

オンオフ間欠性のリャプノフベクトル解析

大阪大学・情報科学研究科 高橋野以, 茶碗谷毅

Noi Takahashi, Tsuyoshi Chawanya

Graduate school of Information Science and Technology, Osaka University

概要

非双曲力学系は多くの物理系のモデルで現れ、間欠性や異常輸送などの複雑な振る舞いが観測されることが知られている。近年、非双曲力学系において様々な特徴的な振る舞いと、Lyapunov ベクトルの非双曲的振る舞いの間に関係があることが盛んに報告されている。本研究では結合ロジスティック写像に現れるオンオフ間欠性に対して Lyapunov ベクトル解析を行い、軌道が同期的状態に引き込まれるというイベントの際に、Lyapunov ベクトルの接触が見られることを示した。さらに、引き込みの度合いと Lyapunov ベクトルのなす角の間の定量的な関係についても明らかにした。

1 背景

双曲性は力学系の相空間の各点における接空間が、指数が正の Lyapunov ベクトルで張られる不安定部分空間と負の Lyapunov ベクトルで張られる安定部分空間の直和に分解できるという性質であり、力学系研究に重要な役割を果たしてきた。双曲力学系には構造安定性や擬軌道追跡性など様々な重要な性質があることが知られており、これまで数多くの数学的研究成果がある [1]。一方で非双曲性は、乱流の振る舞いを記述する Pomeau-Manneville 方程式やハミルトン系といった物理モデルにおいて、間欠的な挙動や緩和現象と関連することが知られ、統計物理の観点からも非双曲系の研究が多くなされている [2, 3]。これまで非双曲力学系の研究は低次元系を対象とすることが多かったこともあり、非双曲系の振る舞いは Lyapunov 指数の性質、特にゼロ Lyapunov 指数の存在や、有限時間 Lyapunov 指数の 0 付近の揺らぎと結びつけて議論されることがほとんどだった [4]。しかし近年、効率的な数値計算アルゴリズムの開発により、系の次元の大小を問わず Lyapunov ベクトルを数値的に調べられるようになったため、Lyapunov ベクトルの振る舞いが非双曲系の性質を強く反映していることが明らかになってきた [5]。ここでは、非双曲性は複数の Lyapunov ベクトルが接することにより特徴付けられる。この非双曲性の評価は、Lorenz アトラクターの homoclinic tangency による双曲-非双曲転移においても有効であることが示され [6]、他にも周期の窓発生といった分岐解析に応用されている [7]。また乱流やキックされた回転子などの物理モデルにおいて、非双曲性と相関関数の減衰・輸送現象といった系の統計的性質との関係も調べられている [8, 9]。さらに乱流におけるバースト状態など、軌道に間欠的な振る舞いが見られる際に、軌道が複数の Lyapunov ベクトルが接触している点に近づくことも示唆されている [10, 11]。またこのとき有限時間 Lyapunov 指数が揺らぎ、Lyapunov 指数と Lyapunov ベクトルによる非双曲的振る舞いが互いに関係しているという興味深い示唆も得られている。

以上を背景に、本研究では unstable dimension variability(UDV) が発生している高次元系における典型的な非双曲系について Lyapunov ベクトル解析を行う。UDV とは複数の不安定周期軌道(UPO)上で、正の Lyapunov 指数の個数が異なる現象であり、同期現象など様々な物理的状況で発生することが知られている [12]。UDV は非双曲性の起源と考えられており、軌道の有限時間 Lyapunov 指数が 0 付近で大きく揺らぐことが報告さ

れている [4]。また [13] では、大自由度局所結合系の UDV において、有限時間 Lyapunov 指数の揺らぎと、Lyapunov ベクトル同士の接触が同じ転移点で発生することが示唆されている。本研究では、UDV の代表的な系である on-off 間欠性を起こす二次元結合ロジスティック写像系をモデルに、Lyapunov ベクトルが非双曲的な振る舞いを示すときの軌道の特徴を調べた。その結果、軌道が同期的状態へ吸引される、すなわち局所的な安定化が起こる際に、2つの Lyapunov ベクトル同士が接触することが示唆された。まず第2節では Lyapunov 解析の方法とモデルについて説明し、続く第3節で解析結果を述べる。最後に第4節で結果に対する議論を行う。

2 解析方法とモデル

2.1 Lyapunov 解析

この節では、一般の d 次元可逆力学系 $x_{n+1} = F(x_n)$ における Lyapunov ベクトルと Lyapunov 指数について概説し、本研究の解析方法を述べる。詳細な定義や数値計算アルゴリズムについては [14, 15] を参考にされたい。力学系 $x_{n+1} = F(x_n)$ の軌道に無限小摂動を加えたときに、摂動は d 個の方向に対して指数的に伸張/収縮していく。それらの方向は d 個の Lyapunov ベクトル $v_n^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, d$) によって表され、また伸張/収縮の速さの長時間平均は d 個の Lyapunov 指数 $\lambda^{(i)}$ によって表される。より正確には、Lyapunov ベクトル $v_n^{(i)}$ と Lyapunov 指数 $\lambda^{(i)}$ は、 $F^n(x)$ の Jacobian $DF^n(x)$ としたとき

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \|DF^N(x_n)u\| = \lambda^{(i)}, \quad \text{if } u \parallel v_n^{(i)} \quad (1)$$

を満たすものとして定義できる。Lyapunov ベクトル $v_n^{(i)}$ の重要な特徴は、ノルム $\|\cdot\|$ の定義には依らず相空間の点 x_n のみの関数で表されることである。このことから相空間の各点の Lyapunov ベクトルで張られる接空間の構造が、各点の性質を反映していると期待できる。

Lyapunov ベクトルのもう1つの重要な性質は共変性、すなわち

$$DF(x_{n-m})^m v_{n-m}^{(i)} = \lambda^{(i)}(x_n, m) v_n^{(i)} \quad (2)$$

を満たす性質である。ここで、 $\lambda^{(i)}(x_n, m)$ は x_n における m ステップ有限時間 Lyapunov 指数である。共変性と有限時間 Lyapunov 指数の定義から、局所的に Lyapunov ベクトル $v_n^{(i)}, v_n^{(j)}$ ($\lambda^{(i)} \neq \lambda^{(j)}$) のなす角 θ_n が 0 に近づくと、その時間区間では有限時間 Lyapunov 指数がほぼ等しくなる ($\lambda^{(i)}(x_n, m) \approx \lambda^{(j)}(x_n, m)$) ことが言える。特に (a) Lyapunov 指数が $\lambda^{(i)} > 0$, $\lambda^{(j)} < 0$ 、あるいは (b) $\lambda^{(i)} \neq 0$ と $\lambda^{(j)} = 0$ の場合は2つのうち少なくとも一方の有限時間 Lyapunov 指数は 0 付近で揺らぐ。このことから上の (a)、(b) の場合は、 $\theta_n \approx 0$ という振る舞いが非双曲性を反映すると考えられる。

以上の Lyapunov ベクトルの性質は可逆力学系に対して成り立つものであるが、非可逆力学系においても1つの実現した時系列に対して Lyapunov ベクトルを求めることが可能であり、Lyapunov ベクトルが相空間の点に対する一価関数ではなくなるものの、上の非双曲性についての議論は同様に成り立つ [15]。

2.2 結合ロジスティック写像

本研究では結合ロジスティック写像

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(1)} &= (1-K)f(x_n^{(1)}) + Kf(x_n^{(2)}), \\ x_{n+1}^{(2)} &= (1-K)f(x_n^{(2)}) + Kf(x_n^{(1)}), \\ f(x) &= ax(1-x) \end{aligned} \quad (3)$$

を扱う。非線形パラメータ $a = 3.95$ は固定し、結合強度 K をコントロールパラメータとする。議論をしやすいするために、対角変数 $\bar{x}_n$ と横断変数 r_n

$$\bar{x}_n \equiv \frac{x^{(1)} + x^{(2)}}{2}, r_n \equiv \frac{x^{(1)} - x^{(2)}}{2} \quad (4)$$

を定義すると、式 (3) は

$$\begin{aligned} \bar{x}_{n+1} &= f(\bar{x}_n) - ar_n^2 \\ r_{n+1} &= (1 - 2K)f'(\bar{x}_n) \end{aligned} \quad (5)$$

となる。アトラクターは対角線領域 ($r_n = 0$) における横断変数 r_n の拡大率である横断 Lyapunov 指数 $\lambda_{\perp} \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln|(1 - 2K)f'(\bar{x}_n)|$ の値で分類できる。対角線領域では横断 Lyapunov 指数 $\lambda_{\perp}$ は第二 Lyapunov 指数と一致する。 $\lambda_{\perp} > 0$ の場合はアトラクターは対角線領域から離れた領域となり、非同期状態と呼ばれる (次節図 2(a), 4(a) 参照)。また $\lambda_{\perp} < 0$ の場合はアトラクターは対角線領域に閉じ込められ、完全同期状態となる。そして $\lambda_{\perp} = 0$ の場合はオンオフ間欠性が現れ、アトラクター上の軌道は r_n が小さい値を取るラミナー状態と、 r_n が局所的に増大するバースト状態を交互に繰り返す (次節図 2(b), 4(b) 参照)。この局所的な安定性と不安定性が交互に発生する振る舞いは、アトラクター内部において横断方向に吸引的な UPO と反発的な UPO が存在している、すなわち UDV が生じていることによる [16]。図 1 の相図に表されたように、結合強度 K を変えていくとアトラクターは非同期状態、オンオフ間欠性、完全同期状態と遷移していく。

Lyapunov ベクトル $v_n^{(1)}, v_n^{(2)}$ と $x^{(1)}$ 軸とのなす角を $\phi_n^{(1)}, \phi_n^{(2)}$ としたとき、Lyapunov ベクトル同士のなす角 θ_n を

$$\theta_n = \min(|\phi_n^{(1)} - \phi_n^{(2)}|, \pi - |\phi_n^{(1)} - \phi_n^{(2)}|) \quad (6)$$

と定義する。対角線領域上の軌道に対して Lyapunov ベクトルは Jacobian の対角行列 $(DF^n)^T DF^n$ の固有ベクトルとして理論的に求めることが可能で、第一 Lyapunov ベクトルは対角方向を向き、第二 Lyapunov ベクトルは横断方向を向く、つまり $(v^{(1)})^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ ($\phi^{(1)} = \pi/4$)、 $(v^{(2)})^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ ($\phi^{(2)} = -\pi/4$) を満たす (双曲的) ことがわかる。

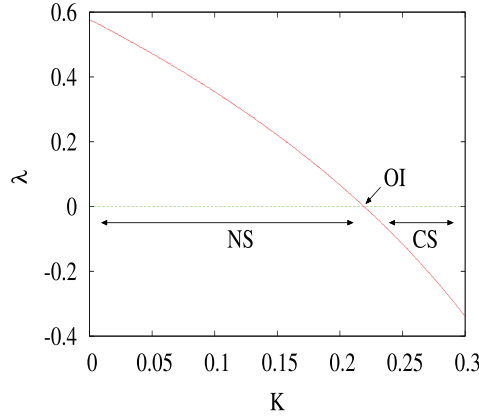


図 1 横断 Lyapunov 指数 $\lambda_{\perp}$ の結合強度 K 依存性。非同期状態 (Non Synchronization)、オンオフ間欠性 (On-off Intermittency)、そして完全同期状態 (Complete Synchronization) への遷移が見られる。

3 解析結果

まず非同期状態 ($a = 0.191$) とオンオフ間欠性 ($a = 0.2189$) における各 Lyapunov ベクトルの角度 $\phi_n^{(i)}$ ($i = 1, 2$) 及び Lyapunov ベクトル同士のなす角 θ_n の時系列を図 2 に示す。オンオフ間欠性の場合に顕著であるが、 $|r_n| \ll 1$ では、 $\phi_n^{(1)} \approx \pi/4$, $\phi_n^{(2)} \approx -\pi/4$ となり、 $r_n = 0$ (対角線領域) の場合と同様の Lyapunov ベクトルの双曲的振る舞いが現れることがわかる。一方で $|r_n|$ が十分大きいときは、非双曲的振る舞いが現れる。次に、一つの軌道に対する θ_n の分布を図 3 に示す。非同期状態、オンオフ間欠性いずれの場合も $\theta \approx 0$ で分布は減衰しておらず、非双曲性は存在することが確認できる。またオンオフ間欠性の場合、軌道の振る舞いから予想されるように、 $\theta \approx \pi/2$ の頻度が多いことが見て取れる。

次に図 4(a), (b) に非同期状態、オンオフ間欠性で軌道上の点を、角度 θ が異なる点で色分けし、 θ が小さい順に重ね書きした。また図 4(c) にオンオフ間欠性で非双曲性が強い ($\theta \leq 0.1$) 領域だけを示した。ここから非同期状態では相空間のどの領域でも双曲的 ($\theta \approx \pi/2$) な振る舞いが見られ、一方でオンオフ間欠性では相空間中で非双曲性が異なる領域が棲み分けられていることがわかる。興味深いことに図 4(c) から、軌道に対角線領域 ($r_n = 0$) へと吸引する集合 $A \equiv \{(x^{(1)}, x^{(2)}) | \bar{x}_n = \frac{1}{2}\}$ (式 (5) 参照) 近傍を通過するとき、非双曲性が強くなっていることがわかる。軌道が吸引集合 A との距離 $\varepsilon_n \equiv |\bar{x}_n - \frac{1}{2}|$ が十分小さい領域を通過したときの前後の点 $\bigcup_{k=-m}^m \{(x_{n+k}^{(1)}, x_{n+k}^{(2)}) | \varepsilon_n < \varepsilon_{th}\}$ を図 4(d) に示したが、図 4(c), (d) には明らかな類似性が見て取れる。式 (5) より、対角線領域への引き込みの度合い $\frac{r_{n+1}}{r_n}$ は ε_n に比例することから、軌道に対角線領域に急激に引き込む過程 ($\frac{r_{n+1}}{r_n} \ll 1$) と Lyapunov ベクトルの振る舞いに強い関係があることが示唆される。

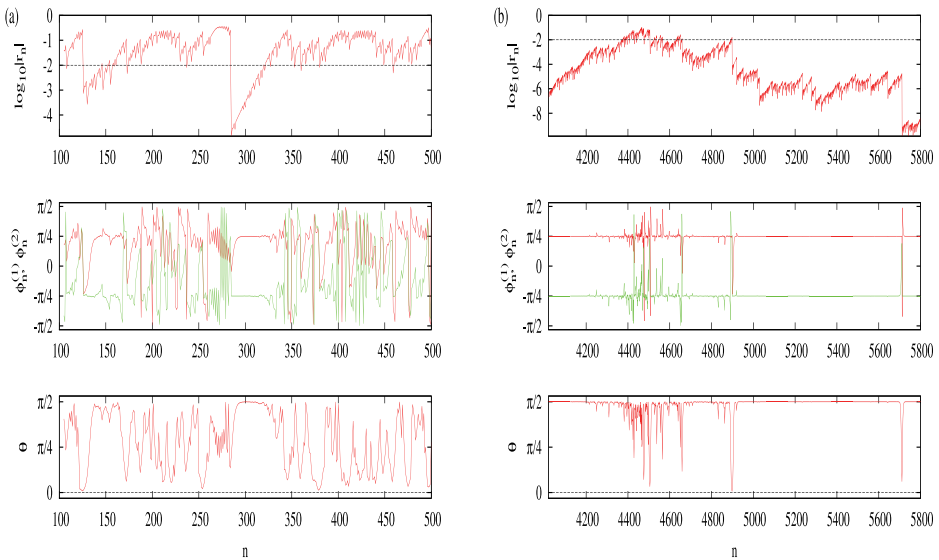


図 2 (a) 非同期状態 (b) オンオフ間欠性状態における横断変数 r_n 、各 Lyapunov ベクトルの角度 $\phi_n^{(i)}$ ($i = 1, 2$) (赤線は $i = 1$ 、緑線は $i = 2$) 及び Lyapunov ベクトル同士のなす角 θ_n の時系列。

対角線領域への引き込みと Lyapunov ベクトルの振る舞いの関係をより詳しく調べるために、図 5 に引き込みが起こる時間近傍の領域で横断変数 r_n 、Lyapunov ベクトルの角度 $\phi_n^{(i)}$ 、Lyapunov ベクトル同士のなす角

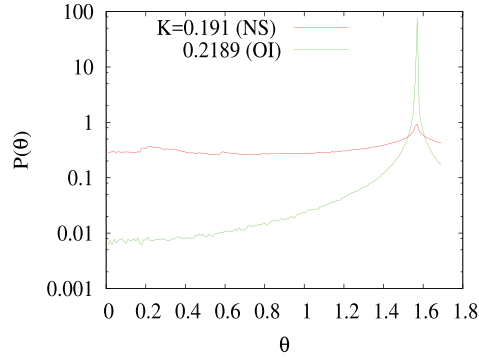


図3 非同期状態とオンオフ間欠性状態における、Lyapunov ベクトル同士のなす角 θ の分布。

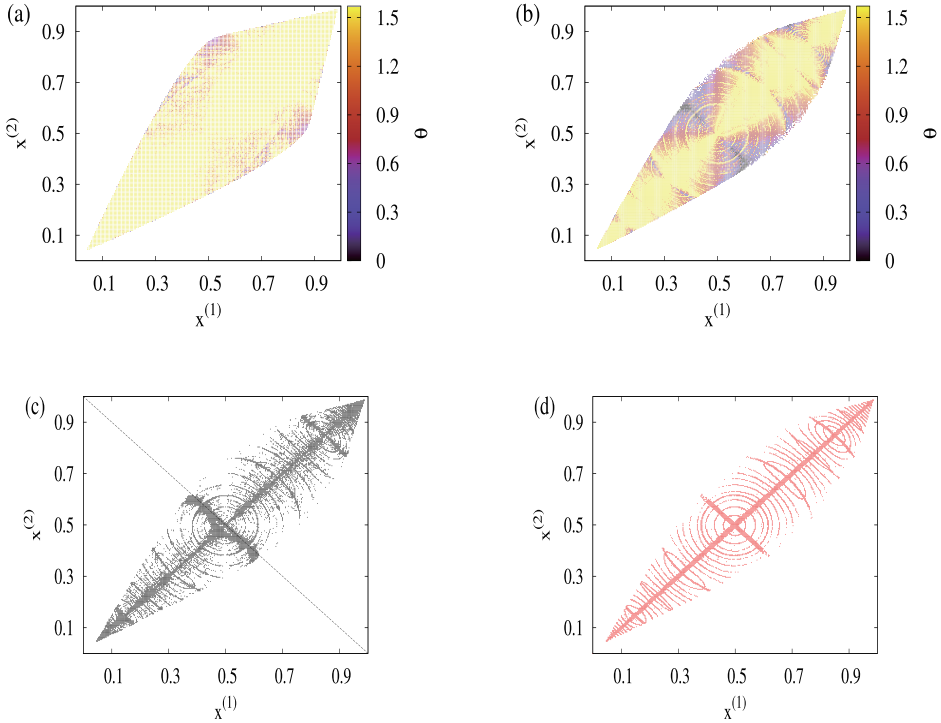


図4 (a) 非同期状態及び (b) オンオフ間欠性で軌道上の点を、角度 θ が異なる点で 0.1 刻みで色分けし、 θ が小さい順に重ね書きしたプロット。(c)(b) において $\theta \leq 0.1$ の点のみを示したもの。点線は $\bar{x} = \frac{1}{2}$ で表される曲線。(d) 軌道が吸引集合 A との距離 $\varepsilon_n \equiv |\bar{x}_n - \frac{1}{2}|$ が十分小さい領域を通過したときの前後の点 $\bigcup_{k=-m}^m \{(x_{n+k}^{(1)}, x_{n+k}^{(2)}) | \varepsilon_n < \varepsilon_{th}\}$ 。ここで $\varepsilon_{th} = 10^{-2}$, $m = 6$ とした。

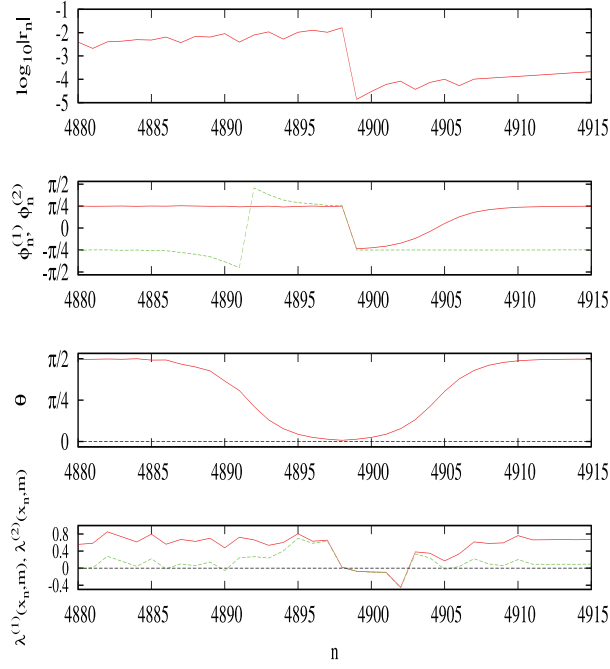


図5 オンオフ間欠性における引き込み過程の横断変数 r_n 、Lyapunov ベクトルの角度 $\phi_n^{(i)}$ 、Lyapunov ベクトル同士のなす角 θ_n 及び有限時間 Lyapunov 指数 $\lambda^{(i)}(x_n, m)$ ($m=5$) の振る舞い

θ_n 及び有限時間 Lyapunov 指数 $\lambda^{(i)}(x_n, m)$ を図示した。ここから引き込み過程 (図5においては $n=4987$ 前後) において以下の (a) – (c) が順に起こることがわかる。(a) 引き込み前は第二 Lyapunov ベクトルは第一 Lyapunov ベクトルと同じ対角方向を向き出す ($\phi_n^{(1)} \approx \phi_n^{(2)} \approx \pi/4$)。このとき θ_n は極小値を取る、つまり吸引集合 A に最も近づいた時刻で非双曲性が最も強くなる。(b) 引き込みの瞬間には両 Lyapunov ベクトルが横断方向へと向く ($\phi_n^{(1)} \approx \phi_n^{(2)} \approx -\pi/4$)。また、このとき引き込み (安定化) により有限時間 Lyapunov 指数 $\lambda^{(i)}(x_n, m)$ が大きく減少し、符号が正から負へ変化する。(c) 引き込み後には第一 Lyapunov ベクトルが対角方向へと戻っていき ($\phi_n^{(1)} \approx \pi/4$)、第二 Lyapunov ベクトルはそのままの向きを保つ ($\phi_n^{(2)} \approx -\pi/4$)。

上の (a) – (c) を踏まえて、時刻 n において引き込みが起こるときに、極小値を取る Lyapunov ベクトルのなす角 θ_n と吸引集合 A との距離 $\varepsilon_n (= |\bar{x}_n - \frac{1}{2}|)$ の関係を議論する。まず (i) 引き込みの直前の第一 Lyapunov ベクトルは対角方向を向き ($\phi_n^{(1)} = \pi/4$)、(ii) 引き込みの直後の第二 Lyapunov ベクトルは横断方向を向く ($\phi_{n+1}^{(2)} = -\pi/4$) ことを仮定する。この仮定は横断変数 r_n が十分小さいときは妥当である。引き込みの直前の第二 Lyapunov ベクトルは共変性 $v_n^{(2)} = DF^{-1}(\bar{x}_n, r_n)v_{n+1}^{(2)}$ から

$$v_n^{(2)} \parallel \begin{pmatrix} r_n + (\frac{1}{2} - \bar{x}_n) \\ r_n - (\frac{1}{2} - \bar{x}_n) \end{pmatrix} \quad (7)$$

と求められる。よって $\phi_n^{(2)} = \text{atan}(\frac{r_n - (\frac{1}{2} - \bar{x}_n)}{r_n + (\frac{1}{2} - \bar{x}_n)})$ となり、2つの Lyapunov ベクトルのなす角 θ_n は式 (6) より

$$\theta_n = \min(|\phi_n^{(1)} - \phi_n^{(2)}|, \pi/2 - |\phi_n^{(1)} - \phi_n^{(2)}|) \quad (8)$$

$$= \text{atan}\left(\frac{-\xi_n + 1}{\xi_n + 1}\right) + \pi/4 \quad (\xi_n = |r_n|/\varepsilon_n) \quad (9)$$

を満たす。図 6 に示した引き込みの際の θ と、吸引集合との距離 ε と横断変数 r の比 ξ の関係から、式 (9) は良く成り立つことがわかる。なお式 (9) が成り立たない点が特に ξ が大きい領域で見られるが、これは r が十分小さくない点であり、Lyapunov ベクトルに対する上の仮定 (i), (ii) が成立しないためと考えられる。関係式 (9) から、対角領域への引き込みが起こるときは引き込みの大きさと対角領域からの距離に依存して、Lyapunov ベクトルのなす角 θ の極小値が決まることを表していることがわかる。これは、オンオフ間欠性における引き込みというイベントと非双曲性の強さの定量的な関係を表している。

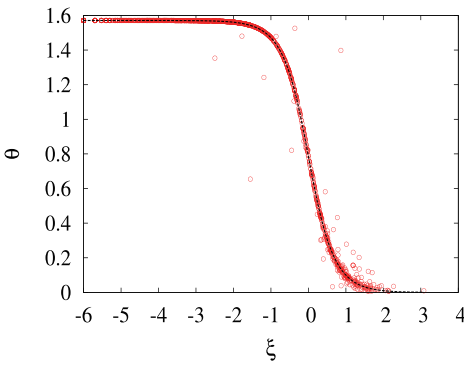


図 6 引き込みの際の Lyapunov ベクトル同士のなす角 θ と、吸引集合との距離 ε と横断変数 r の比 $\xi = |r|/\varepsilon$ の関係。点線は式 (9) で与えられる曲線。

4 議論

本研究では結合ロジスティック写像に生じるオンオフ間欠性に対して、Lyapunov ベクトル解析を行い、軌道が対角領域に急激に引き込まれるとき、すなわち局所的な安定化が起こる際に Lyapunov ベクトル同士の接触が見られることを数値的に示した。さらに、引き込みの度合いと非双曲性の強さ (Lyapunov ベクトル同士のなす角) の定量的な関係も明らかにした。また、引き込み過程においては有限時間 Lyapunov 指数が正から負への変化するため、Lyapunov 指数と Lyapunov ベクトルそれぞれの非双曲的振る舞いが結びついていることも示唆されている。高次元系や連続力学系のオンオフ間欠性においても同様の振る舞いが見られるかどうかを調べるのは今後の課題である。

本研究で見られた系の状態の急激な変化と Lyapunov ベクトルの接触の関係は、他の非双曲系でもみられる普遍的な性質であると言える。Fitzhugh-Nagumo 方程式では、速い変数の急激な jump(critical transision) において Lyapunov ベクトル同士のなす角が 0 に近づく [10]。また乱流の大自由度モデルである Shell モデルでは、系がラミナーバースト転移を起こす、すなわち局所的な不安定化を起こす際に、Lyapunov ベクトル同士の接触がみられる [11]。これらの例からわかるように、Lyapunov ベクトルの非双曲的振る舞いや対応する系の振る舞いは様々な共通点や相違点がある。Lyapunov ベクトルの振る舞いの観点から非双曲力学系のタイプを分類・整理していくことも、今後の重要な課題である。

参考文献

[1] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer (1983).

- [2] Y. Pomeau and P. Manneville, Commun. Math. Phys. **74**, 189 (1980).
- [3] Y. Aizawa and Y. Kikuchi, T. Harayama, K. Yamamoto, M. Ota, and K. Tanaka, Prog. Theor. Phys. **98**, 36 (1989).
- [4] E. J. Kostelich, I. Kan, C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, Physica D **109**, 109 (1997).
- [5] F. Ginelli, P. Poggi, A. Turchi, H. Chate, R. Livi, and A. Politi, Phys. Rev. Lett. **99**, 130601 (2007).
- [6] Y. Saiki and M. U. Kobayashi, JSIAM Lett. **2**, 107 (2010).
- [7] M. U. Kobayashi and Y. Saiki, Phys. Rev. E **89**, 022904 (2014).
- [8] M. Inubishi, M. U. Kobayashi, S. Takehiro, and M. Yamada, Phys. Rev. E **85**, 016331 (2010).
- [9] S. R. Lopes, J. D. Szezech, Jr., R. F. Pereira, A. A. Bertolazzo, and R. L. Viana Phys. Rev. E **86**, 016216 (2012).
- [10] N. Sharafi, M. Timme, and S. Hallerberg, Phys. Rev. E **96**, 032220 (2017).
- [11] M. U. Kobayashi and M. Yamada, J. Phys. A: Math. Theor. **46**, 254008 (2010).
- [12] Y-C. Lai, D. Lerner, K. Williams, and C. Grebogi, Phys. Rev. E **60**, 5445 (1999).
- [13] P. V. Kuptsov, J. Phys. A: Math. Theor. **46**, 254016 (2013).
- [14] 竹内一将, 数理解析研究所講究録, **1827**, 123 (2013).
- [15] F. Ginelli, H. Chate, R. Livi, and A. Politi, J. Phys. A: Math. Theor. **46**, 1 (2013).
- [16] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge University Press, (2003).