代数幾何学シンポジウム記録
2007年度　pp.122-122

Hermite対称空間の等方表現の運動量写像と球面内の等径超曲面

藤井　忍　(広島大・理学研究科 D2)
高島　和男　(広島大・理学研究科 M2)

2007年10月23日– 26日，　代数幾何学城崎シンポジウム

1　導入

- Riemann多様体 (M,g) 上の C^∞–関数 $f : M \to \mathbb{R}$ が**等径関数**であるとは，ある $A(t)$, $B(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ が存在して，$\|\mathrm{grad}\, f\|^2 = A(f)$, $\Delta f = B(f)$ となること．
- **等径超曲面**とは，等径関数 $f : M \to \mathbb{R}$ のレベル集合として定義される超曲面のこと．
- 等質超曲面 $\Longrightarrow$ 主曲率一定超曲面 $\overset{\mathbb{S}^{n-1}\text{内なら}}{\Longleftrightarrow}$ 等径超曲面．
- 球面内の等径超曲面の主曲率の個数は1, 2, 3, 4, 6のいずれか．
  - ＊主曲率の個数が1, 2, 3の場合，等径超曲面は等質．
  - ＊主曲率の個数が4の場合，非等質な等径超曲面が存在．

□ 4つの主曲率を持つ球面内の等径超曲面の分類について

等質な場合は

- Hsiang-Lawson (1971)

によって分類済み．**表現論**を用いる．

Hsiang-Lawsonの結果から得られる事実

- G/K：rank $= 2$ の対称空間，
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$：$\mathfrak{g}$ のCartan分解

のとき，等方表現 $K \overset{\mathrm{Ad}}{\curvearrowright} \mathfrak{p}$ の主 K–軌道は球面内の等質超曲面．
　逆に，球面内の等質超曲面は，ある rank $= 2$ の対称空間 G/K の等方表現の主 K–軌道．

　ところが，非等質な場合は

- Ozeki-Takeuchi (1975, 1976)

によって例が無数に存在することが示され，

- Ferus-Karcher-Münzner (1981)

によって，Clifford代数の表現との対応が分かっている．
　非等質な場合の分類は

- Cecil-Chi-Jensen (2007)

によってほぼ完成．**可換環論**を用いる．
　ほとんどの場合はHsiang-LawsonとFerus-Karcher-Münznerで得られるものに限ると考えられている．

2　我々の予想

最終目標　4つの主曲率を持つ，球面内の等径超曲面は運動量写像を用いて表すことが出来るであろう．

(M,ω)：**シンプレクティック多様体**
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ M：m次元多様体，ω：M 上の微分2–形式　s.t.　$d\omega = 0$, $\omega^{\wedge m} \neq 0$.

Lie群 K がシンプレクティック多様体 (M,ω) に**Hamilton的に作用する**とは
（1）　K–作用はシンプレクティック形式 ω を保存する，
（2）　次の二つをみたす写像 $\mu : M \to \mathfrak{k}^*$ が存在する：
- $\langle d\mu(\xi), \eta\rangle = \omega(\widetilde{\xi}, \eta)$, $^\forall\xi \in \mathfrak{k}$, $^\forall\eta \in \mathscr{X}(M)$,
- $\mu(g.x) = \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}(\mu(x))$, $^\forall g \in K$, $^\forall x \in M$.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\mu} & \mathfrak{k}^* \\ K\text{-act}\downarrow & & \downarrow K\text{-act} \\ M & \xrightarrow[\mu]{} & \mathfrak{k}^* \end{array}$$

この μ を**運動量写像**という．

我々はHermite対称空間の等方表現に注目した．
なぜなら G/K が rank $= 2$ のHermite対称空間のとき
（1）　等方表現の主軌道は等径超曲面．
- ある等径関数 $\varphi : \mathfrak{p} \to \mathbb{R}$ のレベル集合．
- φ は K–不変関数．

（2）　等方表現 $K \overset{\mathrm{Ad}}{\curvearrowright} \mathfrak{p}$ はHamilton作用．
- 運動量写像 $\mu : \mathfrak{p} \to \mathfrak{k}^*$ が存在．
- μ は K–同変写像．

この事実から「等径関数と運動量写像には何か関係があるのでは?」と考え，次の予想を立てた．

予想　G/K を rank $= 2$ のHermite対称空間とする．このとき $a, b \in \mathbb{R}$ を上手く選べば，

$$\begin{array}{rccc} f_{a,b} : & \mathfrak{p} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ & P & \longmapsto & a\,\|\mu_1(P)\|^2 + b\,\|\mu_2(P)\|^2 \end{array}$$

は等径関数になるであろう．ただし，
- $\langle\ ,\ \rangle$ はKilling形式から定まる内積，
- μ_1 は $\mathfrak{p} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{k}^* \xrightarrow{\langle\ ,\ \rangle} \mathfrak{k} \to \mathfrak{u}(1)$ の合成，μ_1 は K–同変．
- μ_2 は $\mathfrak{p} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{k}^* \xrightarrow{\langle\ ,\ \rangle} \mathfrak{k} \to \mathfrak{k}'$ の合成，μ_2 は K–同変．

4つの主曲率を持つ，階数2の対称空間のリスト
赤字で書かれているのがHermite対称空間．

type	multiplicities	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{k}$
B	$(2,2)$	$\mathfrak{so}(5)^2$	$\mathfrak{so}(5)$
	$(1,n)$	$\mathfrak{so}(4+n)$	$\mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(2+n)$
C	$(4,3)$	$\mathfrak{sp}(4)$	$\mathfrak{sp}(2) \oplus \mathfrak{sp}(2)$
BC	$(2,(2n,1))$	$\mathfrak{su}(4+n)$	$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2+n) \oplus \mathbb{R}$
	$(4,(4,1))$	$\mathfrak{so}(10)$	$\mathfrak{u}(5)$
	$(4,(4n,3))$	$\mathfrak{sp}(4+n)$	$\mathfrak{sp}(2) \oplus \mathfrak{sp}(2+n)$
	$(6,(8,1))$	$\mathfrak{e}_6$	$\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(10)$

3　現在までの進捗状況

定理　$\mathrm{SO}(2+n)/\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(n)$ の場合は予想は正しい．実際，$a, b \in \mathbb{R}$ を $(a,b) = (4,8)$，または $(a,b) = (-4,-8)$ とすると

$$f_{a,b}(P) = a\,\|\mu_1(P)\|^2 + b\,\|\mu_2(P)\|^2$$

は等径関数である．

□ μを求める

定理 (Ohnita) Hermite対称空間 G/K の等方表現 $K \overset{\mathrm{Ad}}{\curvearrowright} \mathfrak{p}$ の運動量写像 $\mu : \mathfrak{p} \to \mathfrak{k}$ は $\mu(P) - \mu(0) = (\mathrm{ad}_P)^2(Z) = [P,[P,Z]]$ で与えられる．ただし，
- $\mathfrak{k} = \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{k}'$,
- $Z \in \mathfrak{u}(1)$ s.t. $J := \mathrm{ad}_Z$ は $\mathfrak{p}$ 上の複素構造を定める，
- ω：$\omega(X,Y) = \langle JX, Y\rangle$ で定義される $\mathfrak{p}$ 上のシンプレクティック形式,
- $\mathfrak{k} \simeq \mathfrak{k}^*$.

□ $\mu_1(P)$, $\mu_2(P)$を求める

命題
（1）　$\mu_1(P) \in \mathfrak{u}(1)$ については
- $\mu_1(P) = -\dfrac{\langle P,P\rangle}{\langle Z,Z\rangle} Z$,
- $\|\mu_1(P)\|^2 = \dfrac{\langle P,P\rangle^2}{\langle Z,Z\rangle} = \dfrac{\|P\|^4}{\|Z\|^2} \in \mathbb{R}$.

（2）　μ, μ_1 はLie代数の言葉で表せるので，μ_2 もLie代数の言葉で表せる．具体的には

$$\mu_2 = [P,[P,Z]] + \frac{\langle P,P\rangle}{\langle Z,Z\rangle} Z.$$

□ grad $f_{a,b}(P)$, $\Delta f_{a,b}(P)$を求める

定理 (Kirwan) Kähler多様体 (M,g,J,ω) にLie群 K がHamilton的に作用しているとする．その運動量写像 $\mu : M \to \mathfrak{k}$ に対して $f : M \to \mathbb{R}$ を $f(P) := \|\mu(P)\|^2$ と定義する時，$\mathrm{grad}\, f = 2\widetilde{J\mu(P)}_P$ が成り立つ．
- Kirwanの補題から $\mathrm{grad}\, f(P) = 2[Z,[\mu(P),P]]$ であり，$\|\mathrm{grad}\, f(P)\|^2 = 4\,\|[\mu(P),P]\|^2$ である，
- $\Delta f(P) = 4\sum_{i=1}^{m} \langle \mu(P_i), \mu(P)\rangle + 8\sum_{i=1}^{m} \|[P_i,[P,Z]]\|^2$ である．ただし，$m = \dim\mathfrak{p}$ で，$\{P_1,\ldots,P_m\}$ は $\langle\ ,\ \rangle$ に関する P の正規直交基底である．

4　今後の課題

- Hermite対称空間の等方表現の場合に予想が正しいことを証明する．
- 非等質な等径超曲面に関して，スピン表現の運動量写像と関係がないか調べる．
- 等質だけどHermitianではない等径超曲面に関して，運動量写像との関連を調べる．
- 不変式論との関連について．