

有限鏡映群のある種の分解の構成

東京科学大学

中村 得之

On the construction of certain type of resolutions
of finite reflection groups

Tokushi NAKAMURA

Teikyo University of Science and Technology

Abstract

Let W be a finite reflection group in $O(n, R)$ and let Δ be a simple system associating with W . We assume that Δ has cardinality n . For each positive integer q , we consider the vector space R^q equipped with a lexicographic order. Let $(R^q)_+$ denote the set of all positive vectors of R^q in the prescribed ordering. Then we have a function $\rho : (R^q)_+ \rightarrow Z \cap [0, q]$ which maps λ to $\rho(\lambda)$ being the largest index ρ such that $\lambda_i = 0$ for $0 \leq i \leq \rho$. Let $\hat{\rho} : \Delta \rightarrow Z \cap [0, q]$ be a function. For each $\hat{\rho}$, let $C(\hat{\rho})$ denote the subset of $M_{qn}(R) \cong \bigotimes^n R^q$ defined to be

$$C(\hat{\rho}) = \{ \Lambda \in M_{qn}(R) \mid \forall \alpha \in \Delta \ \wedge \alpha \geq 0, \ \rho(\wedge \alpha) = \hat{\rho}(\alpha) \}.$$

For each integer q , let $\mathcal{C}_q$ be the collection of all sets $wC(\hat{\rho})$ with $w \in W$, $\hat{\rho} : \Delta \rightarrow Z \cap [0, q]$. Then $\mathcal{C}_q$ is shown to form a cell-decomposition of $\bigotimes^n R^q$. For each pair of integers $q < r$, let $r\gamma_q : r\mathcal{C} \rightarrow q\mathcal{C}$ denote the natural projection. For each q , let $\hat{\mathcal{C}}_q$ be the Poincare dual of $\mathcal{C}_q$ in $\bigotimes^n R^q$ and for each pair $q < r$, let $r\hat{\gamma}_q$ be the dual of $r\gamma_q$. Then the direct limit $\varinjlim_q \hat{\mathcal{C}}_q$ of $(\hat{\mathcal{C}}_q, r\hat{\gamma}_q)$ provides us with a free resolution of Z over $Z[W]$ which is the analogue of [3].

0. 有限鏡映群

 R^n に属するベクトル

$$\lambda' = \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}, \quad \mu' = \begin{pmatrix} \mu'_1 \\ \vdots \\ \mu'_n \end{pmatrix}$$

に対し、内積

$$(\lambda', \mu') = {}^t\lambda' \cdot \mu' = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda'_i \mu'_i$$

(定義する.

$$0 \neq \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

が与えられたとき, α に関する R^n の鏡映を

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - 2(({}^t\lambda \cdot \alpha) / ({}^t\alpha \cdot \alpha)) \cdot \alpha$$

(定義する.

W が R^n の鏡映で生成される有限群であるとき, W を R^n の有限鏡映群とよぶ.

W を R^n の有限鏡映群とする. このとき, 次の条件 i), ii) を満たす, R^n に属する 0 と異なる有限個のベクトルの集合 Φ が存在する.

$$0) \quad 0 \neq \beta \in R^n, s_\beta \in W \rightarrow 0 \neq \overset{\exists}{\alpha} \in \Phi, \overset{\exists}{a} \in R \quad \beta = a\alpha$$

$$i) \quad \alpha \in \Phi \rightarrow \Phi \cap R\alpha = \{\alpha, -\alpha\}$$

$$ii) \quad \alpha \in \Phi \rightarrow s_\alpha \Phi = \bar{\Phi}$$

このような Φ を W の1つのルート系とよぶ.

Φ を R^n の有限鏡映群の 1 つのルート系とする。このとき、次の条件 0') i') を満たす Φ の部分集合 Δ が存在する。

0') Δ に属するベクトルは互に線型独立である。

i') すべての $\alpha \in \Phi$ は、 Δ に属するベクトルの同符号の係数をもつ線型結合として表される。

このような Δ を Φ の 1 つの単純ルート系とよぶ。

W を R^n の有限鏡映群、 Φ を W の 1 つのルート系、 Δ を Φ の 1 つの単純ルート系とする。

$\alpha, \beta \in \Delta$ に対し、 $s_\alpha s_\beta \in W$ の位数を $m(\alpha, \beta)$ とおく。

定理 $W \cong F\{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\} / \langle (s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha, \beta)} \mid \alpha, \beta \in \Delta \rangle$

2 $M_{8n}(R) \cong \overset{*}{\times} R^8$ の W -共変な胞体分割

W を R^n の有限鏡映群、 Φ を W の 1 つのルート系とし、 Δ を Φ の 1 つの単純ルート系とする。

ここで Δ は n 個のベクトルからなるものとする。

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \Delta \subset R^n, \quad {}^t\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_n) \in {}^tR^n$$

に対し

$${}^t\lambda' \cdot \alpha = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda'_i \cdot \alpha_i$$

であることに注意する。

$\mathbb{R}^3$ に属する n 個のベクトル λ_i ($1 \leq i \leq n$) を

$$\lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_i^1 \\ \vdots \\ \lambda_i^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

で, $\mathbb{R}^n$ に属する g 個のベクトル ${}^t\lambda'^j$ ($1 \leq j \leq g$) を

$${}^t\lambda'^j = (\lambda_1^j, \dots, \lambda_n^j) \in {}^t\mathbb{R}^n$$

で定め, さらに (g, n) 型行列 Λ を

$$\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} {}^t\lambda'^1 \\ \vdots \\ {}^t\lambda'^g \end{pmatrix} \in M_{gn}(\mathbb{R}) = \prod_{i=1}^g \mathbb{R}^n$$

で定義する. このとき

$$\Lambda \alpha = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \lambda_i = \begin{pmatrix} {}^t\lambda'^1 \alpha \\ \vdots \\ {}^t\lambda'^g \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

となることに注意する.

さらに, $\prod_{i=1}^g \mathbb{R}^3$ と同相な $\mathbb{R}$ 上の線型空間

$$\Delta \times \mathbb{R}^3 = \prod_{\alpha \in \Delta} \alpha \times \mathbb{R}^3$$

を定義する. このとき, 次の補助定理が成り立つ.

補助定理

$$\prod_{\alpha \in \Delta} \{ \alpha \times \Lambda \alpha \mid \Lambda \in M_{gn}(\mathbb{R}) \} = \Delta \times \mathbb{R}^3 \cong M_{gn}(\mathbb{R})$$

証明 $\Delta = \{ \alpha_i \mid 1 \leq i \leq n \}$ とおく. Δ は $\mathbb{R}^n$ の基底を

とするから $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ は可逆行列である.

$$\begin{aligned} \left\{ \prod_{\alpha \in \Delta} \alpha \times \Lambda \alpha \mid \Lambda \in M_{gn}(\mathbb{R}) \right\} &= \left\{ \prod_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \times \Lambda \alpha_i \mid \Lambda \in M_{gn}(\mathbb{R}) \right\} \\ &\cong \{ (\Lambda \alpha_1, \dots, \Lambda \alpha_n) \mid \Lambda \in M_{gn}(\mathbb{R}) \} \end{aligned}$$

$$= \{ \Lambda A \mid \Lambda \in M_{g,n}(\mathbb{R}) \}$$

$$= \{ \Lambda \mid \Lambda \in M_{g,n}(\mathbb{R}) \}$$

$$= M_{g,n}(\mathbb{R})$$

$$\prod_{\alpha \in \Delta} \alpha \times \mathbb{R}^g = \prod_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \times \mathbb{R}^g \cong \prod \mathbb{R}^g \cong M_{g,n}(\mathbb{R}) \quad \square$$

$\mathbb{R}^g$ に属する 2 つのベクトルを

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^g \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} \mu^1 \\ \vdots \\ \mu^g \end{pmatrix}$$

とする。整数 $0 \leq p \leq g-1$ が存在し、すべての整数 $0 \leq j \leq p$ に対し $\lambda^j = \mu^j$ が成り立ち、かつ $\lambda^{p+1} < \mu^{p+1}$ が成り立つとき $\lambda < \mu$ と定義する。

特に、整数 $0 \leq p \leq g-1$ が存在し、すべての整数 $0 \leq j \leq p$ に対し $0 = \lambda^j$ が成り立ち、かつ $0 < \lambda^{p+1}$ が成り立つことが $0 < \lambda$ の定義である。

ここで

$$(\mathbb{R}^g)_+ = \{ \lambda \in \mathbb{R}^g \mid 0 \leq \lambda \}$$

とおく。

任意の $\lambda \in (\mathbb{R}^g)_+$ に対しては、整数 $0 \leq p = p(\lambda) \leq g$ が存在し、任意の整数 $0 \leq j \leq p$ に対し $0 = \lambda^j$ が成り立ち、かつ $0 < \lambda^{p+1}$ が成り立つ。このようにして関数

$$p : (\mathbb{R}^g)_+ \rightarrow \mathbb{Z} \cap [0, g]$$

が定義される。さらに $r = g - p$ とおくことにする。

ここで、 $\mathbb{R}^g$ に属する次の形をしたベクトルを考える。

$$\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} {}^t\lambda^{1'} \\ \vdots \\ {}^t\lambda^{g'} \end{pmatrix} \in M_{gn}(\mathbb{R})$$

$$\Lambda \alpha = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i \lambda_i = \begin{pmatrix} {}^t\lambda^{1'} \cdot \alpha \\ \vdots \\ {}^t\lambda^{g'} \cdot \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^g$$

このとき、 $0 < \Lambda \alpha$ となるためには、整数 $0 \leq p =$

$p(\Lambda \alpha) \leq g-1$ が存在し、任意の整数 $0 \leq j \leq p$ に

対し $0 = {}^t\lambda^{j'} \cdot \alpha$ が成り立ち、かつ $0 < {}^t\lambda^{p+1'} \cdot \alpha$ が成り立つことが必要十分である。

関数

$$\hat{p} : \Delta \rightarrow \mathbb{Z} \cap [0, g]$$

に対し、 $\hat{r} = g - \hat{p}$ とおく。 $\hat{p}$ が与えられたとき、

$$C(\hat{p}) = \{ \Lambda \in M_{gn}(\mathbb{R}) \mid \forall \alpha \in \Delta \quad 0 \leq \Lambda \alpha, \quad p(\Lambda \alpha) = \hat{p}(\alpha) \}$$

$$= \left\{ \Lambda = \begin{pmatrix} {}^t\lambda^{1'} \\ \vdots \\ {}^t\lambda^{g'} \end{pmatrix} \in M_{gn}(\mathbb{R}) \right.$$

$$\left. \mid \forall \alpha \in \Delta \quad 0 \leq j \leq \hat{p}(\alpha), \quad 0 = {}^t\lambda^{j'} \cdot \alpha, \quad 0 < {}^t\lambda^{\hat{p}(\alpha)+1'} \cdot \alpha \right\}$$

$$|\hat{p}| = \sum_{\alpha \in \Delta} \hat{p}(\alpha)$$

とおく。

定理 関数

$$\hat{p} : \Delta \rightarrow \mathbb{Z} \cap [0, g]$$

に対し、次の条件 i), ii) を満たす集合 $C(\hat{p})$ が存在する。

0) $C(\hat{p})$ は $M_{gn}(R)$ の線型閉包体で, $\dim C(\hat{p}) =$

$|\hat{r}| = ng - |\hat{p}|$ とする. ここで $\hat{r} = g - |\hat{p}|$ とする.

i) $M_{gn}(R)$ の仕方の点 M に対し,

$$\hat{p} : \Delta \rightarrow \mathbb{Z} \cap [0, g], \quad w \in W$$

が存在し, $M \in w \cdot C(\hat{p})$ が成り立つ

ii) 写像

$$\hat{p} : \Delta \rightarrow \mathbb{Z} \cap [0, g]$$

が存在し, $\Lambda, M \in \hat{C}(\hat{p})$ が成り立っているとする.

このとき, $w \in W$ が存在し $M = w \Lambda$ となるためには, 次の条件が成り立つことが必要十分である.

1) $\Lambda = M$

2) 自然数 l が存在し, l 個の Δ に属するルート $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ が存在し, $w = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_l}$, $s_{\alpha_i} \Lambda = \Lambda$ ($1 \leq i \leq l$) が成り立つ.

証明

0) ' R ' に属する2つのベクトル ' λ ', ' μ ' に対し, すべての $\alpha \in \Delta$ に対し, 非負の実数 a_α が存在し,

$$' \mu ' = ' \lambda ' + \sum_{\alpha \in \Delta} a_\alpha ' \alpha \quad (0 < \sum_{\alpha \in \Delta} a_\alpha)$$

が成り立つとき, ' λ ' $\leq_\Delta$ ' μ ' と定義する.

$M_{gn}(R)$ に属する2つの (g, n) 型行列

$$\Lambda = \begin{pmatrix} {}^t\lambda'^1 \\ \vdots \\ {}^t\lambda'^g \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} {}^t\mu'^1 \\ \vdots \\ {}^t\mu'^g \end{pmatrix}$$

をとる。整数 $0 \leq p \leq g-1$ が存在し、すべての整数

$0 \leq j \leq p$ に対し ${}^t\lambda'^j = {}^t\mu'^j$ が成り立ち、かつ

${}^t\lambda'^{p+1} < {}^t\mu'^{p+1}$ が成り立つとき、 $\Lambda <_{\Delta} M$ と定義する。

i) $M_{gn}(\mathbb{R})$ に属する行列 Λ が与えられたとする。

このとき、 Λ の W -軌道 $W\Lambda$ に属する元の中、順序

$<_{\Delta}$ に関し極大となるものを M とする。このとき、すべ

ての $\alpha \in \Delta$ に対し $0 \leq M\alpha$ が成り立つ。すなわち、

すべての $\alpha \in \Delta$ に対し、ある整数 $0 \leq p = p(M\alpha) \leq$

g が存在し、すべての整数 $0 \leq j \leq p$ に対し、 $0 =$

${}^t\lambda'^j \cdot \alpha$ が成り立ち、かつ $0 < {}^t\lambda'^{p+1} \cdot \alpha$ が成り立つ。

このことは次のようにして示される。

$$M = \begin{pmatrix} {}^t\mu'^1 \\ \vdots \\ {}^t\mu'^g \end{pmatrix} \in M_{gn}(\mathbb{R})$$

とおき、ある $\alpha \in \Delta$ が存在し、 $M \cdot \alpha < 0$ が成り立つ

ていたとして矛盾を導く。

定義により、この $\alpha \in \Delta$ に対し、整数 $0 \leq p =$

$p(M\alpha) \leq g-1$ が存在し、すべての整数 $0 \leq j \leq p$

に対し、 ${}^t\mu'^j \cdot \alpha = 0$ が成り立ち、かつ ${}^t\mu'^{p+1} \cdot \alpha < 0$ が

成り立つ。

一方, 任意の $\alpha \in \Delta$ に対し

$$\delta_\alpha M = \begin{pmatrix} \delta_\alpha \mu^1 \\ \vdots \\ \delta_\alpha \mu^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^1 - 2((\mu^1, \alpha)/(\alpha, \alpha))\alpha \\ \vdots \\ \mu^p - 2((\mu^p, \alpha)/(\alpha, \alpha))\alpha \end{pmatrix} = M - (2/(\alpha, \alpha)) M \cdot \alpha \cdot \alpha$$

であることに注意する.

条件により, 上の $\alpha \in \Delta$ に対して, 整数 $0 \leq p = p(M\alpha) \leq g-1$ が存在し, すべての整数 $0 \leq j \leq p$ に対し $\delta_\alpha \mu^j = \mu^j - 2((\mu^j, \alpha)/(\alpha, \alpha))\alpha = \mu^j$ が成り立ち, かつ $\delta_\alpha \mu^{p+1} = \mu^{p+1} - 2((\mu^{p+1}, \alpha)/(\alpha, \alpha))\alpha > \mu^{p+1}$ が成り立つ. すなわち, この $\alpha \in \Delta$ に対し $\delta_\alpha M \geq M$ となり, 始めの仮定に矛盾する.

ii) $C(\hat{P})$ に属する2つの行列 Λ, M が得し, かつ $w \in W$ が存在し, $M = w\Lambda$ が成り立っていたとする

$w \in W$ の長さを $l(w)$ で表す.

$w \neq 1$ とするとき, $\beta \in \Delta$ を1つ選び $l(w\beta) < l(w)$ が成り立つようにすることができる.

$w \in W, \beta \in \Delta$ とするとき, $l(w\beta) < l(w)$ が成り立つことは, すべての $\alpha \in \Delta$ に対し非負実数 a_α が存在し $w(\beta) = -\sum a_\alpha \alpha$ ($0 < \sum a_\alpha$) が成り立つことと同値である.

$\Lambda, M \in C(\hat{P})$ であるから, すべての $\alpha \in \Delta$ に対して $0 \leq \Lambda \alpha, 0 \leq M \alpha$ が成り立つ.

したがって, 上の $\beta \in \Delta$ に対し, $C = \Lambda \beta = w^{-1} M \beta$

$= M w(\beta) = - \sum_{\alpha \in \Delta} a_{\alpha} M \alpha \leq 0$, すなわち $\wedge \beta = 0$ が成り立つ. これから $s_{\beta} \wedge = \wedge - 2(1/(\beta \cdot \beta)) \wedge \beta \cdot \beta = \wedge$ が成り立つことがわかる.

ここで, 上の仮定の下に, $M \cdot w \wedge = w s_{\beta}^2 \wedge = w s_{\beta} s_{\beta} \wedge = w s_{\beta} \wedge$ が成り立つことが導かれる.

$l(ws_{\beta}) < l(w)$ であるから, (w) に関する帰納法により $w \wedge = \wedge$ が成り立つことが示される. $\square$

ここで

$${}_g C = \{ w C(\hat{p}) \mid w \in W, \hat{p} : \Delta \rightarrow \mathbb{Z} \cap [0, g] \}$$

とすれば, ${}_g C$ は $M_{gn}(R)$ の線型開胞体による, W -共変な胞体分割を与える. 更に, すべての整数 $ng - g + 1 \leq i \leq ng$ に対し, C の i 次元胞体の集合の上の W の作用は自由である.

自然数 r 対 $g < r$ に対し, $\gamma :$

$${}_g \gamma : {}_r C \rightarrow {}_g C$$

を自然な射影を表すことにする

いま 写像

$$\hat{p} : \Delta \rightarrow \mathbb{Z} \cap [0, g]$$

に対し, $C(\hat{p})$ の $M_{gn}(R)$ での双対胞体を $\hat{C}(\hat{p})$ と書くことにする.

このとき, $\hat{C}(\hat{p})$ は $M_{gn}(R)$ の有界閉多面体であり,

$\dim \hat{C}(\hat{\rho}) = |\hat{\rho}|$ である.

自然数 g に対し

$${}_g\hat{C} = \{w \hat{C}(\hat{\rho}) \mid w \in W, \hat{\rho} : \Delta \rightarrow \mathbb{Z} \cap [0, g]\}$$

とすれば, ${}_g\hat{C}$ は $M_{g,n}(\mathbb{R})$ の W -共変変形レトラクトの有界閉多面体による, W -共変な胞体分割を与える. 更に, すべての整数 $0 \leq i \leq g-1$ に対し, ${}_g\hat{C}$ の i -次元胞体の集合の上の W の作用は自由である.

自然数の対 $g < r$ に対し, ${}_g^r\hat{\gamma}$ は ${}_g^r\gamma$ の双対とする.

このとき, $({}_g\hat{C}, {}_g^r\hat{\gamma})$ の帰納極限 $\varinjlim {}_g\hat{C}$ は, $\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}[W]$ 上の自由分解を定義する ([3] 参照).

文 献

[1] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Ch. 4 ~ 6, Hermann, (1968), Masson, (1981).

[2] J. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge Univ. Press, (1989).

[3] T. Nakamura, *On Cohomology Operations*, Japanese J. of Math. Vol 33 (1963) pp. 93 ~ 145.