKN}(\varpi_{12})$$

であり,

$$C := \tilde{C}|_{[10]} = \{4, 8, 13, 16, 0, \bar{14}, \bar{13}, \bar{9}, \bar{8}, \bar{4}\} \in \text{KN}(\varpi_{10})$$

に対して, $I_C = \{4, 8, 13, 0\}$, $J_C = \{3, 7, 12, 15\}$ である.

付録 A QKN(ϖ_i) の柏原結晶構造

この章では, $B_n^{(1)}$ 型の場合に, $\text{QKN}(\varpi_i)$ ($i \in [n-1] = I \setminus \{n\}$) の $U'_q(\mathfrak{g}_{\text{af}})$ 上の柏原結晶構造について述べる [6]. 柏原結晶の定義については, 例えば [9] を参照せよ.

まず, n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{s=1}^n \mathbb{R}\epsilon_s$ の中に B_n 型のルート系を実現しておく.

- $\Delta = \{\pm(\epsilon_s \pm \epsilon_t) \mid s, t \in [n], s < t\} \sqcup \{\pm\epsilon_s \mid s \in [n]\},$
- $\alpha_s = \epsilon_s - \epsilon_{s+1} \ (s \in [n-1]), \alpha_n = \epsilon_n,$
- $\varpi_i = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots + \epsilon_i \ (i \in [n-1]).$

$\epsilon_{\bar{s}} := -\epsilon_s \ (s \in [n]), \epsilon_0 = \epsilon_{\bar{0}} := 0$ と定める. このとき, $\tilde{C} \in \text{QKN}(\varpi_i)$ に対して,

$$\text{wt}(\tilde{C}) := \sum_{u \in [i]} \epsilon_{\tilde{C}(u)} \pmod{\mathbb{C}\delta}.$$

柏原作用素 $\tilde{f}_j$ ($j \in I \sqcup \{0\}$) について述べる ($\tilde{e}_j$ については省略する). 定義 3.6 で述べたように, $\tilde{C} \in \text{QKN}(\varpi_i)$ に対して, $2m := \#K_{\tilde{C}}, C := \tilde{C}|_{[i-2m]} \in \text{KN}(\varpi_{i-2m})$ とおく.

まず, $j \in [n-1]$ とする. このとき, $\tilde{f}_j$ による作用は $\tilde{C}$ に記入される値 $j, j+1, \overline{j+1}, \bar{j}$ の変換を引き起こす (その他の値は変えない). そして, $\tilde{f}_j$ の作用の仕方は集合 $C \cap \{j, j+1, \overline{j+1}, \bar{j}\}$ から定まる. $\tilde{f}_j$ のもとで影響を受けない $j, j+1, \overline{j+1}, \bar{j}$ 以外の値を除いた上で, $\tilde{f}_j$ の作用は次のように記述される.

$$\begin{array}{c} \boxed{1} \xrightarrow{\tilde{f}_1} \boxed{2} \xrightarrow{\tilde{f}_2} \cdots \xrightarrow{\tilde{f}_{n-2}} \boxed{n-1} \xrightarrow{\tilde{f}_{n-1}} \boxed{n}, \\ \boxed{\bar{1}} \xleftarrow{\tilde{f}_1} \boxed{\bar{2}} \xleftarrow{\tilde{f}_2} \cdots \xleftarrow{\tilde{f}_{n-2}} \boxed{\overline{n-1}} \xleftarrow{\tilde{f}_{n-1}} \boxed{\bar{n}}, \\ \begin{array}{c} \boxed{j} \\ \hline \boxed{\overline{j+1}} \end{array} \xrightarrow{\tilde{f}_j} \begin{array}{c} \boxed{j+1} \\ \hline \boxed{\overline{j+1}} \end{array} \xrightarrow{\tilde{f}_j} \begin{array}{c} \boxed{j+1} \\ \hline \boxed{\bar{j}} \end{array}, \\ \begin{array}{c} \boxed{j} \\ \boxed{j+1} \\ \hline \boxed{\overline{j+1}} \end{array} \xrightarrow{\tilde{f}_j} \begin{array}{c} \boxed{j} \\ \boxed{j+1} \\ \hline \boxed{\bar{j}} \end{array}, \quad \begin{array}{c} \boxed{j} \\ \hline \boxed{\overline{j+1}} \\ \hline \boxed{\bar{j}} \end{array} \xrightarrow{\tilde{f}_j} \begin{array}{c} \boxed{j+1} \\ \hline \boxed{\overline{j+1}} \\ \hline \boxed{\bar{j}} \end{array}.$$

そして, これら以外の場合は $\tilde{f}_j \tilde{C} = \mathbf{0}$ と定める.

次に $j = n$ とする. このとき, $\tilde{f}_n$ による作用は $\tilde{C}$ に記入される値 $n, 0, \bar{n}$ の変換を引き起こす (その他の値は変えない). そして, $\tilde{f}_n$ の作用の仕方は多重集合 $\{\{C(u) \mid u \in [i], C(u) \in$

$\{n, 0, \bar{n}\}$ から定まる. $\tilde{f}_n$ のもとで影響を受けない $n, 0, \bar{n}$ 以外の値を除いた上で, $\tilde{f}_n$ の作用は次のように記述される.

$$\boxed{n} \xrightarrow{f_n} \boxed{0} \xrightarrow{f_n} \boxed{\bar{n}}, \quad \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline 0 \\ \hline \vdots \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{f_n} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \vdots \\ \hline \vdots \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{f_n} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \vdots \\ \hline 0 \\ \hline \bar{n} \\ \hline \end{array}.$$

そして, これら以外の場合は $\tilde{f}_n \tilde{C} = \mathbf{0}$ と定める.

最後に $j = 0$ とする. (3.4) より $z_k = \min I_C$ である. このとき, $\tilde{f}_0$ の作用の仕方は集合 $I_C, J_C, K_{\tilde{C}}$ および $C \cap \{1, 2, \bar{2}, \bar{1}, z_k, \bar{z}_k\}$ から定まる. $y_k := \min J_C$ とおく. $m > 0$ のとき, $x_1 := \min K_{\tilde{C}}, x_2 := \min(K_{\tilde{C}} \setminus \{x_1\})$ とおく. $\tilde{f}_0$ の作用は次のように記述される.

(i) $m = 0$ かつ $y_k \notin \{1, 2\}$ の場合,

$$\boxed{\bar{2}} \xrightarrow{f_0} \boxed{1}, \quad \boxed{\bar{1}} \xrightarrow{f_0} \boxed{2}, \quad \begin{array}{|c|} \hline \bar{2} \\ \hline \bar{1} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{f_0} \begin{array}{|c|} \hline \bar{0} \\ \hline \bar{0} \\ \hline \end{array}.$$

そして, これら以外の場合は $\tilde{f}_0 \tilde{C} = \mathbf{0}$ と定める.

(ii) $m > 0$ かつ $y_k \notin \{1, 2\}$ の場合,

$$\begin{array}{|c|} \hline \bar{2} \\ \hline \bar{1} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{f_0} \begin{array}{|c|} \hline \bar{0} \\ \hline \bar{0} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{f_0} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \bar{2} \\ \hline \bar{0} \\ \hline \bar{0} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{f_0} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline x_2 \\ \hline \bar{x}_2 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|} \hline \bar{1} \\ \hline \bar{0} \\ \hline \bar{0} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{f_0} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline x_2 \\ \hline \bar{x}_2 \\ \hline \end{array}.$$

そして, これら以外の場合は $\tilde{f}_0 \tilde{C} = \mathbf{0}$ と定める.

(iii) $y_k \in \{1, 2\}$ の場合,

$$\begin{array}{|c|} \hline z_k \\ \hline \bar{z}_k \\ \hline \bar{2} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{f_0} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \bar{0} \\ \hline \bar{0} \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|} \hline z_k \\ \hline \bar{z}_k \\ \hline \bar{1} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{f_0} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \bar{0} \\ \hline \bar{0} \\ \hline \end{array}.$$

そして, これら以外の場合は $\tilde{f}_0 \tilde{C} = \mathbf{0}$ と定める.

謝辞. 本研究集会における講演の機会を与えてくださいました小寺諒介氏に, この場を借りて御礼申し上げます.

参考文献

- [1] F. Brenti, S. Fomin, and A. Postnikov, Mixed Bruhat operators and Yang–Baxter equations for Weyl groups, *Internat. Math. Res. Notices* (1999), 419–441.
- [2] C. Briggs, C. Lenart, A. Schultze, On combinatorial models for affine crystals, Preprint, arXiv:2109.12199.
- [3] J. Beck and H. Nakajima, Crystal bases and two-sided cells of quantum affine algebras, *Duke Math. J.* 123 (2004), 335–402.
- [4] V. V. Deodhar, Some characterizations of Bruhat ordering on a Coxeter group and determination of the relative Möbius function, *Invent. Math.* 39 (1977), 187–198.
- [5] W. Fulton, Young Tableaux: With applications to representation theory and geometry, London Mathematical Society Student Texts 35, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [6] M. Ishii, Tableau models for semi-infinite Bruhat order and level-zero representations of quantum affine algebras, *Algebr. Comb.* 5 (2022), 1089–1164.
- [7] M. Ishii, Semi-infinite Young tableaux and standard monomial theory for semi-infinite Lakshmibai–Seshadri paths, *Algebr. Comb.* 3 (2020), 1141–1163.
- [8] M. Ishii, S. Naito, and D. Sagaki, Semi-infinite Lakshmibai–Seshadri path model for level-zero extremal weight modules over quantum affine algebras, *Adv. Math.* 290 (2016), 967–1009.
- [9] M. Kashiwara, On crystal bases. Representations of groups (Banff, AB, 1994), 155–197, CMS Conf. Proc., 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [10] M. Kashiwara, On level zero representations of quantized affine algebras, *Duke Math. J.* 112 (2002), 117–175.
- [11] M. Kashiwara and T. Nakashima, Crystal graphs for representations of the q -analogue of classical Lie algebras, *J. Algebra* 165 (1994), 295–345.
- [12] S. Kato, S. Naito, D. Sagaki, Equivariant K -theory of semi-infinite flag manifolds and the Pieri–Chevalley formula, *Duke Math. J.* 169 (2020), 2421–2500.
- [13] C. Lecouvey, Schensted-type correspondences and plactic monoids for types B_n and D_n , *J. Algebraic Combin.* 18 (2003), 99–133.
- [14] P. Littelmann, Paths and root operators in representation theory, *Ann. of Math.* (2) 142 (1995), 499–525.
- [15] G. Lusztig, Hecke algebras and Jantzen’s generic decomposition patterns, *Adv. Math.* 37 (1980), 121–164.

- [16] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, Quantum Lakshmibai–Seshadri paths and root operators, Schubert calculus–Osaka 2012, 267–294, *Adv. Stud. Pure Math.*, 71, Math. Soc. Japan, 2016.
- [17] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for Kirillov–Reshetikhin crystals I: lifting the parabolic quantum Bruhat graph, *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2015 (2015), 1848–1901.
- [18] S. Naito and D. Sagaki, Demazure submodules of level-zero extremal weight modules and specializations of Macdonald polynomials, *Math. Z.* 283 (2016), 937–978.
- [19] S. Naito and D. Sagaki, Lakshmibai–Seshadri paths of level-zero weight shape and one-dimensional sums associated to level-zero fundamental representations, *Compos. Math.*, 144 (2008), 1525–1556.
- [20] M. Okado, R. Sakamoto, and A. Schilling, Affine crystal structure on rigged configurations of type $D_n^{(1)}$, *J. Algebraic Combin.* 37 (2013), 571–599.
- [21] D. Peterson, Quantum Cohomology of G/P , Lect. Notes, Massachusetts Institute of Technology, Spring, Cambridge, MA, 1997.
- [22] J. T. Sheats, A symplectic jeu de taquin bijection between the tableaux of King and of De Concini, *Trans. Amer. Math. Soc.* 351 (1999), 3569–3607.