

散逸場における非線形波動の異常拡散現象

筑波大学システム情報系

内山 祐介, 金野 秀敏

筑波大学大学院システム情報工学研究科

角屋 貴則

Yusuke Uchiyama and Hidetoshi Konno

Faculty of Engineering, Information and Systems, University of Tsukuba

Takanori Kadoya

Graduate School of Systems and Information Engineering, University of Tsukuba

Abstract

空間 1 次元系の散逸場の時空間発展を記述する複素 Ginzburg-Landau 方程式に現れる時空間パターンである欠陥乱流状態において、局在波の一種であるホールの速度ゆらぎの統計的性質を調べた。ホールの速度ゆらぎの時系列は間欠性を示し、それに対応して確率密度関数は厚い裾で特徴づけられることがわかった。一方、自己相関係数はべき乗の減衰特性を示した。これはホールの速度ゆらぎが長期記憶性を有することを示唆している。ホールの拡散挙動を特徴づける平均二乗変位に注目すると時間スケールごとに異なる指数を持つ超拡散で特徴づけられることがわかった。これらの統計的性質を再現する確率モデルとして非定常一般化コーシー過程を提案した。この確率過程のサンプルパス、定常確率分布および自己相関関数を解析的に求め、併せて数値的に求めた平均二乗変位と比較することで提案したモデルの妥当性を確認した。

1 はじめに

複素 Ginzburg-Landau 方程式 (CGLE) は非平衡・開放系のホップ分岐点回りにおける散逸場の時空間パターン形成を記述する数理モデルの標準形である [1]。この数理モデルに関連した様々な時空間パターンが実験および数値計算によって確認されている [2]。非平衡・開放系を理解するうえで位相欠陥は一つの重要な指標となる。位相欠陥が観測されている物理系として、CO の酸化・還元反応時の触媒表面におけるパターン形成 [3]、熱流体中の対流現象 [4]、量子乱流中におけるエネルギーカスケード [5] 等が挙げられる。位相欠陥に関する最近の話題として、健康なヒトの心臓の超音波画像中に空間 1 次元系の CGLE の解として知られているホール解が発見されたことが報告されている [6]。ホール解は位相欠陥の一種であることから、心臓のダイナミクスを理解するうえでも位相欠陥は重要な役割を演じ得るといえる。

空間 1 次元系の CGLE はホール解と関連づけられる様々な時空間パターンを示すことが知られている。それらの時空間パターンの出現は CGLE のパラメータと系の大きさに依存している。凍結状態はホールとショックが空間中に交互に静止して配位した状態であり、過渡状態から十分時間が経過した後観測される [7]。これとは別に、時空間的に間欠的なダイナミクスも観測されており、これは戸次-野崎 (BN) ホールとホモクリニックホールの異なる二種類のホールの結合写像でモデル化可能である [8]。欠陥乱流または時空カオスと呼ばれる状態では振幅と位相がともに不規則な振舞いを見せる。この状態においては局所的な振幅は 0 に到達する結果、位相の特異性、すなわち位相欠陥が生成される [9]。

このように、ホールに関連した時空間パターンの例が報告されているにも関わらず、それらの統計的性質については十分に調べられていない。これは、非平衡・開放系においてホールを同定することが困難であることに起因する。実際、不適切な方法に基づいてホールを同定すると誤った統計則を導き出すこともある [10]。にもかかわらず、先行研究の多くではこのような不適切な方法でホールの同定が行われている [9]。

欠陥乱流中において BN ホールとホモクリニックホールの二種類のホールが識別される [11]。BN ホールはその不安定性ゆえに寿命がきわめて短い一方で、ホモクリニックホールの中には長寿命のものも存在する。個々のホモクリニックホールの軌道を追跡した結果、その速度は決定論的な法則に従っていることが判明した。一方、個々のホモクリニックホールを識別しない場合の速度の確率密度関数は一般化コーシー分布に従い [12]、自己相関関数はべき乗の減衰特性を示すことが判明した。得られた自己相関関数をもとにホールの平均二乗変位を求めた結果、拡散挙動は超拡散を示すことが判明した。これらの統計則を再現する確率モデルとして非定常一般化コーシー過程を提案する。

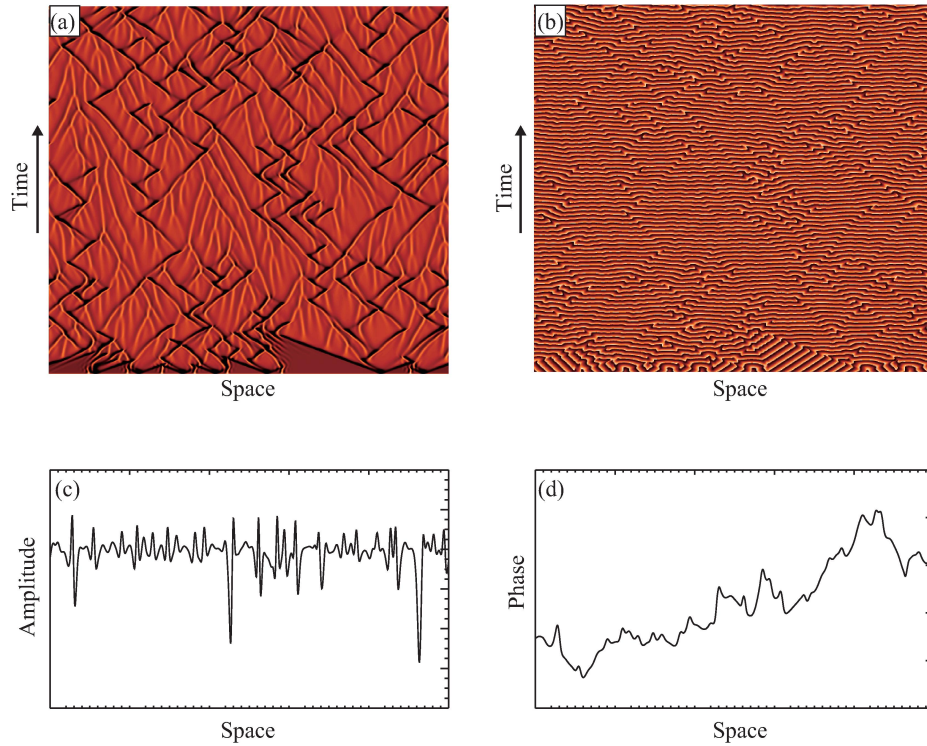


Fig. 1: (a) 振幅 $|A|$ の時空間パターン, (b) 位相 $\arg(A)$ の時空間パターン, (c) 振幅のスナップショット, (d) 位相のスナップショット. (a) 中の黒い線および白い線はそれぞれ (c) 中の振幅の極小値および極大値に対応している. (b) 中の色変化の不連続性は (d) 中の位相のジャンプに対応している.

2 複素 Ginzburg-Landau 方程式の時空間ダイナミクス

CGLE は空間的な広がりを持つ散逸系に減速摂動法を適用することにより導出される. この方程式は振幅と位相のゆっくりとした時空間変化を記述する [13]. スケーリングされた CGLE は複素数の秩序変数 $A(\vec{x}, t)$ に関して以下のように表される.

$$\partial_t A = A + (1 + ic_1)\nabla^2 A - (1 + ic_2)|A|^2 A \quad (1)$$

ここで, 実パラメータ (c_1, c_2) は元のシステム固有のパラメータにより決定される.

空間 1 次元系の CGLE に対してスペクトル法の一つであるスプリットステップ法を用いて数値計算を行った. システムサイズを $L = 80\pi$, パラメータを $(c_1, c_2) = (1.5, -1.2)$ とした. 初期条件には平面波と正規乱数とを重ね合わせたランダム波を与え, 周期境界条件を採用した. 時間と空間の分解能はそれぞれ $\Delta t = 0.001$, $\Delta x = 0.061$ で与えた.

図 1 に振幅と位相の時空間発展とある時刻におけるスナップショットを示す. この図に見られるような振幅と位相の大きく乱れたダイナミクスは欠陥乱流または時空カオスと呼ばれている [7]. (a) は振幅 $|A|$ の, (b) は位相 $\arg(A)$ の時空間発展を, (c) は振幅の, (d) は位相のある時刻におけるスナップショットを示している. 図 1(a) 中の黒い線と白い線はそれぞれ図 1(c) 中の振幅の極小値と極大値に対応している. 特に黒い線と図 1(b) 中の位相のジャンプは出現位置が同じである. 図 1(d) 中の位相の値域は, 位相勾配を計算するために実数全体に拡張してある. これらの情報を基に, 欠陥乱流の各時刻において BN ホールとホモクリニックホールを同定した.

図 2 に (a)BN ホールと (b)ホモクリニックホールを示す. BN ホールは時空間的に局在化するホールであり $x-t$ 平面上の局所的に振幅が落ち込む各点で, 位相場における周回積分を行った際に位相特異点として検出される. そのため BN ホールは有限の寿命を持たず, 生成後はただちに消滅する. 一方, ホモクリニックホールは $x-t$ 平面上での位相特異点ではないため有限の寿命を持ち得る. これら異なる二つのホールは MAW と呼ばれるもう一種類の非線形局在波とともに欠陥乱流中で生成と死滅を繰り返す. これらの生成・死滅過程は長期記憶性を有するため, 個数や待ち時間の確率分布は非定常マスター方程式をによって

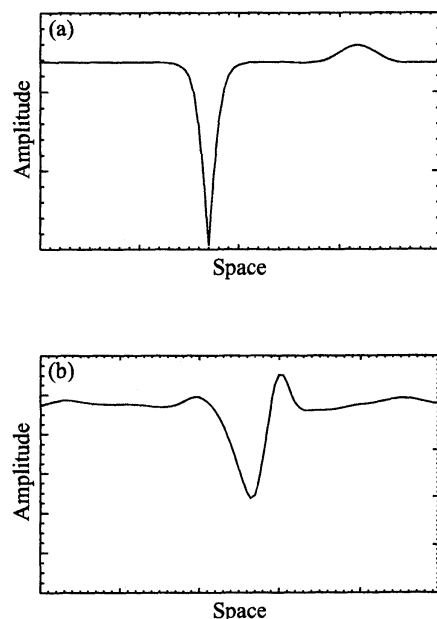


Fig. 2: (a) は BN ホールの振幅を, (b) はホモクリニックホールの振幅を表している. 両者ともに局所的な振幅の落ち込みを有しているため, 振幅の形状のみからでは判別は事実上不可能である.

導かれる [11].

3 ホール速度ゆらぎの統計解析

BN ホールとホモクリニックホールの性質から, ホモクリニックホールのみ速度を持ち得る. 従って, 以降の速度ゆらぎの解析においてはホモクリニックホールのことをホールと呼ぶ. 各時刻における空間全体のホールの速度を一つづきの時系列として見立てたものを図3に示す. 図よりホールの速度ゆらぎは間欠性によって特徴づけられることがわかる. この時系列から求められる確率密度関数と自己相関係数をそれぞれ図4と図5に黒点で示す. 図4中に黒点で示される確率密度と, 点線で示されるホールの速度ゆらぎの時系列から求められる平均・分散に対応する正規分布とを比較すると, ホールの速度ゆらぎの確率密度は正規分布に比べて裾の厚い分布であることがわかる. これは図3に示されるホールの速度ゆらぎが間欠性を示すことに由来している. また, 図5に示される自己相関係数を見るとべき乗の減衰特性を示すことが確認できる. このことからホールの速度ゆらぎには, ある時刻における速度の値が十分離れた過去からの影響も受けるという長期記憶性が内在することが示唆される. 一方, 図6に示されるように, 平均二乗変位は異なる時間領

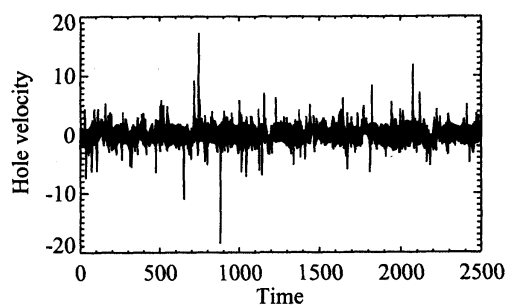


Fig. 3: ホールの速度ゆらぎの時系列は間欠性によって特徴づけられることがわかる.

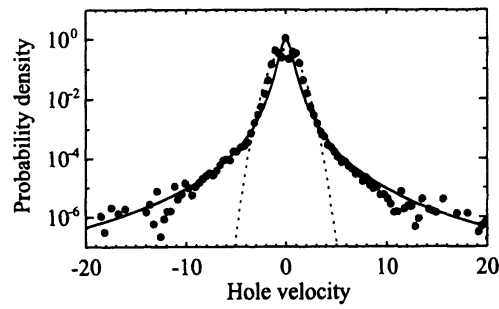


Fig. 4: ホール速度の確率密度は裾の厚い分布で特徴づけられる。これはホールの速度ゆらぎの時系列に見られる間欠性に対応するものである。

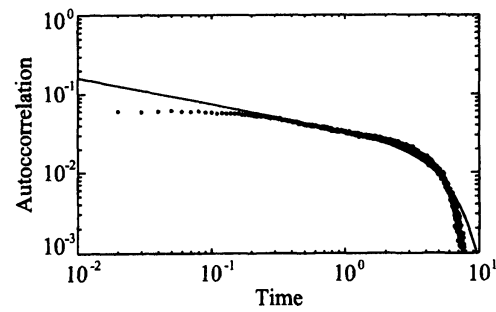


Fig. 5: ホールの速度ゆらぎの自己相関係数はべき乗の減衰特性を示すことが確認できる。これはある時刻におけるホールの速度が十分時間が経過した後のホールの速度とも相関を持つことを表している。すなわち、ホールの速度ゆらぎにはある種の長期記憶性が存在することを示唆している。

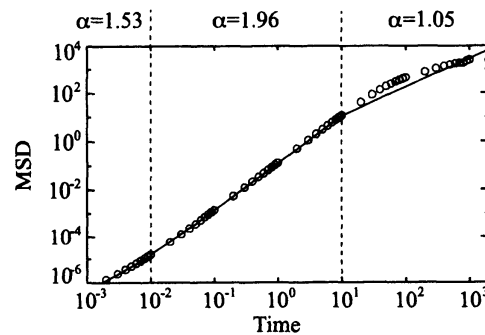


Fig. 6: 平均二乗変位は時間スケールごとに異なる挙動を示す。 10^{-2} よりも小さい時間領域では指数 $\alpha = 1.53$ の超拡散、 10^{-2} と 10^1 の間の時間領域では指数 $\alpha = 1.96$ の決定論的挙動に非常に近い超拡散、そして 10^1 よりも大きい時間領域では指数 $\alpha = 1.05$ のブラウン運動に非常に近い超拡散を示す。

域ごとに異なる指数の超拡散で特徴づけられることがわかる。

以上の結果から、ホール速度ゆらぎの確率モデルは間欠性、長期記憶性と異常拡散を再現することが要求される。間欠性を表す最も単純な確率微分方程式として一般化コーシー過程が知られている [12]。この確率微分方程式に対応する確率密度関数の時間発展を記述する Fokker-Planck 方程式は一般化コーシー分布を定常解として持つことが知られている。一方で、自己相関関数は指数関数として求められることから長期記憶性を表現するには不十分なモデルである。また拡散挙動もホール速度ゆらぎに対して得られたものとは異なる。

自己相関関数が指数減衰を示すマルコフ過程の確率微分方程式を長期記憶過程に拡張する方法はいくつか提案されているが、主なものとしては Fokker-Planck 方程式に非整数階時間微分を導入したモデルと [14]、確率微分方程式そのものに非整数階時間微分を導入したモデルが知られている [15]。前者は対応するマルコフ過程のサンプルパスにおける時間発展をベキ乗の待ち時間分布で与えるモデルであり、状態が変化しない長い停止時間が観測されることが特徴である。後者は非整数階微分中にあらわれるベキ関数が記憶関数としての役割を果たしており、Fokker-Planck 方程式中に現れる記憶関数の表式を利用することで、時間依存の係数を持つ確率微分方程式を導出できることが知られている。この確率微分方程式は時間の変数に適切なスケールを導入することで通常のマルコフ過程同様の解析を行うことが可能である。

ホール速度ゆらぎの時系列を見ると、停止時間が存在しないことが確認できる。したがって、確率微分方程式に記憶関数を導入したものか、時間依存の係数を導入したものがモデルとして適当であることが推察される。両者は記憶関数が満たす関係式によって写り合うことから、ここでは解析を簡便に行うことを目的に後者もモデルを採用する。一般化コーシー過程に時間依存の係数を導入したモデルとして、

$$\begin{aligned} dV(t) &= -(\gamma - D_m)V(t)\nu(t)dt + V(t)\sqrt{2D_m\nu(t)}dW_m(t), \\ &+ \sqrt{2D_a\nu(t)}dW_a(t) \end{aligned} \quad (2)$$

を提案する。この式中に現れる時間依存の関数 $\nu(t) = 1$ とすると、この式は通常の一般化コーシー過程となる。すなわち、この式はマルコフ過程の一般化コーシー過程を拡張したモデルであることがわかる。以下ではこれを非定常一般化コーシー過程 (NSGCP: Nonstationary Generalized Cauchy Process) と呼ぶ。

長期記憶性を決定づける関数 $\nu(t)$ によってスケールされた時間 τ を

$$\tau = \int_0^t \nu(t')dt' \quad (3)$$

として導入することで NSGCP は τ に関する通常の一般化コーシー過程として扱うことが可能となる。欠陥乱流中の個々のホールは決定論的に振る舞うことから [16]、それらの平均二乗変位は時間の二乗に比例しなければならない。式 (3) において

$$\nu_{bm}(t) = 2Kt \quad (4)$$

という形式の関数を導入することでこの要請を満たすことがわかる。また、欠陥乱流中の局在波の生成・死滅過程には遅い時間スケール

$$\nu_{lm}(t) = \frac{\eta}{1 + \eta t} \quad (5)$$

が存在することから [11]、関数 $\nu(t)$ は

$$\nu(t) = \nu_{lm}(t) + \nu_{bm}(t) \quad (6)$$

として与えられる。

NSGCP は線形確率微分方程式であることからサンプルパスの解析解は、

$$\begin{aligned} V(\tau) &= V(0)e^{-\gamma\tau + \sqrt{2D_m}W_m(\tau)} \\ &+ \sqrt{2D_a} \int_0^\tau e^{\gamma(\tau' - \tau) - \sqrt{2D_m}[W_m(\tau') - W_m(\tau)]} dW_a(\tau'). \end{aligned} \quad (7)$$

として求められる。この式中に現れる確率積分を離散化すると、 $\tau_n = n\Delta\tau$ に対して

$$\begin{aligned} V(\tau_{n+1}) &= V(\tau_n)e^{-\gamma\Delta\tau + \sqrt{2D_m}\Delta\tau\xi_m} \\ &+ \sqrt{2D_a\Delta\tau}\xi_a e^{\gamma\Delta\tau - \sqrt{2D_m}\Delta\tau\xi_m}, \end{aligned} \quad (8)$$

が得られる。この漸化式に初期値から始めて逐次値を代入することでサンプルパスを数値的に求めることができる。実際に数値的に求めたサンプルパスのうちの一つを図 7 に示す。この図より、間欠性が再現されていることが確認できる。

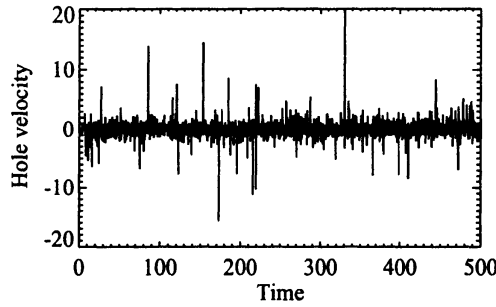


Fig. 7: 式 (8) を用いて逐次値を代入することで得られたサンプルパスのうちの一つを示す。図 3 に見られた間欠性が再現されていることが確認できる。

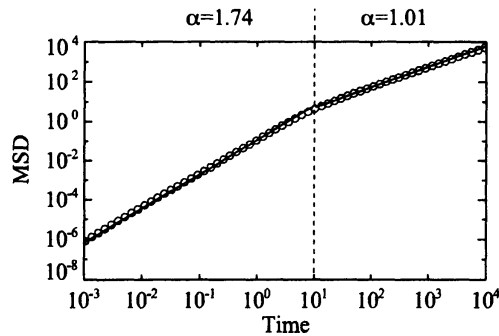


Fig. 8: 式 (11) から求められた NSGCP の平均二乗変位。拡散挙動が時間スケールごとに異なることが確認できる。超拡散から通常拡散に漸近していくという点において、ホール速度ゆらぎの拡散挙動を定性的には再現できているといえる。

サンプルパスの解析解を用いることで τ に関する自己相関関数が

$$C(t) = \exp[-(\gamma - D_m)\tau(t)]. \quad (9)$$

として求まる。これに式 (6) を代入することで t に関する自己相関関数が

$$C(t) = \frac{e^{-(\gamma - D_m)Kt^2}}{(1 + \eta t)^{\gamma - D_m}} \quad (10)$$

として求まる。図 5 中の実線はこれを図示したものであるが、ホール速度ゆらぎの自己相関係数を精度よく同定していることが確認できる。実際、べき乗減衰は遅い時間スケールに、ガウス型減衰が早い時間スケールに対応している。このことから、ホールの速度ゆらぎには異なる二つの時間スケールが内在していることがわかる。

平均二乗変位は自己相関関数から以下のように求められることが知られている [15]。

$$\begin{aligned} \langle X^2(t) \rangle_{ens} &= \left\langle \int_0^t V(u) du \int_0^t V(u') du' \right\rangle_{ens} \\ &= 2 \int_0^t (t-s) C(s) ds \end{aligned} \quad (11)$$

この式中に現れる積分を式 (10) で表される速度相関関数に対して実行することで図 8 に表される平均二乗変位が得られる。図中において 10^1 を境に拡散挙動が変化していることが確認できる。ホール速度ゆらぎに対応する平均二乗変位の指数とは定量的に一致しないものの、拡散挙動の定性的な変化は捉えられているといえる。

NSGCP に対応する Fokker-Planck 方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} P(v, t) = \nu(t) L_{FP} P(v, t), \quad (12)$$

で与えられる。ここで、 L_{FP} は一般化コーシー過程に対応する Fokker-Planck 作用素であり、

$$L_{FP} = \frac{\partial}{\partial v} (\gamma - D_m) v + \frac{\partial^2}{\partial v^2} (D_m v^2 + D_a). \quad (13)$$

と定義される。定常状態では式 (12) の左辺が 0 であることから、定常分布はただちに

$$P_s(v) = \frac{a^{2b-1}}{B(b-1/2, 1/2)} \frac{1}{(v^2 + a^2)^b}, \quad (14)$$

として求められる。これは一般化コーシー分布である。図 4 中の実線は一般化コーシー分布であるが、ホールの速度ゆらぎを精度良く同定できていることが確認できる。以上の結果から NSGCP は欠陥乱流中のホールの速度ゆらぎの確率モデルとして妥当であるといえる。

4 結論

本研究では空間 1 次元系の CGLE に現れる欠陥乱流中を運動するホールの速度ゆらぎをある種の時系列と見立てて統計解析を行った。この時系列は間欠性を示し、対応する確率密度関数は厚い裾で特徴づけられることがわかった。また自己相関係数はべき乗減衰を示し、長期記憶性の存在が示唆された。拡散挙動を特徴づける平均二乗変位は時間スケールによって異なる指数を持つ超拡散を示すことがわかった。これらの統計的特徴をモデル化することを目的に NSGCP を導入した。この確率過程は記憶の構造を表現する時間依存の係数を持った一般化コーシー過程の拡張である。この関数の具体形は、欠陥乱流中の個々のホールは粒子的挙動を示すことと、局在波同士の生成・死滅過程は遅い時間スケールを持つという事実に基づいて決定した。NSGCP のサンプルパス、定常分布および自己相関関数はいずれも解析的に求められた。また、平均二乗変位は数値的に求めた。これらをホール速度ゆらぎから得られた諸結果と比較することにより NSGCP が現象を説明する妥当な確率モデルとして与えられることを確認した。

謝辞

本研究は日本学術振興会からの科学研究費補助金の支援を受けて行われている (内山は日本学術振興会特別研究員奨励費 No. 25.374 を受けている。金野は科学研究費挑戦的萌芽 No. 24650147 を受けている)。

References

- [1] M. C. Cross and P. C. Hohenberg: Pattern formation outside of equilibrium, *Rev. Mod. Phys.*, 65, pp.851-1112, 1993.
- [2] I. S. Aranson and L. Kramer: The world of the complex Ginzburg-Landau equation, *Rev. Mod. Phys.*, 74, pp.99-143, 2002.
- [3] C. Beta, A. S. Mikhailov, H. H. Rotermund and G. Ertl: Defect-mediated turbulence in a catalytic surface reaction, *Europhys. Lett.*, 75, pp.868-874, 2006.
- [4] C. Huepe and H. Riecke: Statistics of defect trajectories in spatio-temporal chaos in inclined layer convection and the complex Ginzburg-Landau equation, *Chaos*, 14, pp.864-874, 2004.
- [5] M. T. Reeves, T. P. Billam, B. P. Anderson and A. S. Bradley: Inverse energy cascade in forced two-dimensional quantum turbulence, *Phys. Rev. Lett.*, 110, 104501, 2013.
- [6] N. Bekki, Y. Harada and H. Kanai: Bekki-Nozaki hole in traveling excited waves on human cardiac interventricular septum, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 81, 073801, 2012.
- [7] H. Chat  : Spatiotemporal intermittency regimes of the one-dimensional complex Ginzburg-Landau equation, *Nonlinearity*, 7, pp.185-204, 1994.
- [8] M. van Hecke: Building blocks of spatiotemporal intermittency, *Phys. Rev. Lett.*, 80, pp.1896-1899, 1998.

- [9] J. A. Sherratt and M. J. Smith: Transition to spatiotemporal chaos via stationary branching shocks and holes, *Physica D*, 241, pp.1671-1679, 2012.
- [10] Y. Uchiyama and H. Konno: Statistical description of wave interactions in 1D defect turbulence, *Proc. World Acad. Sci. Eng. Tech.*, 80, pp.207-212, Amsterdam, 2013.
- [11] Y. Uchiyama and H. Konno: Birth-death process of local structures in defect turbulence described by the one-dimensional complex Ginzburg-Landau equation, *Phys. Lett. A*, 378, pp.1350-1355, 2014.
- [12] H. Konno and F. Watanabe: Maximum likelihood estimators for generalized Cauchy processes, *J. Math. Phys.*, 48, 103303, 2007.
- [13] Y. Kuramoto: *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Dover, 2003.
- [14] J. Klafter and I. M. Sokolov: *First Steps in Random Walks: From Tools to Applications*, Oxford University press, 2011.
- [15] 戸田盛和, 斎藤信彦, 久保亮五, 橋爪夏樹: 統計物理学, 岩波書店, 2011.
- [16] 内山祐介, 金野秀敏: 複素 Ginzburg-Landau 方程式に現れる時空パターンの統計数理解, 統計数理研究所共同研究レポート 312 ダイナミカルバイオフィーマティクスの展開 (2), pp.112-117, 2013.