

部分因子環の竹崎双対性と quiver の Hilbert 表現の双対性

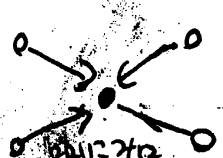
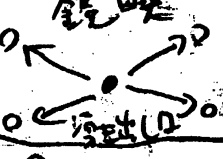
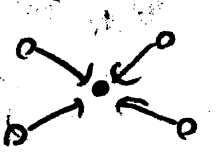
九州大学・大学院数理学研究院 綿谷 安男

Kyushu University

Watatani, Yasuo

①はじめに

作用素環における竹崎双対性はアーベル群のポントラーフィン双対性を越えて因子環の構造定理まで到達した基本的なものである。その部分因子環版を考察すると quiver (有向グラフ) のヒルベルト空間と作用素による表現に表われた双対性と類似がみえて(るというのを示した)。どちらも双対を1回とすることが「向き」を反転することに対応し、2回双対をとると「向き」がもう1回反転して元に戻ったという構造になっている。

	群	von Neumann 環	部分 因子環	quiver (有向グラフ)
元の 対象	局所アーベル群 G	M : von Neumann 環 $\alpha: G \rightarrow \text{Aut } M$ 結合環 $M \rtimes_\alpha G$	M : I-factor N : subfactor $N \subset M$	Γ : quiver (H, f) : curv表現 
双対 対象	$\hat{G}$ $= \{ \chi \chi \mapsto \bar{\chi} \}$ 指標	$\hat{G}$ 上の結合環 $(M \rtimes_\alpha G) \rtimes_{\hat{G}}$	e_n : Jones projection $N \subset (M, e_n)$ basic construction	$\hat{\Gamma}$: $\hat{M}$ 上 の quiver $(\hat{H}, \hat{f})$: $\hat{M}$ 上 の表現の 鏡映 
双対 性	$\hat{\hat{G}} \cong G$	$(M \rtimes_\alpha G) \rtimes_{\hat{G}} \hat{G} \cong M \otimes B(\ell_2 G)$ $\hat{\hat{G}} = \alpha \otimes \text{Ad } \gamma$	$\langle (M, e_n), e_n \rangle \cong M$ 基本同値 定数 e_n $(\hat{e}_n) = \frac{1}{(M, e_n)}$ $i \langle (M, e_n), e_n \rangle$ と M と同型	$(\hat{\hat{\Gamma}})_{\sim} \cong \Gamma$ $(\hat{\hat{H}}, \hat{\hat{f}}) \cong (H, f)$  元の quiver の curv表現 と同型

① 部分因子環の性質対称性

$M: \text{II}_1\text{-factor}$

τ Jones index $[M:N] < \infty$ を仮定

$N \subset M$: subfactor

$E_N: M \rightarrow N$ を条件付期待値

$\eta: M \rightarrow L^2(M, \tau)$ を $\eta(x) = x\tau$

$$(\eta(x)|\eta(y)) = \tau(y^*x)$$

$e_N: L^2(M, \tau) \rightarrow L^2(N, \tau)$ を Jones projection $[J]$

$$e_N(\eta(x)) = \eta(E_N(x))$$

$\langle M, e_N \rangle$: Jones の basic construction, $\tau \upharpoonright N$, $M \supset e_N$

$\tau \upharpoonright N$ は N の von Neumann algebra on $L^2(N, \tau)$

例 $M: \text{II}_1\text{-factor}$

G : 有限群

$\alpha: G \rightarrow \text{Aut } M$ を outer action τ $N = \overline{\sum_{g \in G} M^g}$

このとき $E_N: M \rightarrow N$ は $E_N(m) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \alpha_g(m)$

$\tau = \tau \upharpoonright N$ $u_g \in B(L^2(M, \tau))$ を $u_g \eta(x) = \eta(\alpha_g(x))$ と決める

$$u_g m u_g^* = \alpha_g(m) \quad (m \in M)$$

場合分け $M \rtimes_\alpha G \cong \left\{ \sum_{g \in G} \lambda_g u_g \mid \lambda_g \in M \right\}$

$$\langle M, e_N \rangle \cong M \rtimes_\alpha G$$

$$e_N = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} u_g$$

Jones 指数は

$$[M, e_N : M] = [M \rtimes G : M] = {}^*G$$

特に G が有限 3-バル群とする。

$$\hat{\alpha} : \hat{G} \rightarrow \text{Aut}(M \rtimes G) \text{ is dual action}$$

$$\Rightarrow (M \rtimes G) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G} \cong M \otimes B(\ell^2(G))$$

(Kaspar's duality)

$$\cong M \otimes M_n(\mathbb{C}), \quad n = {}^*G$$

$$\text{---} \hat{\alpha} \quad (M \rtimes G) \rtimes_{\hat{\alpha}} \hat{G} \cong \langle M, e_N \rangle, e_M$$

以上この場合に上の2つを組み合わせると,

$$\langle M, e_N \rangle, e_M \cong M \otimes M_n(\mathbb{C})$$

$$n = {}^*G = [M : N]$$

これから Kaspar's の双対定理になる。

• 一般の sub factor $N \subset M$ の場合は Jones 指数 $[M : N]$ は整数ではないが,

$$\langle M, e_N \rangle, e_M \cong M \otimes M_{[M:N]}(\mathbb{C})$$

と $e_M (\langle M, e_N \rangle, e_M) e_M \cong M$ と解釈して
 ここで e_M は trace の値が $[M:N]^{-1}$ の projection である。

● 因子環の加群理論 (Paragroup について (EKIEM))

$M: \text{II}_1\text{-factor}$

$G: \text{有限群}$

$\alpha: G \rightarrow \text{Aut } M$ は outer action

$N = M^G: \text{不動点環}$

$\Rightarrow \{K \mid N \subset K \subset M \text{ は中間因子環}\} \cong \{H \mid H \subset G \text{ は部分群}\}$

$$K = M^H$$

加群対応

一般の部分因子環の時には

Theorem [W]

$M: \text{II}_1\text{-factor}$

$N \subset M: \text{subfactor}$

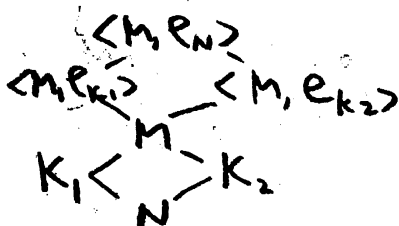
$$[M:N] < \infty$$

$$N' \cap M = \mathbb{C}$$

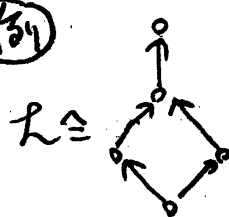
中間因子環全体を

$\Rightarrow$ は有限束になる.

さらに $M \subset \langle M, e_N \rangle$ の中間因子環全体につき有限束 $\hat{L}$ は $N \subset M$ の中間因子環全体につき有限束 L の双対になっている。包含関係 $\subset$ を $\alpha \rightarrow \beta$ とグラフの矢印で表すと



(例)



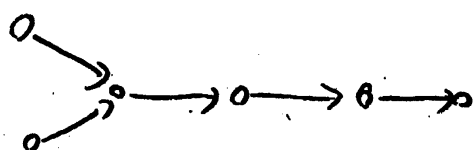
$\Rightarrow \hat{L} \cong$



2 Quiver の Hilbert 表現の双対性

Def 有向グラフ $\Gamma = (V, E, s, r)$ を quiver といふ。つまり

$$\begin{cases} V: \text{頂点全体} \\ E: \text{辺全体} \end{cases} \quad \begin{array}{ccc} & e & \\ \circ & \xrightarrow{\quad} & \circ \\ x & & y \end{array} \quad \text{のとき} \quad \begin{aligned} s(e) &= x: \text{始点} \\ r(e) &= y: \text{終点} \end{aligned}$$



Def (H, f) が quiver Γ の Hilbert 表現

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow_{\text{def}} \quad H &= (H_x)_{x \in V} : \text{Hilbert 空間の族} \\ f &= (f_e)_{e \in E} : \text{bounded operator の族} \end{aligned}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{array}{ccc} \circ & \xrightarrow{e} & \circ \\ x & & y \end{array} \quad \text{に} \quad H_x \xrightarrow{f_e} H_y \quad \text{が対応する。}$$

Def (H, f) と (K, g) を Γ の Hilbert 表現

$\varphi: (H, f) \longrightarrow (K, g)$ を homomorphism (isomorphism) resp.

$$\Leftrightarrow_{\text{def}} \quad \varphi = (\varphi_x)_{x \in V} : H_x \longrightarrow K_x \quad \text{は} \quad \text{bounded operator} \quad \text{resp.} \quad \text{(invertible) の族}$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{s.t.} & & H_x & \xrightarrow{\varphi_x} & K_x \\ & & \downarrow f_e & \searrow & \downarrow g_e \\ e & \text{に} & H_y & \xrightarrow{\varphi_y} & K_y \end{array} \quad \text{は可換図式になる}$$

Def (直和) $(H, f) = (K, g) \oplus (K', g')$ $\begin{matrix} \circ & \xrightarrow{e} & \circ \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathfrak{A} & & \mathfrak{A} \end{matrix}$

$\Leftrightarrow \forall x \in V \quad Hx = Kx \oplus K'x$

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall e \in E \quad fe = ge \oplus g'e : Kx \oplus K'x \rightarrow Kx \oplus K'x$

Def (零対象) $(H, f) = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in V \quad Hx = 0$

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

Def (H, f) は $\mathcal{P}$ の Hilbert 表現

(H, f) は decomposable

$\Leftrightarrow \exists (K, g) \neq 0, \exists (K', g') \neq 0$

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

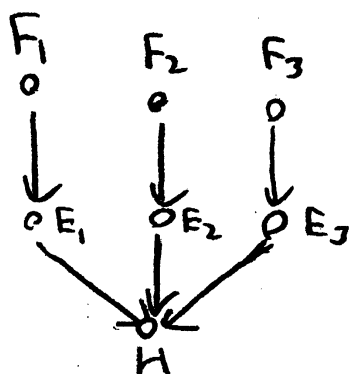
$(H, f) \cong (K, g) \oplus (K', g')$

Def (H, f) は indecomposable (直既約)

$\Leftrightarrow (H, f)$ は decomposable ではない

例 拡大正定エルミート形式 E_6 に次のように向きをつけた
 given $\mathcal{P}$ の Hilbert 表現 を次で定めると直既約になる

$K = \ell^2(\mathbb{N})$ 上の unilateral shift を S とする



$H = K \oplus K \oplus K$

$E_1 = K \oplus K \oplus 0 \supset F_1 = \{(x, x, 0) \in H \mid x \in K\}$

$E_2 = 0 \oplus K \oplus K \supset F_2 = \{(0, x, Sx) \in H \mid x \in K\}$

$E_3 = K \oplus 0 \oplus K \supset F_3 = \{(x, 0, x) \mid x \in K\}$

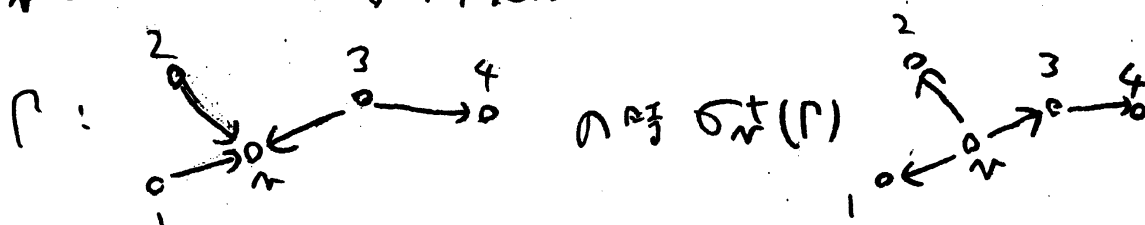
Theorem [EW2]

連結な有限無向グラフ G で、どんな向き Γ を入れたとしても Γ にも無限次元直交分解 Hilbert 表現が存在しない。

$\Rightarrow G$ は $n \geq 1$ の A_n か $n \geq 4$ の D_n か E_6, E_7, E_8

Def 鏡映関手

Γ を Γ に対して $\sigma_\Gamma(\Gamma)$ があつたとせよ。
この時 Γ から出てゆく辺の向きを反転したものを $\sigma_\Gamma(\Gamma)$ とかく。例は



Γ の Hilbert 表現 (H, f) が与えられた時、

$\sigma_\Gamma(\Gamma)$ の Hilbert 表現 (H^+, f^+) を以下で定義す。

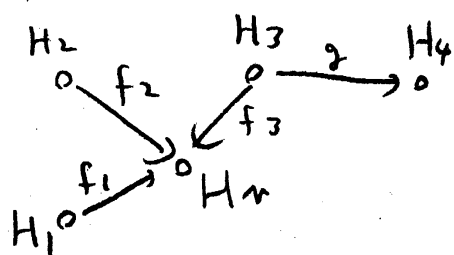
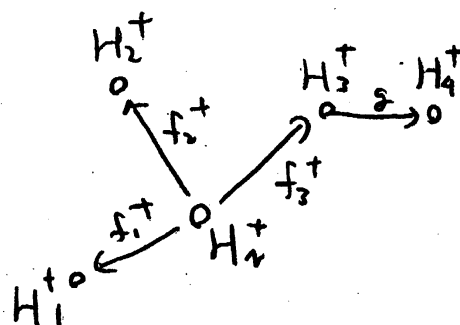
$$\lambda \neq n \Rightarrow H_\lambda^+ = H_\lambda$$

$$\lambda = n \Rightarrow H_n^+ = \left\{ (\chi_u)_u \in \bigoplus_{(u,v) \in E} H_u \mid \sum_{\substack{u \\ e: u \rightarrow n}} f_e(\chi_u) = 0 \right\}$$

$$f_e^+ : H_n^+ \longrightarrow H_u$$

$$(\chi_u)_u \longmapsto H_u$$

例2.2.

 t_2 

$$\begin{cases} H_v^+ = \{ (x_1, x_2, x_3) \in H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \mid \sum_{i=1}^3 f_i(x_i) = 0 \} \\ f_i : H_v^+ \rightarrow H_i \text{ は } f_i(x_1, x_2, x_3) = x_i \end{cases}$$

この時

$$\Phi_v^+(H, f) = (H^+, f^+) \text{ において } (H, f) \text{ に } \Phi_v^+(H, f)$$

を対応させるのを鏡映関手 Φ_v^+ という。

同様に given Γ に 湧き出 (口 $v \in V$ があつたとせ、この時 v に入ってくる辺の向きを反転したものを $\sigma_v^-(\Gamma)$ とかく。 Γ の Hilbert 表現 (H, f) が与えられた時、 $\sigma_v^-(\Gamma)$ の Hilbert 表現 (H^-, f^-) を次で定義す:

$$x \neq v \Rightarrow H_x^- = H_x$$

$$\begin{aligned} x = v \Rightarrow H_v^- &= \{ f_{(u,v)}(y) \in \bigoplus_{(u,v) \in \Gamma} H_u \mid x \in H_v \} \cap \bigoplus_{(v,w) \in \Gamma} H_w \\ f_e^- : H_u &\longrightarrow H_v^- \\ \downarrow &\quad \downarrow \\ x_u &\longmapsto \text{Proj}_{H_v^-} (0, \dots, 0x_u, 0, \dots) \end{aligned}$$

この時

$$\Phi_v^-(H, f) = (H^-, f^-) \text{ において } (H, f) \text{ に } \Phi_v^-(H, f)$$

を対応させるのを鏡映関手 Φ_v^- という

Theorem (Hilbert表現の双対性 I) [EW2]

quiver Γ の Hilbert 表現 (H, f) を考える。
 $v \in V$ は吸い込み口とし, (H, f) が v で full と
 仮定する。つまり $\left\{ \sum_u f_{(u,v)}(x_u) \mid x_u \in H_u \right\} = H_v$
 $(u,v) \in E$

$$\Rightarrow \pi_v^+ \pi_v^-(H, f) \cong (H, f)$$

Theorem (Hilbert表現の双対性 II) [EW2]

quiver Γ の Hilbert 表現 (H, f) を考える。
 $v \in V$ は湧き出し口とし, (H, f) が v で co-full
 と仮定する。つまり $\left\{ \sum_u f_{(u,v)}^*(x_u) \mid x_u \in H_u \right\} = H_v$
 $(u,v) \in E$

$$\Rightarrow (H, f) \cong \pi_v^+ \pi_v^-(H, f)$$

⑤ ヒルベルト空間の部分空間の配置については
 [EW1] で研究を開始した。Quiver の Hilbert 表現
 はちょうどそれを quiver (有向グラフ) に沿って部分空間
 を配置することに当たると考えた。Jones の部分因子環の
 理論とこの quiver の Hilbert 表現の直接の関係
 は正しいが, どうしてもある種の双対性が成立する。
 この類似の底に流れているものも考えるのが課題
 である。

<<References>>

[EK] D. Evans and Y. Kawahigashi, Quantum Symmetries on Operator Algebras, Oxford Univ. Press, 1998

[EW1] M. Eomoto and Y. Watatani, Relative Position of four subspaces in a Hilbert space, to appear in Advances Math.

[EW2] M. Eomoto and Y. Watatani, Hilbert representations of quivers, (待発表)

[J]. V. Jones, Index for subfactors, Invent. Math. 72 (1983), 1-15.

[W] Y. Watatani, Lattices of intermediate subfactors, J. Funct. Anal. 140 (1996), 312-334.