

二層流体系における長波・短波共鳴相互作用

九大応力研 及川正行 (Masayuki Oikawa)

九大応力研 岡村 誠 (Makoto Okamura)

九大応力研 船越満明 (Mitsuaki Funakoshi)

1. 長波短波共鳴

長波と短波の共鳴相互作用は3波共鳴の特別な場合である.^{1,2)} 3波共鳴は2次の非線形性が存在する場合に起こり得る. 3つの波 $u_j = a_j \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_j t)]$, ($j = 1, 2, 3$) の間に3波共鳴の条件式

$$\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3, \quad \omega_1 \pm \omega_2 = \omega_3 \quad (1)$$

が成り立つとき, これらの3つの波の間で強い相互作用が起こり, エネルギーの交換が行なわれる. だし, $\mathbf{k}_j$ と $\omega_j \equiv \omega(\mathbf{k}_j)$ は線形分散関係を満たすとする. (1) において, $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k} + \delta\mathbf{k}/2$, $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k} - \delta\mathbf{k}/2$, $\mathbf{k}_3 = \delta\mathbf{k}$ の場合を考え, $\delta\mathbf{k} \rightarrow 0$ とすると, (1) は

$$\delta\mathbf{k} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \omega(\delta\mathbf{k}) \quad (2)$$

となり, これが長波と短波の共鳴相互作用の条件である. 条件(2)は短波の群速度の長波の伝播方向への射影が長波の位相スピードに等しいことを意味している.

2. 二層流体系

3波共鳴は表面張力重力波,³⁾ 密度成層流体,^{4,5)} プラズマ中の波,⁶⁾ ロスビー波⁷⁾ など多くの系で起こるが, ここでは簡単なモデルとして二層流体系を取り上げ, 特に, 長波と短波の2次元的な相互作用に注目する. 図1に示されているような二層流体系を考える. ρ_1, h_1 を上層の密度と厚さ, ρ_2, h_2 を下層の密度と厚さとする. 流体は非粘性, 非圧縮とし, 運動は渦無しと仮定する. 上層, 下層の速度ポテンシャルを $\phi_1(\mathbf{x}, z, t)$, $\phi_2(\mathbf{x}, z, t)$ とし, 自由表面を $z = h_1 + \zeta_1(\mathbf{x}, t)$, 界面を $z = \zeta_2(\mathbf{x}, t)$ とする. 以下で長さ h_1 , 速度 $\sqrt{gh_1}$, 密度 ρ_2 を用いて無次元化されるが, 無次元化後も変数に対しては無次元化前と同じ記号を用いている. 基礎方程式と境界条件は

$$\nabla^2 \phi_1 + \phi_{1zz} = 0, \quad \zeta_2 < z < 1 + \zeta_1 \quad (3a)$$

$$\nabla^2 \phi_2 + \phi_{2zz} = 0, \quad -h < z < \zeta_2 \quad (3b)$$

$$\zeta_{1t} + \nabla \phi_1 \cdot \nabla \zeta_1 - \phi_{1z} = 0, \quad z = 1 + \zeta_1 \quad (3c)$$

$$\phi_{1t} + \zeta_1 + (\nabla \phi_1)^2/2 + (\phi_{1z})^2/2, \quad z = 1 + \zeta_1 \quad (3d)$$

$$\zeta_{2t} + \nabla \phi_1 \cdot \nabla \zeta_2 - \phi_{1z} = 0, \quad z = \zeta_2 \quad (3e)$$

$$\zeta_{2t} + \nabla \phi_2 \cdot \nabla \zeta_2 - \phi_{2z} = 0, \quad z = \zeta_2 \quad (3f)$$

$$(1 - \Delta)\{\phi_{1t} + \zeta_2 + (\nabla\phi_1)^2/2 + (\phi_{1z})^2/2\} - \{\phi_{2t} + \zeta_2 + (\nabla\phi_2)^2/2 + (\phi_{2z})^2/2\} = 0, \quad z = \zeta_2 \quad (3g)$$

$$\phi_{2z} = 0, \quad z = -h \quad (3h)$$

と書ける. ただし, $h \equiv h_2/h_1$, $\nabla \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ である.

線形近似における分散関係は

$$L(\omega, k) \equiv \omega^4 [\cosh k \cosh kh + (1 - \Delta) \sinh k \sinh kh] - k\omega^2 (\sinh k \cosh kh + \cosh k \sinh kh) + \Delta k^2 \sinh k \sinh kh = 0, \quad (4)$$

である. ここで, ω は角振動数, k は波数ベクトル $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ の大きさである. 図 2 に $h = 1$, $\Delta = 0.5$ の場合の分散関係を示す. 上側の分枝は表面波モード, 下側の分枝は内部波モードを表わす.

3. 相互作用方程式の導出

x 方向に伝播する内部波モードの長波とこれと角度 ψ をなす方向に伝播する表面波モードの短波の相互作用を考える (図 3). 短波の波数 $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ は共鳴条件

$$(k_x/k)c_g = c_g \cos \psi = c_p \quad (5)$$

を満たしているとする. c_g は短波の群速度の大きさ, c_p は内部波モードの長波長極限での位相スピードである. 図 4 は共鳴条件 (5) を示している.

以後, $h \sim 1$ とする. $\varepsilon (\ll 1)$ を微小パラメータとして, 短波の無次元振幅は $O(\varepsilon)$ であるとする. ゆっくりした変動を表わす変数

$$X = \varepsilon^{2/3}(x - c_p t), \quad Y = \varepsilon^{4/3}y, \quad T = \varepsilon^{4/3}t \quad (6)$$

を導入して次のような展開を行なう.

$$\phi_1 = \varepsilon^{2/3}\phi_1^{(0)} + \varepsilon(\phi_1^{(1)}e^{i\theta} + \text{c.c.}) + \varepsilon^2(\phi_1^{(2)}e^{2i\theta} + \text{c.c.}) + \dots, \quad (7a)$$

$$\phi_2 = \varepsilon^{2/3}\phi_2^{(0)} + \varepsilon(\phi_2^{(1)}e^{i\theta} + \text{c.c.}) + \varepsilon^2(\phi_2^{(2)}e^{2i\theta} + \text{c.c.}) + \dots, \quad (7b)$$

$$\zeta_1 = \varepsilon^{4/3}\zeta_1^{(0)} + \varepsilon(\zeta_1^{(1)}e^{i\theta} + \text{c.c.}) + \varepsilon^2(\zeta_1^{(2)}e^{2i\theta} + \text{c.c.}) + \dots, \quad (7c)$$

$$\zeta_2 = \varepsilon^{4/3}\zeta_2^{(0)} + \varepsilon(\zeta_2^{(1)}e^{i\theta} + \text{c.c.}) + \varepsilon^2(\zeta_2^{(2)}e^{2i\theta} + \text{c.c.}) + \dots, \quad (7d)$$

ここで, $\theta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$ である. $\phi_1^{(0)}, \phi_1^{(1)}, \dots$ は z, X, Y, T, ε の関数, $\zeta_1^{(0)}, \zeta_1^{(1)}, \dots$ は X, Y, T, ε の関数であり, これらの主要項は $O(1)$ である. c.c. は前の項の複素共役を表わす. X と T のスケールは短波の分散が長波と短波の相互作用とバランスすること, 及び長波の時間発展が短波の自己相互作用によって支配されることの 2 つの要求から生じる. また, ここでは y 方向の変化は x 方向の変化より十分

ゆっくりしていると仮定している. 上の展開を (3) に代入して, 長波成分と基本調波成分について逐次解くと,

$$\begin{aligned}\phi_1^{(1)} &= i\omega k^{-1} A(\sinh k(1-z) - k\omega^{-2} \cosh k(1-z)) \\ &\quad + \varepsilon^{2/3} \{ \omega k_x k^{-2} A_X(1-z) [\cosh k(1-z) - k\omega^{-2} \sinh k(1-z)] \\ &\quad - \omega^{-2} (\omega k_x k^{-2} - 2c_p) A_X \cosh k(1-z) \} + \dots, \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned}\phi_2^{(1)} &= -i\omega k^{-1} \operatorname{cosech} kh (\cosh k - k\omega^{-2} \sinh k) A \cosh k(z+h) \\ &\quad + \varepsilon^{2/3} \{ -\omega k_x k^{-2} \operatorname{cosech} kh (\cosh k - k\omega^{-2} \sinh k) A_X(z+h) \sinh k(z+h) \\ &\quad + k^{-1} \operatorname{cosech} kh [k\omega^{-2} (\omega k_x k^{-2} - 2c_p) \sinh k - \omega k_x k^{-1} (\sinh k - k\omega^{-2} \cosh k) \\ &\quad + \omega h k_x k^{-1} (\cosh k - k\omega^{-2} \sinh k) \coth kh] A_X \cosh k(z+h) \} + \dots, \end{aligned} \quad (8b)$$

$$\phi_1^{(0)} = \Phi_1 + \varepsilon^{2/3} \Phi_1^{(2)} + \varepsilon^{4/3} \{ -\Phi_{1XX} z^2/2 + (1 - c_p^2) \Phi_{1XX} z + \Phi_1^{(3)} \} + \dots, \quad (8c)$$

$$\phi_2^{(0)} = \Phi_2 + \varepsilon^{2/3} \Phi_2^{(2)} + \varepsilon^{4/3} \{ -\Phi_{2XX} (z+h)^2/2 + \Phi_2^{(3)} \} + \dots, \quad (8d)$$

$$\zeta_1^{(1)} = A + O(\varepsilon^{2/3}), \quad (8e)$$

$$\zeta_2^{(1)} = (\cosh k - k\omega^{-2} \sinh k) A + O(\varepsilon^{2/3}), \quad (8f)$$

$$\zeta_1^{(0)} = c_p \Phi_{1X} + O(\varepsilon^{2/3}), \quad (8g)$$

$$\zeta_2^{(0)} = c_p \Delta^{-1} (\Phi_{2X} - (1 - \Delta) \Phi_{1X}) + O(\varepsilon^{2/3}). \quad (8h)$$

ただし, $A, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_2^{(3)}$ は X, Y, T のみに依存する. 上の解 (実際にはさらに高次の解) を得るためには, 一連の可解条件を満たさなければならない. まず k, ω は分散関係 (4) を満たさなければならない. 次の条件は

$$c_p = \left(-\frac{\partial L}{\partial k} / \frac{\partial L}{\partial \omega} \right) \frac{k_x}{k} = c_g \frac{k_x}{k} \quad (9)$$

であり, さらに c_p は

$$c_p^4 - (1+h)c_p^2 + \Delta h = 0 \quad (10)$$

を満たさなければならないが, これは長波極限での位相スピードを決定する関係式である. 従って, c_p として内部波モードに対する値

$$c_p^2 = (1+h - \sqrt{(1+h)^2 - 4\Delta h})/2$$

を選べば, (9) は共鳴条件 (5) に他ならない. これらの条件は問題の仮定によってすべて満たされている. 以下では $c_p > 0$ とする. 条件 (10) に加えて,

$$\Phi_{1X} = -c_p B / (1 - c_p^2), \quad \Phi_{2X} = c_p B / h \quad (11)$$

が得られる。ただし, $X \rightarrow +\infty$ または $-\infty$ で $\Phi_{1X}, \Phi_{2X} \rightarrow 0$ と仮定した。また,

$$B = c_p(\Phi_{2X} - (1 - \Delta)\Phi_{1X})/\Delta \quad (12)$$

と定義されている。 B は (8h) から明らかなように長波による界面変位の主要項である。一方 A は短波による表面変位の主要項の包絡線である。 $1 - c_p^2 > 0$ なので, 長波による上層及び下層の流速はそれぞれ B と異符号及び同符号である。また, 長波による表面変位の主要項は $c_p\Phi_{1X}$ で与えられるから, B とは異符号である。最終的に次の A, B を支配する方程式が可解条件の一部として得られる。

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial T} + c_g \sin \psi \frac{\partial A}{\partial Y}\right) + a \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + bAB = 0, \quad (13a)$$

$$\frac{\partial B}{\partial T} = r \frac{\partial |A|^2}{\partial X}. \quad (13b)$$

ここで,

$$a = \frac{1}{2}(c'_g \cos^2 \psi + \frac{c_g}{k} \sin^2 \psi), \quad c_g = \frac{d\omega}{dk}, \quad c'_g = \frac{d^2\omega}{dk^2} \quad (14)$$

である。 b, r の表式は長いので省略する。図 5, 6, 7 に $h = 1$ のときの a, b, r の値を示す。 a は ψ が小さいときに負, 大きいときに正になる。以下では a が 0 に近いところは考えない。 b, r は ψ が大きくなると小さくなる。 $\psi = 0$ のとき 1 次元の場合⁵⁾ に帰着する。(13) は適当な変換によって, Grimshaw⁴⁾ によって得られた方程式

$$i\frac{\partial \tilde{A}}{\partial \tilde{T}} + a \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial \tilde{X}^2} + b\tilde{A}\tilde{B} = 0 \quad (14a)$$

$$\frac{\partial \tilde{B}}{\partial \tilde{T}} - 2\kappa_x a \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \tilde{X}} - c_g \sin \psi \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \tilde{Y}} = r \frac{\partial |\tilde{A}|^2}{\partial \tilde{X}} \quad (14b)$$

に帰着させることもできる。

4. 平面波の変調不安定

(13) の解

$$A = A_0 e^{i\omega_0 T}, \quad B = B_0, \quad \omega_0 = bB_0 \quad (15)$$

は短波は一定振幅の平面波, 長波は一定振幅の状態に対応する。特に, $B_0 = 0$ の場合は共鳴条件を満たす一定振幅の表面波のみが存在する状態に対応する。この状態の安定性を調べるために

$$A = (A_0 + A') \exp[i(\omega_0 T + \theta')], \quad B = B_0 + B' \quad (16)$$

とおき, (13) に代入して, 攪乱 A', θ', B' について線形化し,

$$(A', \theta', B') = (\hat{A}, \hat{\theta}, \hat{B}) \exp[i(K_1 X + K_2 Y - \Omega T)] \quad (17)$$

とおくと, Ω に対する方程式

$$\Omega^3 - 2(c_g \sin \psi) K_2 \Omega^2 + ((c_g \sin \psi)^2 K_2^2 - a^2 K_1^4) \Omega - 2abr A_0^2 K_1^3 = 0 \quad (18)$$

が得られる. これが複素根を持てば, (15) は不安定である. $K_2 = 0$ の特別な場合には, (18) は

$$\Omega^3 - a^2 K_1^4 \Omega - 2abr A_0^2 K_1^3 = 0 \quad (19)$$

となり

$$0 < K_1^6 < 27b^2 r^2 A_0^4 / a^4 \quad (20)$$

のとき, 不安定になる. $K_2 \neq 0$ の場合の不安定域の計算例を図 8, 9 に示す. この不安定によって共鳴条件を満たす表面波モードの平面波の変調によって長波が生成される. 短波の波数が共鳴条件 (5) を満たす k から少しずれている場合にも同様の不安定が起ることが容易にわかる.

5. ソリトン解

$\psi = 0$ の場合の方程式系 (13) は逆散乱法によって解くことができる.^{5,6)} また最近, (14) はロンスキアの形で書ける解を持つことが示された.⁸⁾ ここでは (13) のソリトン解を調べる. 変換

$$X = x, \quad Y = -(c_g \sin \psi / a)y, \quad T = -t/a, \quad A = \sqrt{2a^2 / br} S, \quad B = -(a/b)L \quad (21)$$

によって, (13) は

$$i(S_t + S_y) - S_{xx} + LS = 0 \quad (22a)$$

$$L_t = 2(|S|^2)_x \quad (22b)$$

と書ける. 広田⁹⁾に従って

$$S = G/F, \quad L = -2(\log F)_{xx} \quad (23)$$

とおくと, (22) は

$$[i(D_t + D_y) - D_x^2]G \cdot F = 0, \quad (24a)$$

$$(D_t D_x - 2C)F \cdot F = -2GG^* \quad (*は複素共役) \quad (24b)$$

となる. ここで D は広田の双一次演算子で

$$D_t^l D_x^m D_y^n f \cdot g = [(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'})^l (\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'})^m (\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y'})^n f(x, y, t) g(x', y', t')]_{x'=x, y'=y, t'=t}$$

と定義される. C は一般には y, t の関数であるが, ここでは定数とする.

ブライト・タイプのソリトン ($C = 0$) とダーク・タイプのソリトン ($C > 0$) が存

在するが、ダーク・ソリトンについてはあまりおもしろい事は見出されなかったの
でここでは省略し、以下ではブライト・ソリトンについてだけ述べる。従って $C = 0$
である。

$$G = \exp(\eta), F = 1 + a(1, 1^*) \exp(\eta + \eta^*), \eta = px + qy - \lambda t + \eta^{(0)} \quad (25)$$

$$(p, q, \lambda, \eta^{(0)} : \text{複素定数})$$

は次の関係式が成り立つとき (24) の解であり、1-ブライト・ソリトンを表わす。

$$\lambda = ip^2 + q, \quad a(1, 1^*) = [(p + p^*)(\lambda + \lambda^*)]^{-1}. \quad (26)$$

実部と虚部に分けて

$$p = \mu - i\alpha/2, \quad q = \mu\nu + i\beta, \quad \eta^{(0)} = \eta_{\text{R}}^{(0)} + i\eta_{\text{I}}^{(0)}, (\mu, \nu, \alpha, \beta, \eta_{\text{R}}^{(0)}, \eta_{\text{I}}^{(0)} \text{は実数}) \quad (27)$$

と書くと

$$\lambda = \mu(\alpha + \nu) + i(\mu^2 - \alpha^2/4 + \beta), \quad a(1, 1^*) = [4\mu^2(\alpha + \nu)]^{-1}. \quad (28)$$

従って、ブライト・ソリトン解は

$$S = \sqrt{\mu^2(\alpha + \nu)} \operatorname{sech}\{\mu[x + \nu y - (\alpha + \nu)t] + \delta^{(0)}\} \\ \times \exp\{i[-\alpha x/2 + \beta y - (\mu^2 - \alpha^2/4 + \beta)t + \eta_{\text{I}}^{(0)}]\}, \quad (29a)$$

$$L = -2\mu^2 \operatorname{sech}^2\{\mu[x + \nu y - (\alpha + \nu)t] + \delta^{(0)}\}, \quad (29b)$$

$$\delta^{(0)} = \eta_{\text{R}}^{(0)} - (1/2) \log(4\mu^2(\alpha + \nu)) \quad (29c)$$

で与えられる。ただし、条件 $\alpha + \nu > 0$ が満たされなければならない。

2-ソリトン解は次式で与えられる。

$$G = \exp(\eta_1) + \exp(\eta_2) + a(1, 2, 1^*) \exp(\eta_1 + \eta_2 + \eta_1^*) \\ + a(1, 2, 2^*) \exp(\eta_1 + \eta_2 + \eta_2^*), \quad (30a)$$

$$F = 1 + a(1, 1^*) \exp(\eta_1 + \eta_1^*) + a(1, 2^*) \exp(\eta_1 + \eta_2^*) + a(2, 1^*) \exp(\eta_2 + \eta_1^*) \\ + a(2, 2^*) \exp(\eta_2 + \eta_2^*) + a(1, 2, 1^*, 2^*) \exp(\eta_1 + \eta_2 + \eta_1^* + \eta_2^*), \quad (30b)$$

$$\eta_j = p_j x + q_j y - \lambda_j t + \eta_j^{(0)}, \quad \lambda_j = ip_j^2 + q_j, \quad (30c)$$

$$p_j = \mu_j - i\alpha_j/2, \quad q_j = \mu_j\nu_j + i\beta_j, \quad \eta_j^{(0)} = \eta_{\text{R}}^{(0)} + i\eta_{\text{I}}^{(0)}, \quad (30d)$$

$$\alpha_j + \nu_j > 0, \quad (j = 1, 2). \quad (30e)$$

ただし,

$$\begin{aligned} a(i, j^*) &= [(p_i + p_j^*)(\lambda_i + \lambda_j^*)]^{-1}, \quad a(i, j) = (p_i - p_j)(\lambda_i - \lambda_j), \\ a(i^*, j^*) &= [a(i, j)]^*, \quad a(i, j, k^*) = a(i, j)a(i, k^*)a(j, k^*), \\ a(i, j, k^*, \ell^*) &= a(i, j)a(i, k^*)a(i, \ell^*)a(j, k^*)a(j, \ell^*)a(k^*, \ell^*). \end{aligned} \quad (31)$$

次にこの解の挙動を調べてみよう. まず, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $p_1 \neq p_2$, $\nu_1 \neq \nu_2$ の場合を考える. 以下では $\lambda_1 + \lambda_2^* \neq 0$, $p_1 + p_2^* \neq 0$ とする.

$$\eta_{jR} \equiv \mu_j[x + \nu_j y - (\alpha_j + \nu_j)t] + \delta_j^{(0)}, \quad \delta_j^{(0)} \equiv \eta_{jR}^{(0)} - (1/2) \log(4\mu_j^2(\alpha_j + \nu_j)), \quad (32a)$$

$$\eta_{ji} \equiv -\alpha_j x/2 + \beta_j y - (\mu_j^2 - \alpha_j^2/4 + \beta_j)t + \eta_{ji}^{(0)}, \quad (j = 1, 2), \quad (32b)$$

と定義すると, 解の漸近形は次のようになる.

$\eta_{1R} = \text{一定}$, $\eta_{2R} \sim -\infty$ のとき

$$S \sim \sqrt{\mu_1^2(\alpha_1 + \nu_1)} \operatorname{sech}(\eta_{1R}) \exp(i\eta_{1i}) \quad (33a)$$

$$L \sim -2\mu_1^2 \operatorname{sech}^2(\eta_{1R}), \quad (33b)$$

$\eta_{1R} = \text{一定}$, $\eta_{2R} \sim +\infty$ のとき

$$S \sim \sqrt{\mu_1^2(\alpha_1 + \nu_1)} \operatorname{sech}(\eta_{1R} + \Delta_1) \exp[i(\eta_{1i} + \varphi_1)], \quad (34a)$$

$$L \sim -2\mu_1^2 \operatorname{sech}^2(\eta_{1R} + \Delta_1). \quad (34b)$$

ただし,

$$\Delta_1 = \log\left(\left|\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2^*}\right| \left|\frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2^*}\right|\right), \quad \varphi_1 = \arg\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2^*} \cdot \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2^*}\right). \quad (35)$$

一方,

$\eta_{2R} = \text{一定}$, $\eta_{1R} \sim -\infty$ のとき

$$S \sim \sqrt{\mu_2^2(\alpha_2 + \nu_2)} \operatorname{sech}(\eta_{2R}) \exp(i\eta_{2i}), \quad (36a)$$

$$L \sim -2\mu_2^2 \operatorname{sech}^2(\eta_{2R}). \quad (36b)$$

$\eta_{2R} = \text{一定}$, $\eta_{1R} \sim +\infty$ のとき

$$S \sim \sqrt{\mu_2^2(\alpha_2 + \nu_2)} \operatorname{sech}(\eta_{2R} + \Delta_2) \exp[i(\eta_{2i} + \varphi_2)], \quad (37a)$$

$$L \sim -2\mu_2^2 \operatorname{sech}^2(\eta_{2R} + \Delta_2). \quad (37b)$$

ただし,

$$\Delta_2 = \log\left(\left|\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1^*} \frac{p_1 - p_2}{p_2 + p_1^*}\right|\right), \quad \varphi_2 = \arg\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1^*} \cdot \frac{p_1 - p_2}{p_2 + p_1^*}\right). \quad (38)$$

これは2つのソリトンの2次元における通常の相互作用である. 一例が図10に示されている. 図10の全体的なパターンは一定速度で伝わる. ただし, 2つのソリトンの交点の付近では時間的な変動がある. $\lambda_1 = \lambda_2$ あるいは $p_1 = p_2$ のとき ($\lambda_1 + \lambda_2^* = 0$ あるいは $p_1 + p_2^* = 0$ の場合は意味のある解は得られない) には位相のずれが無限大になる. 従って, この場合にはいわゆるソリトン共鳴¹⁰⁾のような現象が起ると考えられる. 次にこれらの場合について調べる. $\lambda_1 = \lambda_2, p_1 \neq p_2, \nu_1 \neq \nu_2$ のときの2-ソリトン解の漸近形は次のようになる.

$\eta_{1R} = \text{一定}, \eta_{2R} \sim -\infty$ のとき

$$S \sim \sqrt{\mu_1^2(\alpha_1 + \nu_1)} \operatorname{sech}(\eta_{1R}) \exp(i\eta_{1I}), \quad L \sim -2\mu_1^2 \operatorname{sech}^2(\eta_{1R}). \quad (39)$$

$\eta_{2R} = \text{一定}, \eta_{1R} \sim -\infty$ のとき

$$S \sim \sqrt{\mu_2^2(\alpha_2 + \nu_2)} \operatorname{sech}(\eta_{2R}) \exp(i\eta_{2I}), \quad L \sim -2\mu_2^2 \operatorname{sech}^2(\eta_{2R}). \quad (40)$$

$\eta_{1R} = \text{一定}, \eta_{2R} \sim +\infty$ のとき

$$S \sim 0, \quad L \sim 0. \quad (41)$$

$\eta_{2R} = \text{一定}, \eta_{1R} \sim +\infty$ のとき

$$S \sim 0, \quad L \sim 0. \quad (42)$$

また $\eta_{1R} \sim \eta_{2R} \sim +\infty$ のとき

$$S \sim 0, \quad L \sim \exp(\eta_1 - \eta_2) \quad \text{および} \quad \exp(\eta_1^* - \eta_2^*) \text{ のある関数.} \quad (43)$$

μ_1, μ_2 が正の場合の例が図11に示されている. (43)の L は図11の $-L$ における一連のピークに対応する. これらのピークは静止しており, 左側の2つのソリトンはそれぞれの一定速度で進む. 従って, ソリトンの継ぎ目でピークは1つつ消えていく. μ_1, μ_2 が負ならば, 一連のピークは2つのソリトンの左側にくる. そしてこの場合にはソリトンの継ぎ目でピークが1つつ生成される. 図12は $\lambda_1 \approx \lambda_2, p_1 \neq p_2, \nu_1 \neq \nu_2$ のときの例である. この場合, ソリトンの右の継ぎ目でピークが作られ, 左の継ぎ目でピークが消えていく. 次に $\lambda_1 \neq \lambda_2, p_1 = p_2, \nu_1 \neq \nu_2$ の場合を考える. この場合には漸近形 (39), (40) だけが生き残り, 他は0になり, 図13に示されているように $-L$ のピークは消えてしまう. 図13のパターンが一定速度で伝わる.

次に $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ の場合を考えよう. このとき2つのソリトンは同方向に伝わる.

$\lambda_1 = \lambda_2$, $p_1 \neq p_2$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ のとき, $\mu_1 > \mu_2 > 0$ と仮定すると, 次の漸近形を得る.

$\eta_{1R} = \text{一定}$, $t \sim -\infty$ または $\eta_{2R} = \text{一定}$, $t \sim +\infty$ のとき

$$S \sim 0, \quad L \sim 0. \quad (44)$$

$\eta_{1R} = \text{一定}$, $t \sim +\infty$ のとき

$$S \sim \sqrt{\mu_1^2(\alpha_1 + \nu)} \operatorname{sech}(\eta_{1R}) \exp(i\eta_{1i}), \quad L \sim -2\mu_1^2 \operatorname{sech}^2(\eta_{1R}). \quad (45)$$

$\eta_{2R} = \text{一定}$, $t \sim -\infty$ のとき

$$S \sim \sqrt{\mu_2^2(\alpha_2 + \nu)} \operatorname{sech}(\eta_{2R}) \exp(i\eta_{2i}), \quad L \sim -2\mu_2^2 \operatorname{sech}^2(\eta_{2R}). \quad (46)$$

この過程の一例が図 14 に示されている. 1 つのソリトンが $-L$ の一連のピークと合体して他のソリトンに変わることがわかる.

次に, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $p_1 = p_2$, $\nu_1 = \nu_2$ すなわち $\mu_1 = \mu_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\nu_1 = \nu_2$, $\beta_1 \neq \beta_2$ の場合を考える. この場合, 2-ソリトン解は

$$S = \left[\frac{\mu_1^2(\alpha_1 + \nu_1)(1 + 2e^{-\xi} \cos \Theta + e^{-2\xi})}{1 + 2e^{-\xi-2(\Gamma-\gamma)} \cos(\Theta - \chi) + e^{-2\xi}} \right] \operatorname{sech}(\eta_{1R} + \Sigma) \exp\{i(\eta_{1i} + \Psi)\}, \quad (47)$$

$$L = -2\mu_1^2 \operatorname{sech}^2(\eta_{1R} + \Sigma), \quad (48)$$

ここで

$$\xi = \eta_{1R}^{(0)} - \eta_{2R}^{(0)}, \quad \gamma = (1/2) \log[4\mu_1^2(\alpha_1 + \nu_1)], \quad \tan \chi = (\beta_1 - \beta_2)/[2\mu_1(\alpha_1 + \nu_1)],$$

$$\Gamma = \frac{1}{2} \log[4\mu_1^2(\alpha_1 + \nu_1) + 2i\mu_1(\beta_1 - \beta_2)], \quad \Sigma = \frac{1}{2} \log[1 + e^{-\xi-2(\Gamma-\gamma)} \cos(\Theta - \chi) + e^{-2\xi}].$$

この解は位相や幅が周期的に変わるうねったソリトンを表わす. 短波は振幅も周期的に変化し, y 軸に沿う周期は $2\pi/|\beta_1 - \beta_2|$ である. 長波の振幅は一定である. この解の一例が図 15 に示されている.

参 考 文 献

- 1) O.M.Phillips : *The Dynamics of the Upper Ocean* (Cambridge University Press, Cambridge, 1977) 2nd ed., p.80.
- 2) D.J.Benney : *Studies Appl. Math.* **55** (1976) 93.
- 3) V.D.Djordjevic and L.G.Redekopp : *J. Fluid Mech.* **79** (1977) 703.
- 4) R.H.J.Grimshaw : *Studies Appl. Math.* **56** (1977) 241.
- 5) M.Funakoshi and M.Oikawa : *J. Phys. Soc. Jpn.* **52** (1983) 1982.
- 6) N.Yajima and M.Oikawa : *Prog. Theor. Phys.* **56** (1976) 1719.
- 7) T.Yamagata : *J. Meteor. Soc. Jpn.* **58** (1980) 160.

- 8) J.Satsuma : "Soliton Equations Generated from Two-Dimensional Toda Equations," preprint.
- 9) R.Hirota : "Bäcklund Transformations, the Inverse Scattering Method, Solitons, and Their Applications," ed. R.M.Miura (Springer-Verlag, Berlin, 1976) p.40.
- 10) 例えば, 矢嶋信男 : "乱流現象の科学", 巽友正編 (東京大学出版会, 1986) 第3章.

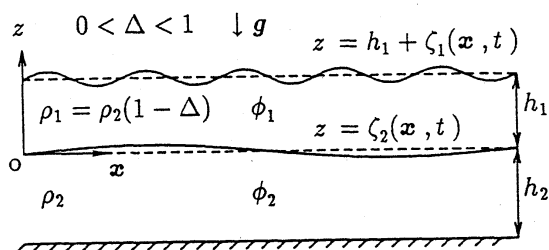


図1. 二層流体系

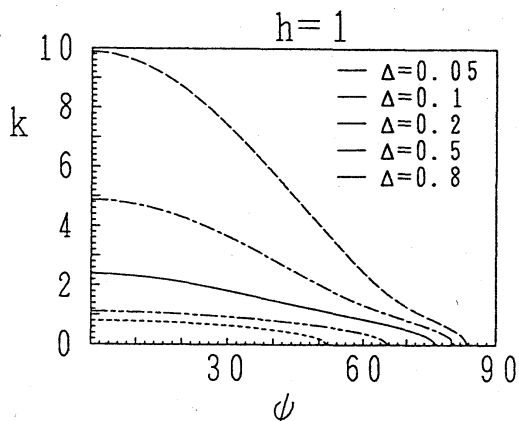


図4. 共鳴条件(5)

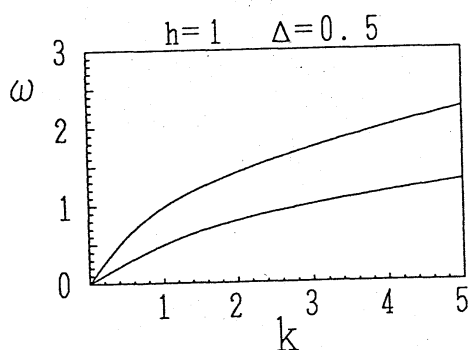
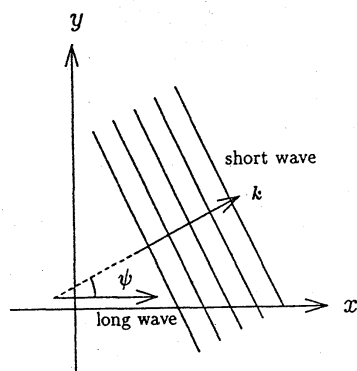
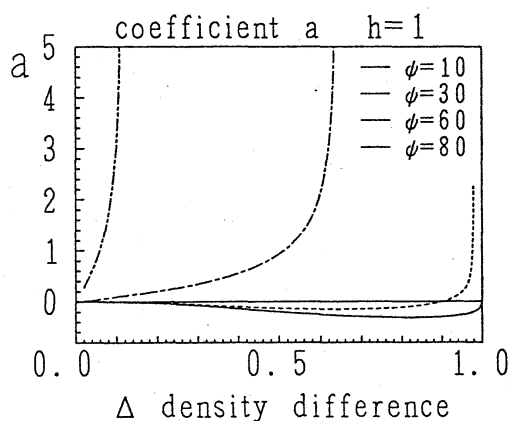


図2. 分散関係式(4)

図3. 短波は長波と角度 ψ をなす方向に伝わる.図5. 係数 a の値

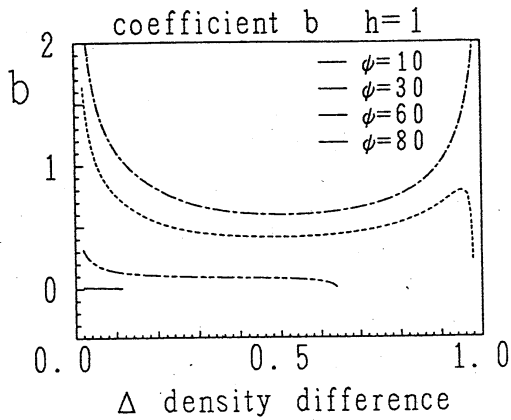
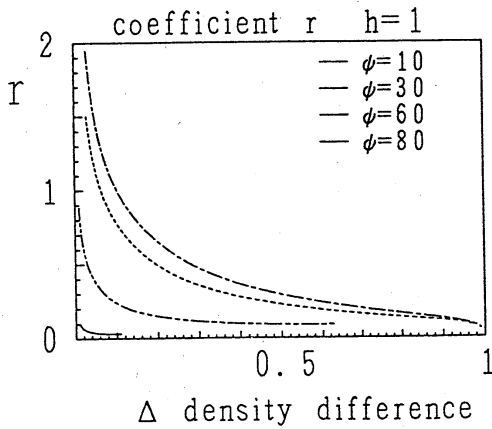
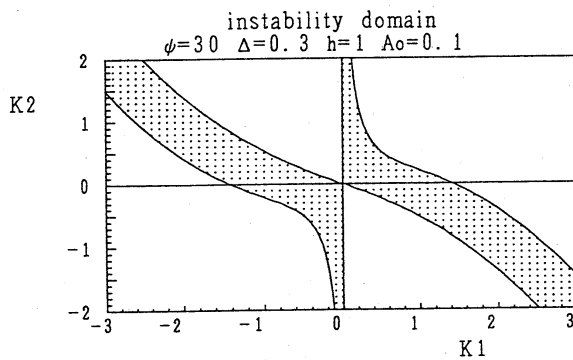
図 6. 係数 b の値図 7. 係数 r の値

図 8. 不安定領域 (影の部分)

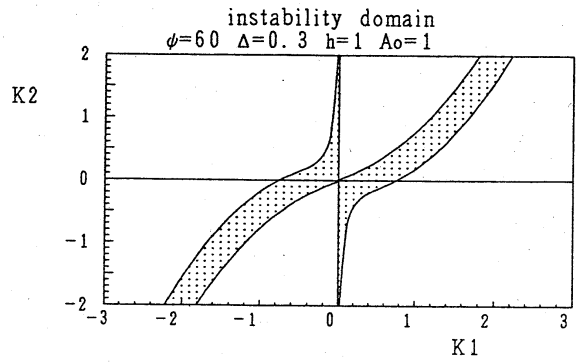


図 9. 不安定領域 (影の部分)

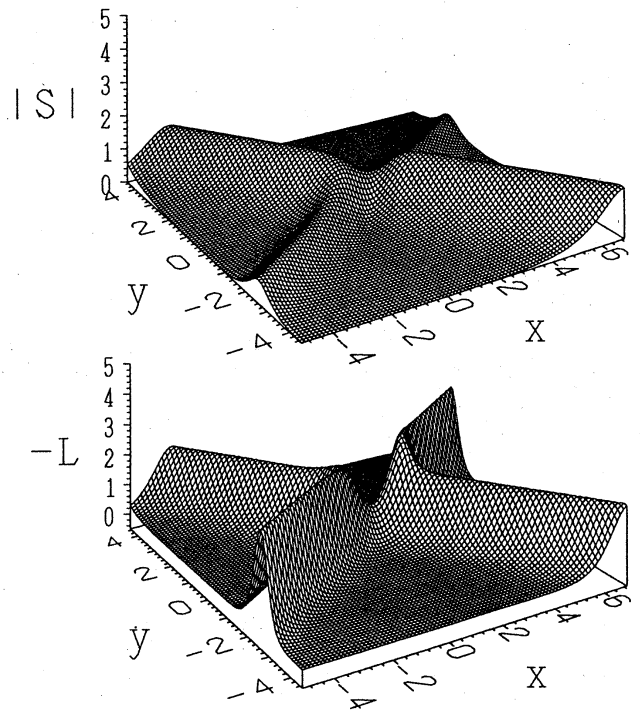


図 10. 2つのソリトンの相互作用

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, p_1 \neq p_2, \nu_1 \neq \nu_2, t=0.$$

$$\lambda_1 = 2 + 1.75i, \lambda_2 = 0.3 + 2.674i,$$

$$p_1 = 1 - 0.5i, p_2 = 1.2 - 1.125i, \nu_1 = 1, \nu_2 = -2,$$

$$\eta_1^{(0)} = \eta_2^{(0)} = 0.$$

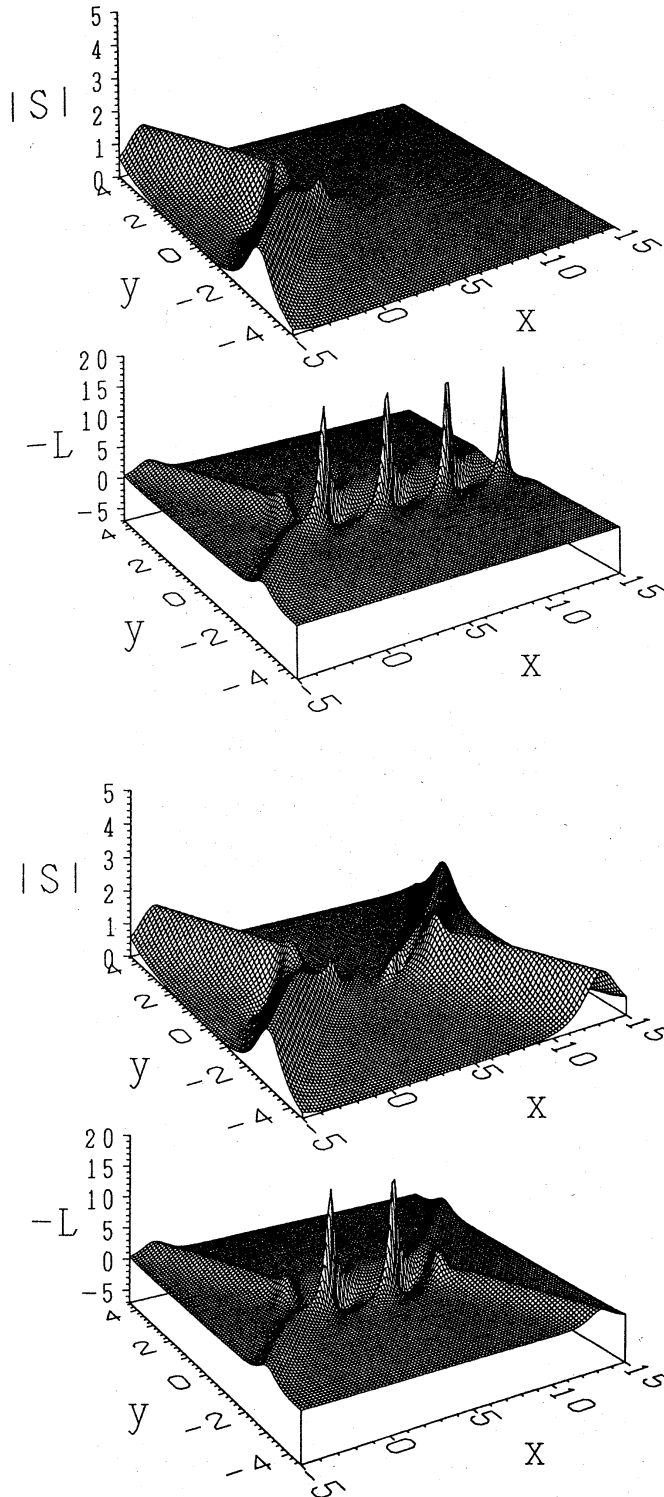


図12. 2つのソリトンの相互作用

$$\lambda_1 \approx \lambda_2, p_1 \neq p_2, \nu_1 \neq \nu_2. t = 0.$$

$$\lambda_1 = 2 + 1.75i, \lambda_2 = 2.002 + 1.752i,$$

$$p_1 = 1 - 0.5i, p_2 = 1.001 - 2i, \nu_1 = 1, \nu_2 = -2,$$

$$\eta_1^{(0)} = \eta_2^{(0)} = 0.$$

図11. 2つのソリトンの相互作用

$$\lambda_1 = \lambda_2, p_1 \neq p_2, \nu_1 \neq \nu_2. t = 0.$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 + 1.75i, p_1 = 1 - 0.5i,$$

$$p_2 = 1 - 2i, \nu_1 = 1, \nu_2 = -2, \eta_1^{(0)} = \eta_2^{(0)} = 0.$$

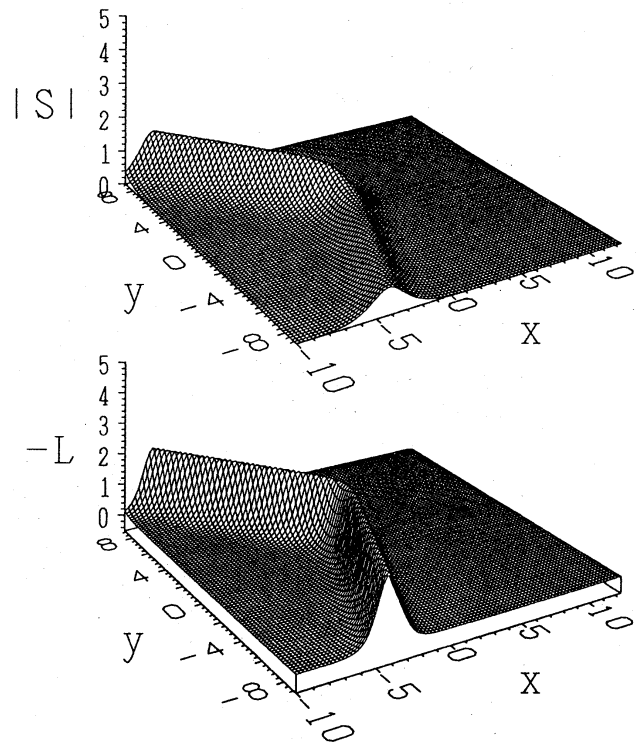


図13. 2つのソリトンの相互作用

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, p_1 = p_2, \nu_1 \neq \nu_2. t = 0.$$

$$\lambda_1 = 2 + 1.75i, \lambda_2 = 0.5 + 2.25i,$$

$$p_1 = p_2 = 1 - 0.5i, \nu_1 = 1, \nu_2 = -0.5,$$

$$\eta_1^{(0)} = \eta_2^{(0)} = 0.$$

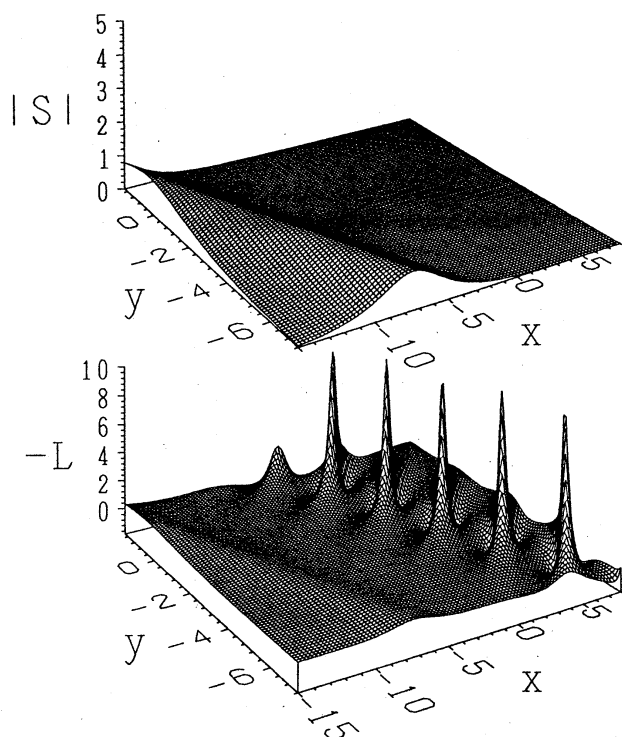


図14. 2つのソリトンの相互作用

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad p_1 \neq p_2, \quad \nu_1 = \nu_2.$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 + 1.75i, \quad p_1 = 1 - 0.5i, \quad p_2 = 0.5 - 1.5i$$

$$\nu_1 = \nu_2 = 1, \quad \eta_1^{(0)} = \eta_2^{(0)} = 0. \quad (a) \quad t = -4,$$

$$(b) \quad t = 0, \quad (c) \quad t = 5.$$

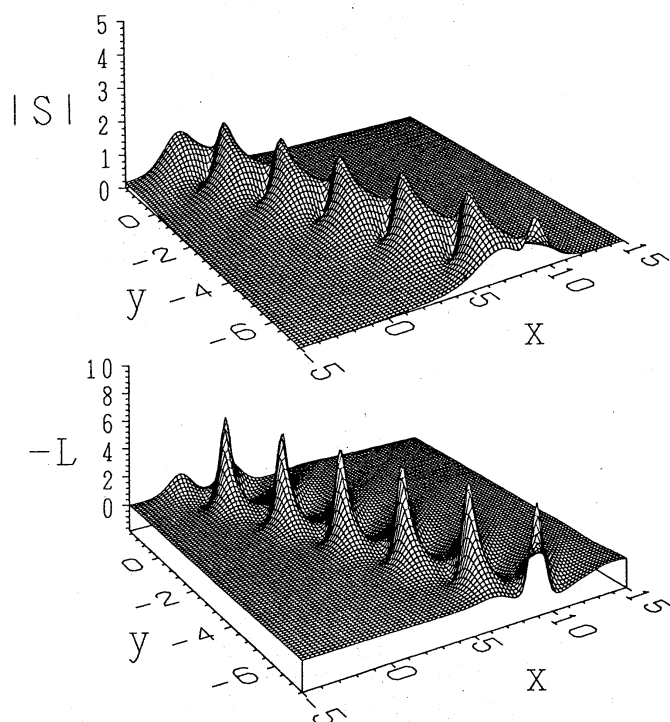


図14(b).

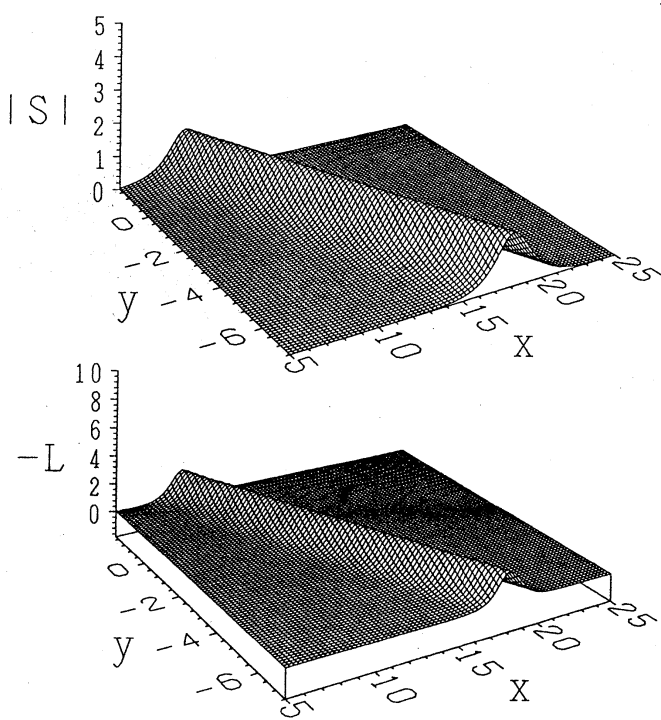


図14(c).

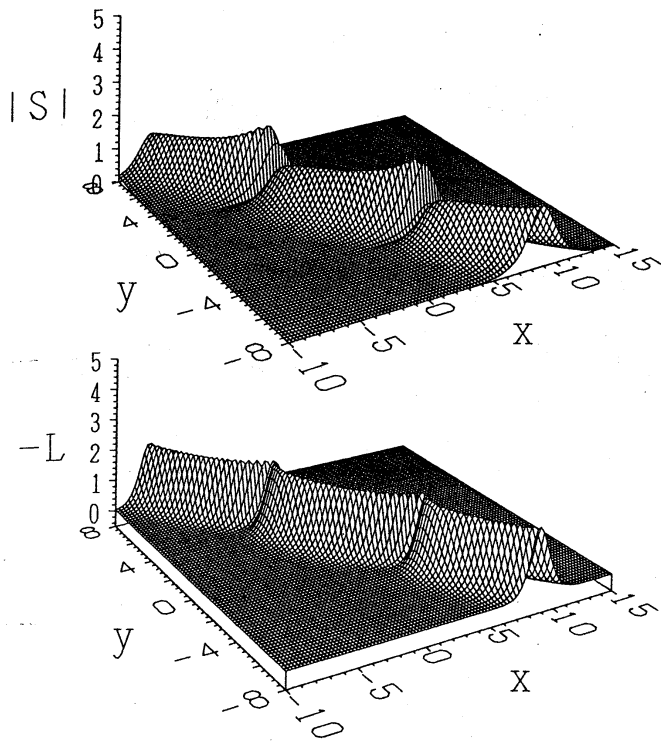


図 15(a). 2つのソリトンの相互作用

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, p_1 = p_2, \nu_1 = \nu_2, t = 0.$$

$$\lambda_1 = 2 + 1.75i, \lambda_2 = 2 + 2.75i,$$

$$p_1 = p_2 = 1 - 0.5i, \nu_1 = \nu_2 = 1,$$

$$\beta_1 = 1, \beta_2 = 2, \eta_1^{(0)} = \eta_2^{(0)} = 0.$$

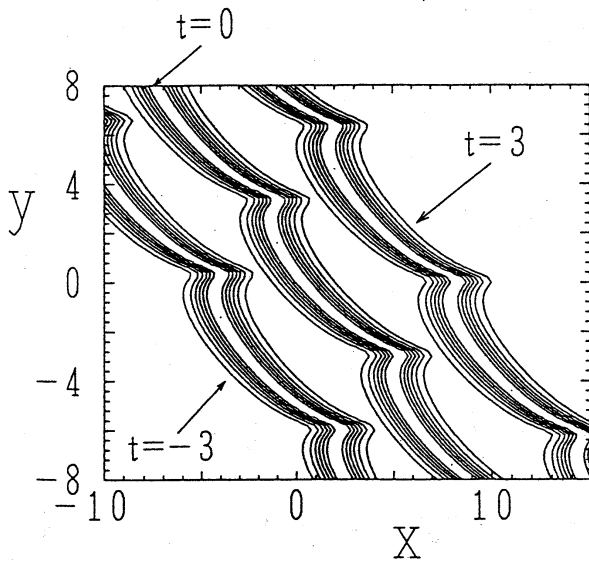


図 15(b). $t = -3, 0, 3$ における $-L$ 等高線.

パラメータの値は図 15(a) と同じ.