

A test for the fundamental group of a 3-manifold

阪市大 理 河内明夫

(Akio Kawauchi)

どのような有限表示群も必ずある n -次元有向連結閉多様体の基本群に同型であることはよく知られる。一方、それは必ずしも 3 -次元コンパクト多様体の基本群に同型になるとは限らない。ある与えられた有限表示群がいつ 3 -次元コンパクト多様体の基本群に同型になるかを決定することは難しい問題である。例えば、Lyndon-Schupp [6, p192] によつて、一般の有限表示群が 3 -次元コンパクト多様体の基本群に同型であるかどうかを決定する アルゴリズム が存在しないことがわかる。(この事実は Gonzalez-Acuna によつて筆者に知られた)

この報告では、無限位数の元をもつ有限表示群がどの 3 -次元コンパクト多様体の基本群にも同型にならないことをテストする方法を与える。筆者は [3], [4] においても同様の研究を行ったが、当報告がほぼその最終的な形となった。(詳しくは [5] 参照のこと。)

1. 無限巡回商群をもつ群から生成された加群

$\langle t \rangle$ を文字 t で生成された無限巡回群で, $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ をその整数
数群環とする。epimorphism $\gamma: K \rightarrow \langle t \rangle$ をもつ群 K を考
える。 γ の核を $\tilde{K}$ とかく。

今 K の群表示 $(x_0, x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_m) \ (n \leq +\infty, m \leq +\infty)$ で $\gamma(x_0) = t, \gamma(x_j) = 1 \ (j \geq 1)$ とするものを考
える。 $\{r_1^*, \dots, r_m^*\}$ を $\bigoplus_m \mathbb{Z}\langle t \rangle$ の自由生成系, $\{x_0^*, x_1^*, \dots, x_n^*\}$
を $\bigoplus_{n+1} \mathbb{Z}\langle t \rangle$ の自由生成系とする。 $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -列

$$\bigoplus_m \mathbb{Z}\langle t \rangle \xrightarrow{d_2} \bigoplus_{n+1} \mathbb{Z}\langle t \rangle \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}\langle t \rangle$$

を $d_2(r_i^*) = \sum_{j=0}^n \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)^r x_j^*, \ d_1(x_j^*) = \gamma(x_j) - 1$ で定
義する。このとき, $d_1 d_2 = 0$ が成立する。 K の群表示の
おのおのの選択により $d_1(x_0^*) = t - 1, d_1(x_j^*) = 0 \ (j \geq 1)$ 。
従って, $\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_0}\right)^r = 0 \ (i \geq 1), \ \text{Ker } d_1 = \bigoplus_m \mathbb{Z}\langle t \rangle$, ここで
 x_i^* は $\bigoplus_n \mathbb{Z}\langle t \rangle$ の i 番目の自由因子を生成する ($1 \leq i \leq n$)。

とくに d_2 は写像 $d_2': \bigoplus_m \mathbb{Z}\langle t \rangle \rightarrow \bigoplus_n \mathbb{Z}\langle t \rangle$ を決定する,
ここで $d_2'(r_i^*) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)^r x_j^*$ 。 Crowell の結果に
より, $H_1(K; \mathbb{Z})$ は $\text{Ker } d_1 / \text{Im } d_2 = \bigoplus_m \mathbb{Z}\langle t \rangle / \text{Im } d_2'$ に
 $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -同型である。 J を この (i, j) 成分が $\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)^r$ で
おけるような行列とする ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$)。このとき,

次の補題が示された:

補題 1.1. 行列 J は $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -加群 $H_1(\tilde{K}; \mathbb{Z})$ の表示行列である。つまり, 次のような $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -完全列がある:

$$\bigoplus_m \mathbb{Z}\langle t \rangle \xrightarrow{J} \bigoplus_n \mathbb{Z}\langle t \rangle \rightarrow H_1(\tilde{K}; \mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

系 1.2. K が有限生成ならば, $H_1(\tilde{K}; \mathbb{Z})$ は $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -加群として有限生成となる。

2. Alexander 加群 と 自己相反加群

$\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -加群 T に対し, $\mathbb{Q}\langle t \rangle$ -加群 $T \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ を $T_{\mathbb{Q}}$ で表わし, $\mathbb{Z}_p\langle t \rangle$ -加群 $T \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ を T_p とかく, ここで $\mathbb{Z}_p$ は素位数 p の体である。整数 n の torsion 積 $\text{Tor}_{\mathbb{Z}}(T, \mathbb{Z}_p) = \{x \in T \mid px=0\}$ は $T^{(p)}$ と表わされる。 $T^{(p)}$ は $\mathbb{Z}_p\langle t \rangle$ -加群となる。

次は明らか:

補題 2.1. $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -加群 T が torsion $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -加群 $\Leftrightarrow T_{\mathbb{Q}}$ が torsion $\mathbb{Q}\langle t \rangle$ -加群。

定義 2.2. 有限生成 torsion $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -加群を Alexander 加群 といふ。

例えば、次の補題から容易に Alexander 加群の例を作れる。

補題 2.3. 有限生成群 K が $H_1(K; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ であれば、その $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -加群 $H_1(K; \mathbb{Z})$ は Alexander 加群になる。(証明は略, [4] 参照)

R を 1 をもつ可換環とし, T を $R\langle t \rangle$ -加群とする。 $f(t) \in R\langle t \rangle$ $x \in T$ に対し $f(t) \cdot x = f(t')x$ とおく。これは T に第二の $R\langle t \rangle$ -加群構造を与える。それを T^* とかく。

定義 2.4. 有限生成 $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -加群 T は次を満たすとき、自己相反的 であるといふ：

- (i) $T_{\mathbb{Q}} \cong T_{\mathbb{Q}}^*$ ($\mathbb{Q}\langle t \rangle$ -加群として),
- (ii) 素数 p で $T^{(p)} \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p\langle t \rangle}[T_p, \mathbb{Z}_p\langle t \rangle]^*$ ($\mathbb{Z}_p\langle t \rangle$ -加群として)。

Alexander 加群 T に対し, $A(t) \in \mathbb{Q}\langle t \rangle$ を $t: T_{\mathbb{Q}} \rightarrow T_{\mathbb{Q}}$ の特性多項式とする。 $\mathbb{Q}\langle t \rangle$ の unit 倍を無視して考えたときの $A(t)$ のことを Alexander 加群 T の Alexander

多項式 とし、 $\mathbb{Q}[t]$ が PID であることから、 $A(t)$ は $T_{\mathbb{Q}}$ の巡回的 $\mathbb{Q}[t]$ -分解の位数イデアルの生成元である。

補題 2.5. 性質 (i) をもつ Alexander 加群 T に対し、その Alexander 多項式 $A(t)$ は自己相反的である。即ち、 $A(t) = u A(t^{-1})$ (ある unit $u \in \mathbb{Q}[t]$ に対して)。

$\mathbb{Z}_p[t]$ は PID 故、 T_p は $\mathbb{Z}_p[t]$ 上有限生成だから、次を知る。

補題 2.6. 性質 (ii) をもつ Alexander 加群 T に対し、 $T^{(p)}$ は自由 $\mathbb{Z}_p[t]$ -加群で、その階数は T_p のものに等しい。とくに $T^{(p)}$ はアーベル群として trivial か又は無限群になる。

3. 3次元多様体の基本群のいくつかの性質.

とくに断らない限り、多様体とは三角形分割され得る多様体を意味する。

3.1. 3次元多様体の基本群の任意の部分群 G は 3次元多様体 M' (即ち、 G に対応した M の被覆) の基本群である。

る。さらに、もし G が有限生成ならば、 M' はコンパクトとでき、 G は有限表示群になる。また、 M が有向なら、 M' もまた有向。(Hempel [1, Chapter 8], Jaco [2, CHAPTER V] 参照)

補題 3.2 $G = \pi_1(M)$ が有限生成群ならば、 G は無限位数の元をもつ。(これは [4, (2.3)] の対偶。証明はそこを参照)

M を 3 次元コンパクト有向多様体で、epimorphism $\gamma: \pi_1(M) \rightarrow \langle t \rangle$ が与えられておけるとする。 $\bar{M}$ を $\text{Ker } \gamma$ に対応する M の被覆とする。 $\bar{M}$ の被覆変換群は $\langle t \rangle$ と同一視される。ホモロジー群 $H_1(\bar{M}; \mathbb{Z})$ は自然な有限生成 $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -加群構造をもつ。

定理 3.3. $\dim_{\mathbb{Q}} H_1(\bar{M}; \mathbb{Q}) < +\infty$ のとき、 $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -加群 $H_1(\bar{M}; \mathbb{Z})$ は自己相反的である。(証明は [4, 定理 8.1]) 又は [5] を参照。)

4. 主定理.

G を $H_1(K; \mathbb{Z})$ が無限となる有限生成部分群 K を含んだ群とする。Alexander 加群 T がある epimorphism $\gamma: K \rightarrow \langle t \rangle$ により K から生成されたと仮定する。

定義 4.1. その Alexander 加群 T は群 G の中で産出されたという。

次が三定理である:

定理 4.2. G を無限位数の元をもつ群とする。

- (1) G が 3次元有向多様体の基本群に同型と仮定する。そのとき, G の中で産出されるどの Alexander 加群も自己相反的である,
- (2) G が 3次元無向多様体の基本群に同型と仮定する。その時, G は指数 2 の部分群 G' が存在して, その中で産出されるどの Alexander 加群も自己相反的である。

(証明) K を G の有限生成部分群で, ある $\gamma: K \rightarrow \langle + \rangle$ により Alexander 加群 $H_1(\tilde{K}; \mathbb{Z})$ を生成していると仮定する。
 (1) の場合, 3.1 から $K \cong \pi_1(M)$, ここで M は 3次元コンパクト有向多様体。 $\text{Ker } \gamma$ に対応した M の被覆 $\tilde{M}$ に対し, $\tilde{K}$ と同型 $H_1(\tilde{K}; \mathbb{Z}) \cong H_1(\tilde{M}; \mathbb{Z})$ がある。 $\dim_{\mathbb{Q}} H_1(\tilde{K}; \mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{Q}} H_1(\tilde{M}; \mathbb{Q}) < +\infty$ より 定理 3.3 が使えて, $H_1(\tilde{K}; \mathbb{Z})$ が自己相反的であることがわかる。
 (2) の場合, G はその 3次元無向多様体の orientation = 重被覆である, 3次元有向多様体

の基本群になる指数2の部分群 G' を必ず持つ。 G' に(1)を適用する。(証明終)

4.3 テスト計画。群 G とその有限生成部分群 K ($K=G$ でもよい)と K の(無限でもよい)群表示 P_K と epimorphism $\gamma: K \rightarrow \langle t \rangle$ が与えられていると仮定する。 $K \cong \mathbb{Z}$ ならば, $\mathbb{Z} = \pi(S^1 \times S^2)$ なのでテストは失敗する。 $K \neq \mathbb{Z}$ と仮定する。そのとき, $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -加群 $H_1(K; \mathbb{Z})$ が Alexander 加群かどうかを群表示 P_K と補題1.1から調べる。例えば, 補題2.3により $H_1(\mathbb{A}; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ ならば $H_1(K; \mathbb{Z})$ は Alexander 加群。Alexander 加群の場合, $H_1(K; \mathbb{Z})$ が自己相反的吗かどうかを調べる。もし自己相反的でないならば, 定理4.2(1)より G はどのような次元有向多様体の基本群にも同型にならない。次に無向の場合のために, $H^1(G; \mathbb{Z}) \neq 0$ で G の指数2のすべての部分群 G_i ($i \in I$) が与えられているとする。($H^1(G; \mathbb{Z}) = 0$ ならば, 定理4.2(2)より G は無向多様体の基本群に同型にならない。) さらに, 各 G_i の有限生成部分群 K_i ($K_i = G_i$ でもよい)と(無限でもよい)群表示 P_{K_i} 及び epimorphism $\gamma_i: K_i \rightarrow \langle t \rangle$ が与えられていると仮定する。もし各 (K_i, γ_i) が非自己相反 Alexander 加群を産出しているならば, 定理

4.2(2) から G は どの 3次元無向多様体の基本群にも同型にならない。この場合、定理 4.2(1) において G は どの 3次元有向多様体の基本群にも同型でない。

例 4.4. 0 でない 整数 l, m と 素数 $p \geq 2$ に対し、群 $G = G(l, m; p) = (a, b \mid a^{-l} b^l a = b^m, b^p = 1)$ が 3次元多様体の基本群 $\iff p \mid 2lm$.

(証明) $p \nmid 2lm$ のとき G は どの 3次元多様体の基本群にも同型でないことを示す。このとき $H^1(G; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ だから、 G は ちょうど 1 つ の 指数 2 の 部分群 G' をもつ。Reidemeister-Schreier の方法から G' は 表示 $(a, b_1, b_2 \mid a^{-l} b_1^l a = b_2^m, b_1^m = b_2^l, b_1^p = b_2^p = 1)$ をもつ。epimorphism $\gamma: G \rightarrow \langle t \rangle$ を $\gamma(a) = t, \gamma(b_1) = \gamma(b_2) = 1$ で定める。補題 1.1 より $H_1(G'; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_p \langle t \rangle / (l^2 - m^2) \cong \mathbb{Z}_p$ ($\mathbb{Z}_p$ -ベクトル空間と見た場合)。これは Alexander 加群で、補題 2.6 より 自己相反的でない。定理 4.2 より G は どの ような 3次元多様体の基本群にも同型にならない。

参考文献

- [1] J. Hempel, 3-Manifolds, Ann. of Math. Studies 86 (1976).
- [2] W. Jaco, Lectures on Three-Manifold Topology, Regional Conference Series in Math. 43 (1980).
- [3] 河内, 3-manifold の fundamental group, 第3回代数セミナー報告, 80-141 (1980).
- [4] 河内, 3次元 3-様体の基本群と Alexander 加群, シンポジウム「無限群の表現とその応用」報告集, 104-117 (1982).
- [5] A. Kawachi, A test for the fundamental group of a 3-manifold, Journal of Pure and Applied Algebra (to appear).
- [6] R.C. Lyndon - P.E. Schupp, Combinatorial Group Theory, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 89, Springer-Verlag, 1977.