

ブラウレ運動と Dirichlet 空間 (I)

阪大 理 池田信行
岡部靖憲

§1. 序

空間 D を $\mathbb{R}^n$ の有界領域とする. 境界の滑らかさは一切仮定しない.

よく知られているように、任意の $\alpha > 0$ と $f \in L^2(D)$ に対して、

$$(1.1) \quad \begin{cases} (\alpha - \frac{1}{2}\Delta)u = f \\ u \in \mathcal{D}_{L^2}^{\frac{1}{2}}(D) \end{cases}$$

は一意的に解けるので、その解を $u \equiv G_\alpha^\circ f$ とおくと、
 $\{G_\alpha^\circ; \alpha > 0\}$ は L^2 -resolvent となっている、即ち、

$$(1.2) \quad \begin{cases} G_\alpha^\circ \text{ は 有界対称作用素 } (L^2(D) \text{ 上}) \\ G_\alpha^\circ - G_\beta^\circ + (\alpha - \beta) G_\alpha^\circ G_\beta^\circ = 0 \end{cases}$$

確率論の側面からみると、 G_α° は、吸収壁ブラウレ運動の α 次の Green 作用素と一致している。

そこで、境界があったときに考えられる Dynkin の公式を想定して、次の問題を考えよう。

問題

L^2 -resolvent $\{G_\alpha; \alpha > 0\}$ で、

$$(1.3) \left\{ \begin{array}{ll} (i) & \alpha G_\alpha 1 = 1 \\ (ii) & R_\alpha \bar{=} G_\alpha - G_\alpha^0 \quad \text{とおくとき、} \\ & L^2(D) \ni f \geq 0 \Rightarrow R_\alpha f \geq 0 \\ (iii) & (\alpha - \frac{1}{2}\Delta) R_\alpha f = 0 \end{array} \right.$$

を満たすものをすべて求めよ。

この問題を完全に解いたのは、福島正俊氏であり、彼は、 L^2 -resolvent $\{G_\alpha; \alpha > 0\}$ と 1:1 に対応する L^2 -Dirichlet space $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ を解析するために、 D の Martin 境界 M 上の L^2 -Dirichlet space $(\mathcal{F}_M, \mathcal{E}_M)$ を導入して、次の条件を満たすものをすべて求めることであると主張した。

問題 $(\mathcal{F}_M, \mathcal{E}_M)$ は L^2 -Dirichlet space で

$$(1.4) \left\{ \begin{array}{ll} (i) & 1 \in \mathcal{F}_M \subset H_M \\ (ii) & \mathcal{E}_M = \mathbb{D} + N, \quad N \text{ は non-negative} \\ & \text{symmetric bilinear form で, } N(1, 1) = 0 \\ (iii) & \varphi \in \mathcal{F}_M \Rightarrow N((\varphi^+)_M, (\varphi^+)_M) \leq N(\varphi, \varphi) \end{array} \right.$$

を満たすものをすべて求めよ。

そこで、 (H_M, D) は 次 に 定 義 さ れ る L^2 - Dirichlet space である； μ を M 上 の 調 和 測 度 と し、 $U_\alpha(\xi, \eta)$ を Feller 核 と す る と き、

$$(1.5) \quad \begin{cases} \mu' = U_1 I \cdot \mu \\ D(\varphi, \varphi) = \frac{1}{2} \int_M \int_M (\varphi(\xi) - \varphi(\eta))^2 U(\xi, \eta) d\mu d\mu \\ H_M = \{ \varphi \in L^2(M; d\mu') ; D(\varphi, \varphi) < \infty \} \end{cases}$$

福島氏の主要な部分は、(1.4)の(iii)、即ち、

“bilinear form N は normal contraction が作用する”ことの部分であり、このことの証明のために、 $\widehat{BLD}$ -harmonic function に関する詳しい結果 (Doob の定理) を full に用いた。

そこで、我々は考えた。初めから、境界の滑らかさを仮定しないのであるから、Martin 境界も必要ないのではないだろうか？ そのことは、福島氏の論文にある定理 5.1 にある考えを、始めに注意することにより、ある段階までは、境界のことを使うことなく、実際 示される。この報告では、上述のことを実行し、その系として、福島氏の N の性質 (1.4)(iii) が成りくることを話したいと思う。

§2. 双一次形式 N

吸収壁ブラウレ運動の resolvent $\{G_\alpha^0; \alpha > 0\}$ に対応する L^2 -Dirichlet space を $(\mathcal{F}^{(0)}, \mathcal{E}^{(0)})$ としよう.

(1.1) より、

$$(2.1) \quad \begin{cases} \mathcal{F}^{(0)} = \mathcal{D}_{L^2}^1(D) \\ \mathcal{E}^{(0)}(u, u) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 dx \end{cases}$$

が成り立つことがわかる.

(1.3) を満たすものとして、福島氏が構成した反射壁ブラウレ運動の resolvent $\{G_\alpha^\infty; \alpha > 0\}$ があり、それに対応する L^2 -Dirichlet space を $(\mathcal{F}^{(\infty)}, \mathcal{E}^{(\infty)})$ とするとき、

$$(2.2) \quad \begin{cases} \mathcal{F}^{(\infty)} = \mathcal{E}_{L^2}^1(D) \\ \mathcal{E}^{(\infty)}(u, u) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 dx \end{cases}$$

が成り立つ。実は、この (2.2) を通して、反射壁ブラウレ運動が構成されたのであった。

従って、(2.1) と (2.2) より、

$$(2.3) \quad \begin{cases} (\mathcal{F}^{(0)}, \mathcal{E}^{(0)}) \subset (\mathcal{F}^{(\infty)}, \mathcal{E}^{(\infty)}) \\ \mathcal{E}^{(\infty)}|_{\mathcal{F}^{(0)} \times \mathcal{F}^{(0)}} = \mathcal{E}^{(0)} \end{cases}$$

が成り立つ。

次に、(2.3) なる関係が (1.3) を満たす L^2 -resolvent $\{G_\alpha; \alpha > 0\}$ に対応する L^2 -Dirichlet space $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ に対しても成り立つことを示す。

定理 2.1 $\mathcal{F}^{(0)} \subset \mathcal{F}$
 $\mathcal{E}|_{\mathcal{F}^{(0)} \times \mathcal{F}^{(0)}} = \mathcal{E}^{(0)}$

証明 (第一段) $\forall u \in C_0^\infty(D)$ に対して、(1.3) より

$$(2.4) \quad \alpha(u - \alpha G_\alpha u) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \Delta u \quad \text{in } \mathcal{Q}(D)'$$

が成り立つことに注意すると、(2.1) より、

$$\begin{aligned} & \exists \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha(u - \alpha G_\alpha u, u)_D = \\ & = -\frac{1}{2} (\Delta u, u)_D = \\ & = \mathcal{E}^{(0)}(u, u) \end{aligned}$$

従って、 $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ の定義より、 $u \in \mathcal{F}$ かつ

$$\mathcal{E}(u, u) = \mathcal{E}^{(0)}(u, u) \quad \text{が成り立つ。}$$

(第二段) (2.1) より、 $C_0^\infty(D)$ は $\mathcal{F}^{(0)}$ の中で dense である。 $\forall u \in \mathcal{F}^{(0)}$ に対して、 $\exists (u_n)_{n=1}^\infty \subset C_0^\infty(D) \rightarrow$

$\mathcal{E}^{(0)}(u_n - u, u_n - u) \rightarrow 0$ 。 従って特に、 $\mathcal{E}^{(0)}(u_n - u_m, u_n - u_m) \rightarrow 0$ が成り立つから、(第一段) より、 $(u_n)_{n=1}^\infty$ は $\mathcal{F}$ かつ

$$\mathcal{E}(u_n - u_m, u_n - u_m) \rightarrow 0. \quad \text{一方、Poincaré の不等式より、}$$

$u_n \rightarrow u$ in $L^2(D)$ が成り立つことに注意すると、 $(u_n)_{n=1}^\infty$ は $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ の基本列に存在するので、 L^2 -Dirichlet space の性質より、 $(u_n)_{n=1}^\infty$ は $\mathcal{F}$ の中で $\mathcal{E}$ の norm で

収束するか、その極限が u であることは明らかであるので、

$$u \in \mathcal{F} \text{ が成り立つ. } \begin{aligned} \mathcal{E}(u, u) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}(u_n, u_n) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}^{(0)}(u_n, u_n) = \mathcal{E}^{(0)}(u, u). \quad (\text{Q.E.D.}) \end{aligned}$$

次に、 $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ と $(\mathcal{F}^{(0)}, \mathcal{E}^{(0)})$ との関係を探るために、次の直和分解を考えよう。

$$(2.5) \quad \begin{cases} \mathcal{F} = \mathcal{F}^{(0)} + \mathcal{H}_\alpha & (\mathcal{E}_\alpha \equiv \mathcal{E} + \alpha(\cdot)_0 = 0) \\ \mathcal{F}^{(0)} = \mathcal{F}^{(0)} + \mathcal{H}_\alpha^{(0)} & (\mathcal{E}_\alpha^{(0)} \equiv \mathcal{E}^{(0)} + \alpha(\cdot)_0 = 0) \end{cases}$$

これは、(2.3) と定理 2.1 より可能で、(1.3) より、

$$(2.6) \quad \begin{cases} \mathcal{H}_\alpha = \{u \in \mathcal{F}; (\alpha - \frac{1}{2}\Delta)u = 0\} \\ \mathcal{H}_\alpha^{(0)} = \{u \in \mathcal{F}^{(0)}; (\alpha - \frac{1}{2}\Delta)u = 0\} \end{cases}$$

が成り立つ。従って、

$$(2.7) \quad \mathcal{H}_\alpha \cup \mathcal{H}_\alpha^{(0)} \subset C^\infty(D)$$

が成り立つことに注意しておく。

補題 2.1. $\mathcal{F} \cap C^\infty(D) \cap B(D) \ni u$ に対して、

$$(2.8) \quad \mathcal{E}(u, u) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 dx + \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha (1 - \varphi_m, f_\alpha)_0,$$

ここで、

$$0 \leq \varphi_m \uparrow 1 \quad \left(\bigcap_{m=1}^\infty C_0^\infty(D) \right) \text{ (各点収束).}$$

$$f_\alpha = 2\alpha u(u - \alpha G_\alpha u) - \alpha(u^2 - \alpha G_\alpha u^2)$$

証明. (f, ε) の定義より、

$$(2.9) \quad \varepsilon(u, u) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha(u - \alpha G_\alpha u, u)_D.$$

一、各 $\alpha > 0$ に対し、

$$(2.10) \quad \alpha(u - \alpha G_\alpha u, u)_D = \frac{1}{2} \int_D f_\alpha(x) dx$$

に注意すると、各 m に対し、

$$(2.11) \quad \alpha(u - \alpha G_\alpha u, u)_D = \frac{1}{2} (f_\alpha, \varphi_m)_D + \frac{1}{2} (f_\alpha, 1 - \varphi_m)_D.$$

第一項は φ_m を考え、(1.3)より、

$u, u^2 \in L^1(D)$ に注意し、

$$\alpha(u - \alpha G_\alpha u) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \Delta u \quad \text{in } Q(D)'$$

$$\alpha(u^2 - \alpha G_\alpha u^2) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \Delta u^2 \quad \text{in } Q(D)'$$

が成り立つので、 $u \cdot \varphi_m \in C_0^\infty(D)$ より、

$$\begin{aligned} & \exists \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (f_\alpha, \varphi_m)_D = \\ & = -\frac{1}{2} (\varphi_m u, \Delta u)_D + \frac{1}{4} (\varphi_m, \Delta u^2)_D = \\ & = \frac{1}{2} \int_D \varphi_m(x) \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 \right) dx \end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned} (2.12) \quad & \exists \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (f_\alpha, \varphi_m)_D = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 dx \end{aligned}$$

故に、(2.9), (2.10), (2.11), (2.12) より (2.8) が成り立つ。Q.E.D.

定理 2.2. $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^{(\infty)}$

$$E(u, u) \geq E^{(\infty)}(u, u) \quad (u \in \mathcal{F})$$

証明 (第1段) $\forall f \in B(D)$ (bdd. m'ble) に對して、
 $u \equiv R_\alpha f (\alpha > 0)$ を考えよ。 (1.3), (2.7) より、 $u \in C^\infty(D) \cap B(D)$
 が成り立つので、定理 2.1 と (2.5) より、 $u \in \mathcal{F}$ 従って
 (2.2), (2.8) より、 $u \in \mathcal{F}^{(\infty)}$ が従い、 $E(u, u) \geq E^{(\infty)}(u, u)$
 が成り立つ。 何故ぞ、 (1.3) より、

$$f_\alpha(x) = \alpha G_\alpha((u - u(x))^2) \geq 0$$

が成り立つからである。

(第2段) (1.3) より $R_\alpha(C_0^\infty(D))$ dense in $(\mathcal{H}_\alpha, E_\alpha)$

(*) $\mathcal{H}_\alpha \ni u, 0 = E^\alpha(u, R_\alpha \varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(D)$ とすると、

$$0 = E^\alpha(u, G_\alpha \varphi) = (u, \varphi) \quad \therefore u = 0$$

であるから、定理 2.1, (2.5) に注意するごとくによ
 って、定理 2.2 が得られる。 (Q.E.D.)

次に、定理 2.2 より、

$$(2.13) \quad N(u, v) \equiv E(u, v) - E^{(\infty)}(u, v) \quad (u, v \in \mathcal{F})$$

が定義可能であるが、定理 2.1, 2.2 より 次の
 ことが成り立つことは明らかである。

定理 2.3. (1) N は non-negative symmetric
 bilinear form である。

$$(2) \quad N(u, u) = 0 \quad (\forall u \in \mathcal{F}^{(0)}).$$

最後に、我々の目的であった次のことを示す。

定理 2.4. $u \in \mathcal{F}$

$$\Rightarrow N((u^v)_n, (u^v)_n) \leq N(u, u)$$

証明 $v \in (u^v)_n$ とおく。

$$u_n \in (u^v(-n))_n, \quad v_n \in (v^v(-n))_n \quad \text{とおく。}$$

L^2 -Dirichlet space の一般論より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(u_n, u_n) = E(u, u), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E(v_n, v_n) = E(v, v),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E^{(0)}(u_n, u_n) = E^{(0)}(u, u), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E^{(0)}(v_n, v_n) = E^{(0)}(v, v)$$

が成り立つので、各 n に對して、

$$(2.14) \quad N(v_n, v_n) \leq N(u_n, u_n)$$

が示される。 (2.13) より $N(v, v) \leq N(u, u)$

が成り立つ。 従って、始めから、 u は bald としよ。

さらに、定理 2.3 (2) より、 $N(u, u), N(v, v)$ は

u, v の α -harmonic part によらずに、 u, v の α -harmonic part を u_α, v_α とすると、 $|v(x) - v(y)| \leq |u(x) - u(y)|$ より $|v_\alpha(x) - v_\alpha(y)| \leq |u_\alpha(x) - u_\alpha(y)|$

が成り立つことに注意すると共に、(2.7) より

$u_\alpha, v_\alpha \in \mathcal{F} \cap C^\infty(D) \cap B(D)$ であるから、補題 2.1 が適用でき、(2.14) は、(2.2), (2.8), (2.13)

より従う。

(Q.E.D.)

参考文献

Masatoshi Fukushima : On boundary conditions for multi-dimensional Brownian motions with symmetric resolvent densities,

J. Math. Soc. Japan **21**(1969), 58 - 93.