

2-超函数の Radon 変換と その応用について

東大・理 野 呂 正 行 (*)

(Masayuki Noro)

目 次

- §1 2-microfunctions の cohomological Radon transformations
 - 1.0 準備
 - 1.1 消滅定理
 - 1.2 2-microfunctions の cohomological Radon transformations
- §2 C_0 の境界値 としての 2-microfunctions
 - 2.1 cohomological Radon transformations と Čech cohomology との対応
 - 2.2 C_0 の $\mathcal{Q}$ -変数に関する曲面 Radon 分解
 - 2.3 $\mathbb{R}^2$ に対する基本的演算とその応用

*) 現在の所属は 富士通・国際研

要 旨

超函数を正則函数の境界値としてとらえる, という考えは, Kataoka [8] における Radon 変換の理論において, 判明するか否かのとされ, 金子 [3] においてさらに直観的で, わかり易いものとされた。この修論では, Kashiwara-Laurent [7] における 2-超函数を, 同様に $\mathcal{CO}$ (正則パラメタをもつ microfunction) の境界値として把握することに試みる。

まずいくつかの コホモロジー消滅定理において, Kataoka [8] と同様にして 2-超函数の コホモロジー的 Radon 変換が得られ, それと $\mathcal{CO}$ の $\mathcal{O}$ -変数に関する曲面 Radon 分解により 2-超函数は $\mathcal{CO}$ の境界値としてかなり明確にとらえられる。これにより, 2-超函数に対する種々の基本的演算が初等的に定義され, その 2-特異スペクトル評価も得られる。これらの応用として, Kashiwara-Laurent [7] に述べられている “théorème de Holmgren microlocal” が金子 [3] と全く同様にして初等的, 直観的に証明される。

§1 2-microfunctions and cohomological Radon transformations

M is a real analytic manifold, $\Lambda \subset T^*M$
is a homogeneous involutory submanifold
of T^*M . In this case, Kashiwara-Lauvent [7]
define, A_Λ^2 (2-real analytic function),
 B_Λ^2 (2-hyperfunction), C_Λ^2 (2-micro-
function) as sheaves and define them.
Below we consider special cases, and
Kataoka [8] and the same method, B_Λ^2, C_Λ^2 are
cohomological Radon transformations and
we consider them.

1.0 準備

以下では次の状況で考える。

$$M = \mathbb{R}_u^p \times \mathbb{R}_x^q \hookrightarrow \mathbb{C}_w^p \times \mathbb{C}_z^q = X$$

($w = u + iv$, $z = x + iy$; それぞれの dual variable $\tau = t + is$, $\bar{z} = \bar{x} + i\bar{y}$ とする)

$$N = \mathbb{R}_u^p \times \mathbb{C}_z^q \hookrightarrow X.$$

$$\Lambda = \{(u, x; \sqrt{t} du + o dx)\} \simeq \sqrt{t} T^* \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \\ \subset \sqrt{t} T^* M$$

$$\tilde{\Lambda} = T_{\Lambda}^* X = \sqrt{t} T^* \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q$$

すなわち $\Lambda \hookrightarrow \tilde{\Lambda}$ で $\tilde{\Lambda}$ は Λ の部分複素化である。

この状況で, $\pi: \tilde{X}^* \rightarrow X$ ($\tilde{X}^* = \mathbb{C} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ の 1 部分変換)

とすると, $C_{N|X} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}_{T_{\Lambda}^* X}^p(\pi^{-1} \mathcal{O}_X)^a \otimes w$

は $\mathbb{Z}$ を正則パラメータに含む microfunction の sheaf となる。(a: antipodal map, w: orientation sheaf. 以下支障がない限り省略する。) これを $\mathcal{C}\mathcal{O}$ と書くとき, $A_{\Lambda}^2, B_{\Lambda}^2, C_{\Lambda}^2$ は次のように定義される。

$$A_{\Lambda}^2 = \mathcal{C}\mathcal{O}|_{\Lambda}, \quad B_{\Lambda}^2 = \mathcal{H}_{\Lambda}^p(\mathcal{C}\mathcal{O}) \\ C_{\Lambda}^2 = \mathcal{H}_{T_{\Lambda}^* \tilde{\Lambda}}^p(\pi^{-1}(\mathcal{C}\mathcal{O}))^a \otimes w \quad (\pi: \tilde{\Lambda}^* \rightarrow \tilde{\Lambda}).$$

以後 $\Lambda \in \mathcal{A}(T^*\mathbb{R}^p \setminus \mathbb{R}^p) \times \mathbb{R}^q$ に制限して考
 えよこととし, さるに それを $\mathcal{A}S^*\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ とみな
 すことにする。

1.1. 消滅定理

この節では, のちに必要となる, いくつかの
cohomology 消滅定理を証明する.

$$1^\circ \quad N = \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q \hookrightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q = X \quad N_0 = \mathbb{R}^p \hookrightarrow \mathbb{C}^p = X_0 \\ \text{なら } N\widetilde{X}^* \simeq N_0\widetilde{X}_0^* \times \mathbb{C}^q \quad N_0\widetilde{X}_0^* = (\mathbb{C}^p \setminus \mathbb{R}^p) \cup FS^*\mathbb{R}^p \\ \pi: N\widetilde{X}^* \rightarrow X \quad \text{とする.}$$

定理 1.1.1 $U \subset FS^*\mathbb{R}^p$: open, propre convex

$D \subset \mathbb{C}^q$: Stein open

$$\Rightarrow H^j(U \times D, \mathcal{O}) = 0 \quad (j \geq 1)$$

$$\text{証明) } \mathcal{O} = \mathcal{H}_{S^*\widetilde{X}}^p(\pi^{-1}\mathcal{O}_X) = R\Gamma_{S^*\widetilde{X}}(\pi^{-1}\mathcal{O})[p]$$

(純 p 次元性) より

$$H^j(U \times D, \mathcal{O}) = H_{U \times D}^{j+p}(\widetilde{U} \times D, \pi^{-1}\mathcal{O})$$

$$(\widetilde{U} = \Omega \cup U; \Omega \text{ open } \subset \mathbb{C}^p \setminus \mathbb{R}^p \text{ で } \widetilde{U} : \text{open in } N_0\widetilde{X}_0^*)$$

そこで次の long exact sequence を考へる.

$$\rightarrow H_{U \times D}^j(\widetilde{U} \times D, \pi^{-1}\mathcal{O}) \rightarrow H^j(\widetilde{U} \times D, \pi^{-1}\mathcal{O}) \rightarrow H^j(\Omega \times D, \mathcal{O}) \rightarrow \dots$$

まず $H^j(\Omega \times D, \mathcal{O}) = 0$ であるが, これに关しては次の

補題がある。

補題 1.1.2 ((c.f. 小松 [10], Douady [2] etc.))

$X = \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q \times \mathbb{R}^r$. $W \subset \mathbb{C}^p$ $D \subset \mathbb{C}^q \times \mathbb{R}^r$: open
 かつ $H^j(D, \mathcal{O}_D) = 0$ ($j \geq 1$), $\dim_{\mathbb{C}} H^k(W, \mathcal{O}_W) < \infty$
 $\Rightarrow H^k(W \times D, \mathcal{O}_{W \times D}) \simeq H^k(W, \mathcal{O}_W) \hat{\otimes} \Gamma(D, \mathcal{O}_D)$

証明) まず, 一般に $D \subset \mathbb{C}^q \times \mathbb{R}^r$ open に対し,

$\Gamma(D, \mathcal{O}_D)$ は Fréchet nuclear である。よって
 小松 [10] etc. にあて, $\cdot \hat{\otimes} \Gamma(D, \mathcal{O}_D)$ は,

Fréchet Spaces の topological short exact

Sequence に対し Γ は exact functor であり, 更に一般
 に left exact である。よって, $\Gamma(U) \hat{\otimes} \Gamma(V) \simeq \Gamma(U \times V)$
 により, (U, V open), $\Gamma(W) \hat{\otimes} \mathcal{O}_D(D) \simeq \Gamma(\mathcal{O}_D(W \times D))$
 $\mathcal{O}(W) \hat{\otimes} \mathcal{O}_D(D) \simeq \mathcal{O}_D(W \times D)$ がいえる。

さて, X 上には

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_D \hookrightarrow \mathcal{E}^{(0,0)} \mathcal{O}_D \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{(0,p)} \mathcal{O}_D \rightarrow 0$$

なる resolution (Partial Dolbeault resolution) が存在

するところから述べたことからあかり, しかも,

$$H^j(D, \mathcal{O}_D) = 0 \quad (j \geq 1) \quad \text{より} \quad H^j(W \times D, \mathcal{E}^{(0,\cdot)} \mathcal{O}_D) = 0$$

(i) 2) が成り立つ。(これは Andreotti-Grauert [1] によってもいえる。また以下の議論を使ってもいえる)

$$\begin{aligned} \text{よ} 2. \quad H^j(W \times D, \mathcal{O} \otimes \mathcal{E}) &\simeq H^j(\Gamma(W \times D, \mathcal{E}^{(0, \cdot)} \otimes \mathcal{E})) \\ &= H^j(\Gamma(W, \mathcal{E}^{(0, \cdot)}) \hat{\otimes} \Gamma(D, \mathcal{O} \otimes \mathcal{E})) \end{aligned}$$

こゝで次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & \searrow & & & \\ & & \mathbb{Z}^{k-1} & \searrow & & & \\ \cdots & \longrightarrow & \Gamma(W, \mathcal{E}^{(0, k-1)}) & \longrightarrow & \Gamma(W, \mathcal{E}^{(0, k)}) & \longrightarrow & \Gamma(W, \mathcal{E}^{(0, k+1)}) \longrightarrow \cdots \\ & & \searrow & & \nearrow & & \\ & & 0 & \longrightarrow & B^k & \longrightarrow & \mathbb{Z}^k \longrightarrow H^k(W, \mathcal{O}) \longrightarrow 0 \\ & & & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

仮定より $\dim_{\mathbb{C}} H^k(W, \mathcal{O}) < +\infty$ なるから 小松 [9]

定理 (IV.3.49) (Schnartza 補題) により B^k は自由。

$$\begin{aligned} \text{よ} 2. \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Z}^k \hat{\otimes} \Gamma(D, \mathcal{O} \otimes \mathcal{E}) &\longrightarrow \Gamma(W \times D, \mathcal{E}^{(0, k)} \otimes \mathcal{E}) \longrightarrow B^k \hat{\otimes} \Gamma(D, \mathcal{O} \otimes \mathcal{E}) \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow B^k \hat{\otimes} \Gamma(D, \mathcal{O} \otimes \mathcal{E}) &\longrightarrow \mathbb{Z}^k \hat{\otimes} \Gamma(D, \mathcal{O} \otimes \mathcal{E}) \longrightarrow H^k(W, \mathcal{O}) \hat{\otimes} \Gamma(D, \mathcal{O} \otimes \mathcal{E}) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

は exact なる

$$\mathbb{Z}^{k-1} \hat{\otimes} \Gamma(D, \mathcal{O} \otimes \mathcal{E}) \simeq \ker (\Gamma(W \times D, \mathcal{E}^{(0, k-1)} \otimes \mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma(W \times D, \mathcal{E}^{(0, k)} \otimes \mathcal{E})) \quad \text{より}$$

$$B^k \hat{\otimes} \Gamma(D, \mathcal{O} \otimes \mathcal{E}) \simeq \text{Im} (\Gamma(W \times D, \mathcal{E}^{(0, k-1)} \otimes \mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma(W \times D, \mathcal{E}^{(0, k)} \otimes \mathcal{E}))$$

よゝ補題は示された。 //

上の補題により, $\dim_{\mathbb{C}} H^k(\Omega, \mathcal{O}) < +\infty$ なるから

$$H^k(\Omega \times D, \mathcal{O}) \simeq H^k(\Omega, \mathcal{O}) \otimes \Gamma(D, \mathcal{O}) \quad \text{ここから}$$

Malgrange の定理より $k \geq p \Rightarrow H^k(\Omega, \mathcal{O}) = 0$

$$\therefore \int \geq p+1 \Rightarrow H^j_{\Omega \times D}(\tilde{\mathcal{O}} \times D, \pi^{-1}\mathcal{O}) \simeq H^j(\tilde{\mathcal{O}} \times D, \pi^{-1}\mathcal{O})$$

よって $j \geq p+1$ ならば $H^j(\tilde{\mathcal{O}} \times D, \pi^{-1}\mathcal{O}) = 0$ である。
はい。

$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{L}^\bullet$ は $\mathcal{O}$ の flabby resolution である。

よって $0 \rightarrow \pi^{-1}\mathcal{O} \rightarrow \pi^{-1}\mathcal{L}^\bullet$ は $\pi^{-1}\mathcal{O}$ の resolution である。

$$\text{よって実は} \quad H^j(\tilde{\mathcal{O}} \times D, \pi^{-1}\mathcal{L}^k) = 0 \quad (\forall j \geq 1, \forall k \geq 0)$$

$$\text{証明)} \rightarrow H^j_{\Omega \times D}(\tilde{\mathcal{O}} \times D, \pi^{-1}\mathcal{L}^k) \rightarrow H^j(\tilde{\mathcal{O}} \times D, \pi^{-1}\mathcal{L}^k) \rightarrow H^j(\Omega \times D, \mathcal{L}^k) \dots$$

よって long exact sequence に対して, $\mathcal{L}^k$ が flabby なら

$$H^j(\Omega \times D, \mathcal{L}^k) = 0 \quad (j \geq 1)$$

よって次の補題がある。

補題 (S-k-k prop 1.2.4) $N \supset M$: manifolds

$\mathcal{F}$: a sheaf on N . $\mathcal{U} \subset S^*_M N$: open proper convex

$\pi: \tilde{M}^* \rightarrow N$ である。

$$H^j(\mathcal{U}, R\Gamma_{S^*_M N}(\pi^{-1}\mathcal{F})) \simeq \varinjlim_{\mathbb{Z}} H^j_{\mathbb{Z}}(N, \mathcal{F}) \quad \text{ただし}$$

$\mathbb{Z}$ は 1) $\mathbb{Z}$: locally closed in N . $\mathbb{Z} \supset \pi(\mathcal{U})$

2) $\overline{\mathbb{Z} - M}$ in $\tilde{M}^* \cap \mathcal{U} = \emptyset$ である。

この補題により $H^j_{\Omega \times D}(\tilde{\mathcal{O}} \times D, \pi^{-1}\mathcal{L}^k) \simeq \varinjlim_{\mathbb{Z}} H^j_{\mathbb{Z}}(N, \mathcal{L}^k) = 0$ ($j \geq 1$) ($\because \mathcal{L}^k$: flabby) である。 $H^j(\tilde{\mathcal{O}} \times D, \pi^{-1}\mathcal{L}^k) = 0$ ($j \geq 1$) である。
//

$$\text{あ}2 \quad H^j(\tilde{\sigma} \times D, \pi^{-1}0) \simeq H^j(\Gamma(\tilde{\sigma} \times D, \pi^{-1}Z))$$

以下で右辺を調べる。

$$\text{一般に } M = \mathbb{R}^m \simeq \{0\} \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}_x^l \times \mathbb{R}_x^m = N$$

$$F: \text{sheaf on } N. \quad \pi: \tilde{N}^* = ((\mathbb{R}^l \setminus \{0\}) \sqcup S_3^{l-1}) \times \mathbb{R}^m$$

$$\rightarrow \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m. \quad U \subset S_3^{l-1} \times \mathbb{R}^m = S_M^* N: \text{open, proper}$$

convex $\subset U$, $S_3^{l-1} \subset \mathbb{R}^l \setminus \{0\}$ (単位球面) と見做す。

$$\text{さて } \Omega \subset (\mathbb{R}^l \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^m \text{ と}$$

$$\Omega = \{(\lambda, \mu) ; \exists (\beta, \mu) \in U \text{ s.t. } \langle \lambda, \beta \rangle \geq 0\}$$

$$= U^{aoc} \quad (a: \text{antipodal}, o: \text{polar}, c: \text{補集合})$$

と定義する。 ($\Omega = \text{open in } (\mathbb{R}^l \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^m$) すると、

$\tilde{U} = \Omega \sqcup U$ は open in $\tilde{N}^*$ 。 U は open, proper

convex $\neq$) $\exists K_j (j=1, 2, \dots)$ compact proper convex

$$K_j \subset K_{j+1} \text{ s.t. } \bigcup K_j = U \text{ かつ } \Omega_j \subset \Omega$$

$$\text{と } \Omega_j = \{(\lambda, \mu) ; \exists (\beta, \mu) \in K_j \text{ s.t. } \langle \lambda, \beta \rangle \geq 0\}$$

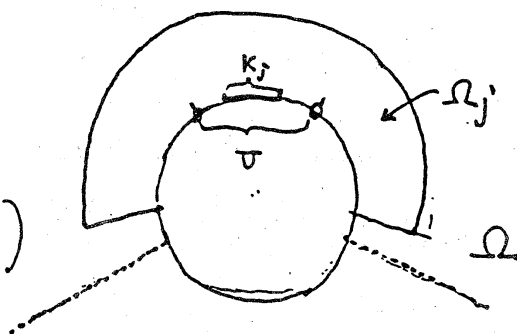
$$1 \leq j \text{ かつ } \text{任意 } \mu \in U \text{ に対し } \tilde{K}_j = \Omega_j \sqcup K_j$$

は $m+K_j$ の近傍 $m \tilde{N}^*$

$$\tilde{K}_j \subset m \tilde{K}_{j+1} \text{ かつ } \tilde{U} = \bigcup \tilde{K}_j$$

あ2.

$$\Gamma(\tilde{U}, \pi^{-1}F) = \varinjlim_j \Gamma(\tilde{K}_j, \pi^{-1}F)$$



二二二

補題

$$\Gamma(\tilde{K}_j, \pi^{-1}F) \simeq \Gamma(\pi(\tilde{K}_j), F).$$

証明). まず, K_j が N^* 上 compact であることを示す.
 $K_j \subset \bigcup_{\lambda} \tilde{V}_{\lambda}$ ($\tilde{V}_{\lambda} = \text{open in } N^*$) である. $\tilde{V}_{\lambda}$ は細分
 されているから $\tilde{V}_{\lambda} \cap S^*_H N \neq \emptyset$ なる λ には

$$\tilde{V}_{\lambda} = \{ (x, t) \in (\mathbb{R}^l \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^m : |x| < \varepsilon_{\lambda}, |t - t_{\lambda}| < \varepsilon_{\lambda}, \exists \xi \in \mathbb{S}^H \\ \text{s.t. } |\xi - \xi_{\lambda}| < \varepsilon_{\lambda}, \langle x, \xi \rangle \geq 0 \}$$

$$\sqcup \{ (\xi, t) \in \mathbb{S}^{l+H} \times \mathbb{R}^m, |\xi - \xi_{\lambda}| < \varepsilon_{\lambda}, |t - t_{\lambda}| < \varepsilon_{\lambda} \}$$

という形に表すことができる. すると $K_j \subset \bigcup_{\lambda} (\tilde{V}_{\lambda} \cap S^*_H N)$

で K_j が $S^*_H N$ 上 compact であり $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_N$ s.t.

$$K_j \subset \bigcup_{i=1}^N \tilde{V}_{\lambda_i} \quad \varepsilon = \min_i \varepsilon_{\lambda_i} > 0.$$

$$\tilde{K}_j \subset \bigcup_{i=1}^N \tilde{V}_{\lambda_i} \cup \{ (x, t) \in \Omega_j : |x| \geq \varepsilon \}$$

$$\left[\begin{array}{l} \therefore K_j \subset \text{closed set. } (x, t) \in \Omega_j, |x| < \varepsilon \text{ ならば} \\ \exists (\xi, t) \in K_j \text{ s.t. } \langle x, \xi \rangle \geq 0 \text{ (}\Omega_j \text{ の定義). } \exists \lambda_i \text{ s.t.} \\ |\xi - \xi_{\lambda_i}| < \varepsilon_{\lambda_i}, |t - t_{\lambda_i}| < \varepsilon_{\lambda_i} \text{ であり } |x| < \varepsilon \leq \varepsilon_{\lambda_i} \text{ ならば} \\ (x, t) \in \tilde{V}_{\lambda_i} \end{array} \right] //$$

$\{ (x, t) \in \Omega_j, |x| \geq \varepsilon \}$ は通常の Euclid 空間の compact set であり 結局 K_j は有限個の $\tilde{V}_{\lambda}$ で覆われる. //

よって $p = \pi|_{K_j} : K_j \rightarrow \pi(K_j)$ は closed map

この fibre は connected. したがって $F \rightarrow P_* P^* F$
 なる canonical morphism において, stalk を調
 べよう.

$$\begin{aligned}
 F_{p^*} &\rightarrow (P_* P^* F)_{p^*} = \varinjlim_{W \ni p^*} \Gamma(P^{-1}(W), P^* F) \\
 &\xrightarrow{\simeq} \varinjlim_{V \ni p^*} \Gamma(V, P^* F) \xrightarrow{m_j} \Gamma(P^{-1}(p^*), P^* F) \\
 &\xrightarrow{\simeq} F_{p^*} \\
 &\text{fibre connected} \\
 &\text{だから.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & (P_* P^* F)_{p^*} & \\
 \nearrow & \simeq & \searrow m_j \\
 F_{p^*} & \xrightarrow{id} & F_{p^*}
 \end{array}$$

だから $F \simeq P_* P^* F$

$$\begin{aligned}
 \therefore \Gamma(\pi(E_j), F) &\simeq \Gamma(P^{-1}(\pi(E_j)), P^* F) \\
 &= \Gamma(\tilde{E}_j, \pi^* F) \quad //
 \end{aligned}$$

はじめの状況にもよる。 $\tilde{U} \times D = (\Omega \cup U) \times D$ に
 対し, Ω 上で述べたと同様の cone により,
 $\tilde{\Omega}_j = \Omega_j \cup K_j$ と, 上と同様に, $\tilde{U}$ によりつく
 りとる。さらに, D は stem 対 $\exists D_j (j=1, 2, \dots) \subset D$
 $D_j \subset D_{j+1}$ s.t. D_j : compact な解折多面体
 として $D = \bigcup D_j$ として上の補題より
 $\Gamma(\tilde{U} \times D, \pi^* L^k) = \varprojlim_j \Gamma(\pi(\tilde{\Omega}_j) \times D_j, L^k)$
 となる

$$H^k(\tilde{U} \times D, \pi^* \mathcal{O}) \simeq H^k(\varprojlim_j \Gamma(\pi(\tilde{\Omega}_j) \times D_j, L^k))$$

ここに次の古典的補題がある。

補題 (cf. Kashiwara [4])

$\cdots \rightarrow F_{j+1} \rightarrow F_j \rightarrow \cdots$ は complex の projective system とする。今、 $\forall i$ に対し、 $\{F_j^i\}$ は、

次の条件 (ML)

(ML) $\forall j \in \mathbb{N}$. $\{ \text{Im}(F_{j+1}^i \rightarrow F_j^i) \}_i$ は stationary

を満足するとする。さて

1) canonical morphism $\phi_k: H^k(\varprojlim_j F_j) \rightarrow \varprojlim_j H^k(F_j)$ は onto

2) もし $\{H^k(F_j)\}_j$ が (ML) を満足せば ϕ_{k+1} は isomorphism

$F_j^i = \Gamma(\pi(\tilde{\Omega}_j) \times D_j, \mathcal{L}^i)$ とおくと、 $\mathcal{L}^i$ が fleabby なら

$\{F_j^i\}_j$ は (ML) を満足する。さて $H^k(F_j)$

$= H^k(\pi(\tilde{\Omega}_j) \times D_j, \mathcal{O})$ であり $k \geq p$ なら

$H^k(\pi(\tilde{\Omega}_j) \times D_j, \mathcal{O}) = 0$ がいれば上の補題

により $H^{k+1}(\tilde{\Omega} \times D, \pi^{-1}(\mathcal{O})) = 0$ ($k \geq p$) がいえる。

$\pi(\tilde{\Omega}_j)$, D_j は compact なら、

$H^k(\pi(\tilde{\Omega}_j) \times D_j, \mathcal{O}) \cong \varinjlim_{W_1 \times W_2 \supset \pi(\tilde{\Omega}_j) \times D_j} H^k(W_1 \times W_2, \mathcal{O})$

ここで D_j が compact 解析的多面体で, stem 基近傍系が存在する. よって補題 1.1.2 により kZP 上の cohomology 群は消える. 以上で定理 1.1.1 が証明された. //

2° 次に, 正則パラメタと smooth パラメタをもつ microfunction の sheaf を定義し, その cohomology 消滅定理を述べる.

$$N = \mathbb{R}_u^p \times \mathbb{C}_z^q \times \mathbb{R}_t^r \hookrightarrow \mathbb{C}_w^p \times \mathbb{C}_z^q \times \mathbb{R}_t^r = X$$

$$N_0 = \mathbb{R}^p \hookrightarrow \mathbb{C}^p = X_0 \quad \widetilde{N}X^* \simeq \widetilde{N}_0X_0^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}^h$$

$$\pi: \widetilde{N}X^* \rightarrow X \quad \text{とす.}$$

命題 1.1.3 $\mathcal{H}_{S_n X}^k(\pi^{-1} \mathcal{O} \mathcal{E}) = 0 \quad (k \neq p)$

(証明) 次の定理による.

定理 (abstract edge of the wedge, Kashiwara-Laudant [7])

T : 位相空間 X complex manifold $\mapsto \mathcal{F}_X$: sheaf on $X \times T$

左の対応が定まっている, $\varphi: X \rightarrow X'$ (holomorphic map)

に対し, $\varphi^*: (\varphi \otimes \text{id}_T)^* \mathcal{F}_{X'} \rightarrow \mathcal{F}_X$ 左の代入操作

加定おこい2次の (H1) - (H3) を満たす。

(H1) $X \supset U \supset V \neq \emptyset$ opens U : connected $W \subset T$ open

$$\Rightarrow \Gamma(U \cap V) \times W(U \times W, \mathcal{F}_X) = 0$$

(H2) $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphic $Y = f^{-1}(0) \subset X$ $df \neq 0$

$$L: Y \subset X \text{ とする } 0 \rightarrow \mathcal{F}_X \rightarrow \mathcal{F}_X \xrightarrow{L} \mathcal{F}_Y \rightarrow 0$$

(H3) Y : compact complex manifold $f: X \times X \rightarrow X \times T$

$$\Rightarrow R^i f_* \mathcal{F}_{X \times Y} = \mathcal{F}_X \otimes H^i(Y, \mathcal{O}_Y)$$

また Γ : closed in $\mathbb{C}^n$ $\lambda \in \Gamma \subset \mathbb{C}$, λ を通る $\mathbb{C}$ -linear
affine variety L ($\dim_{\mathbb{C}} L = n - p + 1$) であり $L \cap \Gamma \neq \emptyset$ かつ
 λ の近傍に存在する μ が存在するとき, $\mu \in T$ に対し

$$\mathcal{H}_{\Gamma \times T}^k(\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n})(x, \lambda) = 0 \quad (\forall k < p)$$

$\mathcal{F}_X = \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{E}$ $T = \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^q$ とする。すると (H1), (H2)

は明らか。(H3) は, Z compact $\Rightarrow \forall j, \dim_{\mathbb{C}} H^j(Z, \mathcal{O}_Z)$

$< +\infty$ (Cartan) かつ補題 1.1.2 が使えて OK。

$p^* \in S_H^* X$ とする。 $p^* = (0, \int_0^1 du, 0, 0) \}_{0=1, \dots, p}$

としたい。 なる。

$$\mathcal{H}_{S_H^* X}^k(\pi^*(\mathcal{O} \otimes \mathcal{E}))_{p^*} = \lim_{\epsilon} \mathcal{H}_{\mathbb{C}^n}^k(\mathcal{O} \otimes \mathcal{E})_{(0,0,0)}$$

ただし $\Gamma_{\epsilon} = \{(\omega, z, t) \mid \langle v, \zeta_{\epsilon, \ell} \rangle \geq 0 \quad \ell=1, \dots, p\}$

$= \zeta_0, \zeta_{\epsilon, 1}, \dots, \zeta_{\epsilon, p}$ の凸包が原点の近傍

2) $\mathbb{G}_\varepsilon$ は定理 2) $q=p$ の場合の仮定を満たす。

3) $k < p$ 2) $\mathcal{H}_{\mathbb{G}_\varepsilon}^k(\pi^{-1}(\mathbb{O}\Sigma)) = 0$ 3) 2)

$k > p$ 2) $\mathcal{H}_{\mathbb{G}_\varepsilon}^k(\mathbb{O}\Sigma)_{(0,0,\dots)} = \varinjlim_{\delta} H_{\mathbb{G}_\varepsilon}^k(U_\delta \times V_\delta \times W_\delta, \mathbb{O}\Sigma)$

$(U_\delta, V_\delta, W_\delta : \text{open ball})$ $U_\delta \times V_\delta \times W_\delta - \mathbb{G}_\varepsilon = \bigcup_{\ell=1}^p U_\ell \times V_\ell \times W_\ell$

$(U_\ell : \text{半空間})$ と書け, $\{U_\delta \times V_\delta \times W_\delta, U_\ell \times V_\ell \times W_\ell\}$ は, $\mathbb{O}\Sigma$ に対する $p+1$ 枚の Leray covering 上は消える。 //

定義 $\mathbb{O}\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}_{\mathbb{G}_\varepsilon}^p(\pi^{-1}(\mathbb{O}\Sigma))$

定義 (cf. Andreotti-Grauert [1] Kataoka [8])

$D \subset \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^p$ が regular family of Stein domain 2) は

1) $\pi : \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ 2) $\forall x \in \pi(D), \pi^{-1}(x)$ Stein

2) $\forall x \in \pi(D) \exists W_x$ open in $\mathbb{C}^p \exists U_x \ni x$ open in $\mathbb{R}^p$

s.t. $W_x \times U_x \supset \pi^{-1}(U_x) \cap D$ かつ $(\pi(W_x) \cap D, W_x)$ が

Runge Pair

を満たすことをいふ。

Andreotti-Grauert により D が regular family of Stein domain $\Rightarrow H^j(D, \mathbb{O}\Sigma) = 0$ ($j \geq 1$)

さらに Stein の場合と同様 $\exists Q_i \subset D$

compact 解析的多面体 ($\exists \bigcup_{\text{open}} Q_i, \exists f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$)

$Q_i = \{p \in \mathcal{D} ; |f_j(p)| \leq 1\} \quad Q_i \subset \subset Q_{i+1} \quad \text{s.t.}$

$\mathcal{D} = \bigcup Q_i$ であって, Q_i はやはり $H^j(W, \mathcal{O}(\mathcal{E})) = 0$
($j \geq 1$) なる基本近傍系である.

定理 1.1.4 $\mathcal{D} \subset \mathbb{A}^s * \mathbb{R}^r$ open proper convex

$D \subset \mathbb{C}^q \times \mathbb{R}^r$ regular family of Stein domain

$\Rightarrow H^j(\mathcal{D} \times D, \mathcal{O}(\mathcal{E})) = 0 \quad (j \geq 1)$

(証明) これは, 命題 1.1.2 と上の定義中で述べた
ことを用いれば 定理 1.1.1 と全く同様に行く。//

3° 最後に
$$P \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^q \\ \mathbb{R}^1 \widetilde{\mathbb{C}}^1 * \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^1 \widetilde{\mathbb{C}}^1 * \mathbb{R}^r \end{array} \right.$$

に対し $P^{-1}CC = P^{-1}H_{S_N^+}^P(\pi^{-1}\mathcal{O}(\mathcal{E}))$ の cohomology
消滅定理を述べよう。

定理 1.1.5 (cf. Kataoka [8] Theorem 2.1.4)

D open $\subset \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r \quad \exists W_1 \subset \subset \dots \subset \subset D$ open m.p.

$\bigcup W_j = D$ s.t. $\forall x \in \mathbb{R}^q \quad P^{-1}(x) \cap W_j, P^{-1}(x) \cap \overline{W_j}$

$P^{-1}(x) \cap D$ が contractible. $\cup \subset \sqrt{S^1 \times \mathbb{R}^p}$ open convex
fibre $\Rightarrow H^k(\cup \times D, P^{-1}(CE)) = 0 \quad (k \geq 1)$

証明) まず, S-K-K Chapt 1 Lemma 2.2.3 より

$$P^{-1}(CE) = P^{-1}R\Gamma_{S^1 \times \mathbb{R}^p}(\pi^{-1}OE)[p]$$

$$\simeq R\Gamma_{S^1 \times \mathbb{R}^p}(\pi^{-1}P^{-1}OE)[p]$$

$$(N = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r \hookrightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r = X)$$

$$\text{よって } H^k(\cup \times D, P^{-1}(CE)) \simeq H_{\cup \times D}^{k+p}(\tilde{\cup} \times D, \pi^{-1}P^{-1}OE)$$

$$(\tilde{\cup} = \cup \sqcup \Omega) \quad \text{次の exact sequence を用いる。}$$

$$\rightarrow H_{\cup \times D}^k(\tilde{\cup} \times D, \pi^{-1}P^{-1}OE) \rightarrow H^k(\tilde{\cup} \times D, \pi^{-1}P^{-1}OE) \rightarrow H^k(\Omega \times D, P^{-1}OE)$$

$$\text{今, } 0 \rightarrow P^{-1}OE \rightarrow P^{-1}\mathcal{E}^{(0, \bullet)} \rightarrow \dots \rightarrow P^{-1}\mathcal{E}^{(0, p)} \rightarrow 0$$

存在 resolution により, Kataoka [8] Theorem 2.1.4

$$\text{により } H^j(\Omega \times D, P^{-1}\mathcal{E}^{(0, j)} \mathcal{E}) = 0 \quad (j \geq 1) \quad \text{よって}$$

$$H^k(\Omega \times D, P^{-1}OE) \simeq H^k(\Gamma(\Omega \times D, P^{-1}\mathcal{E}^{(0, \bullet)} \mathcal{E}))$$

$$P \text{ が open fibre connected なら } \simeq H^k(\Gamma(\Omega \times P(D), \mathcal{E}^{(0, \bullet)} \mathcal{E}))$$

$$= H^k(\Omega \times P(D), OE) = 0 \quad (k \geq p) \quad \text{よって}$$

$$k \geq p+1 \text{ なら } H_{\cup \times D}^k(\tilde{\cup} \times D, \pi^{-1}P^{-1}OE) \simeq H^k(\tilde{\cup} \times D, \pi^{-1}P^{-1}OE)$$

あとは 定理 1.1.1 と同様にして, K compact $\subset \mathbb{C}^p$

$$\text{あるとき } H^k(K \times \overline{W}_j, P^{-1}OE) = 0 \quad (k \geq p) \quad \text{よって } H^k(K \times \overline{W}_j, P^{-1}OE) = 0$$

$P|_{K \times \overline{W}_j}$ が, proper, fibre contractible なら

$$K \times \overline{W}_j \text{ is Hausdorff } \Rightarrow H^k(K \times p(\overline{W}_j), 0) = 0 \quad (K \subset \mathbb{R}^n) \quad //$$

以上により, 必要な消滅定理はすべて証明された。

1.2 2-microfunctions and Cohomological Radon Transformations

1.1 の消滅定理を用いて B^2_Λ, C^2_Λ a cohomological Radon transformation を述べよう。方法その他。

Kataoka [8] の全くの引き写しである。

T, S は Abelian Category $F: T \rightarrow S$ は left exact functor である。ここで $A^i \in T$.

$$0 \rightarrow A^0 \rightarrow \cdots \rightarrow A^n \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

$$\text{かつ } R^k F(A^i) = 0 \quad (k \neq n)$$

$$\Rightarrow 0 \rightarrow R^n T(A^0) \rightarrow \cdots \rightarrow R^n T(A^n) \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

これを用いて $1 \leq i \leq n$ の exact sequence を得る。

$$N = \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2 = X \quad Y^r \text{ complex manifold}$$

$$\text{かつ } X_1 = X \times Y \text{ 上に}$$

$$0 \rightarrow p_* \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X \mathcal{O}_Y^{(1)} \xrightarrow{d} \mathcal{O}_X \mathcal{O}_Y^{(r)} \rightarrow 0$$

これは exact sequence である。これは $S^*_N X, S^*_{N_1} X_1$

($N_1 = N \times Y$) の $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_{X_1}$ に対する余次元性

S - k - k chart 1 Lemma 2-2.3 (2) により

$$0 \rightarrow p_* \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O} \mathcal{O}^{(1)} \xrightarrow{d} \mathcal{O} \mathcal{O}^{(r)} \rightarrow 0$$

これは exact sequence である。

同様にして

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O} \otimes \mathcal{E}^{(0,0)} \xrightarrow{d} \mathcal{O} \otimes \mathcal{E}^{(0,1)} \rightarrow 0$$

若し Y は smooth manifold ならば

$$0 \rightarrow p^* \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{E}^{(0,0)} \xrightarrow{d} \mathcal{C} \otimes \mathcal{E}^{(0,1)} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow p^* \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O} \otimes \mathcal{E}^{(0,0)} \xrightarrow{d} \mathcal{O} \otimes \mathcal{E}^{(0,1)} \rightarrow 0$$

等は exact である。

$$\pm 2. \text{ 改め } N_1 = \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q \times Y \hookrightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q \times Y = X_1$$

$$N = \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q \hookrightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q = X$$

とする。 ($Y = Y^*$: complex manifold)

次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 0 & & 0 & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \rightarrow p^* \mathcal{O} & \rightarrow & \mathcal{O} \otimes \mathcal{O}^{(0,0)} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \mathcal{O} \otimes \mathcal{O}^{(0,n)} \rightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 \rightarrow p^* \mathcal{C} \otimes \mathcal{E}^{(0,0)} & \rightarrow & \mathcal{C} \otimes \mathcal{E}^{(0,0)} \otimes \mathcal{O}^{(0,0)} & & & & \end{array}$$

$D \subset \mathbb{C}^p \times Y$ は定理 1.1.1, 1.1.4, 1.1.5 の仮定を満たす open set, $U \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ は open, proper convex である。

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \Gamma(U \times D, \mathcal{O} \otimes \mathcal{O}^{(0,0)}) & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \Gamma(U \times D, \mathcal{O} \otimes \mathcal{O}^{(0,n)}) \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 \rightarrow \Gamma(U \times D, p^* \mathcal{C} \otimes \mathcal{E}^{(0,0)}) & \rightarrow & \dots & & & & \end{array}$$

なる可換図式は第1行 第1列 Σ a Σ Σ exact
 および Weila 補題 において

$$\begin{aligned} H^k(\Gamma(\Sigma \times D, \mathcal{CO}^{(k)})) &\simeq H^k(\Gamma(\Sigma \times D, P^{-1}(\mathcal{E}^{(k)}))) \\ P: \text{open, fibre connected} &\simeq H^k(\Gamma(\Sigma \times P(D), \mathcal{E}^{(k)})) \\ \text{二つ定理 1.1.4 より } H^k(\Sigma \times P(D), \mathcal{E}^{(k)}) &= 0 \\ (k \geq 1) \quad \therefore H^k(\Gamma(\Sigma \times D, \mathcal{CO}^{(k)})) &\simeq H^k(\Sigma \times P(D), \mathcal{O}) \end{aligned}$$

Σ が smooth な場合も同様である。

$$0 \rightarrow P^{-1}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{CO} \rightarrow \mathcal{E}^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{CO} \rightarrow 0$$

なる resolution において。

$$H^k(\Gamma(\Sigma \times D, \mathcal{CO} \otimes \mathcal{E}^{(k)})) \simeq H^k(\Sigma \times P(D), \mathcal{O})$$

これらを用いて $\mathcal{CO}$ の cohomological Radon

transformation を 2つ 導き出し、証明は Kataoka [8]
 と全く同じなので省略する。

1° smooth parameter ω に対する Radon transform

$$\Gamma S^* \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q \times \mathbb{S}^{q-1} \xrightarrow{P} \Gamma S^* \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q = \tilde{\Lambda}$$

$\tau \downarrow$

$\uparrow$

$$\Gamma S^* \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{S}^{q-1} \xrightarrow{P} \Gamma S^* \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \Lambda$$

$$\begin{aligned} g: [0, \infty) &\rightarrow [0, \infty) : C^2 \text{ class. } g(0) = g'(0) = 0 \\ g'(\omega), g''(\omega) &\geq 0 \quad \forall \omega, \end{aligned}$$

$$D_{g,\varepsilon} = \{ (p^\dagger, z, \beta) \in \sqrt{FS}^* \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q \times \mathcal{S}^{q-1}; |z| < \varepsilon$$

$$y\beta - g(\sqrt{y^2 - (y\beta)^2}) > 0 \} \subset \mathbb{C}$$

$$\mathcal{G}_{g,\varepsilon}^k \stackrel{\text{def}}{=} (\pi|_{D_{g,\varepsilon}})^* \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{(k)}$$

$$\mathcal{G}_g^k = \varinjlim_{\varepsilon} \mathcal{G}_{g,\varepsilon}^k \quad \subsetneq \mathbb{C}.$$

$$= \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \neq$$

定理 1.2.1 次は exact :

$$0 \rightarrow \pi^* \mathcal{A}_{\Lambda}^2 \rightarrow \mathcal{G}_g^0 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{G}_g^{i-1} \xrightarrow{\pi^*} \mathcal{C}_{\Lambda}^2 \rightarrow 0$$

$$\text{on } S_{\Lambda}^* \tilde{\Lambda} = \sqrt{FS}^* \mathbb{R}^p \times \sqrt{FS}^* \mathbb{R}^q$$

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_{\Lambda}^2 \rightarrow P_* \mathcal{G}_g^0 \rightarrow \cdots \rightarrow P_* \mathcal{G}_g^{i-1} \xrightarrow{\pi^*} \mathcal{B}_{\Lambda}^2 \rightarrow 0$$

$$\text{on } \Lambda$$

Remark 1.3.1 $\mathcal{O}$ に対する edge of the wedge

(Kashiwara-Lauder [7]) から出る.

$\mathcal{B}_{\Lambda}^2$ は $\mathbb{C}$ 上, $\mathcal{O} \subset \sqrt{FS}^* \mathbb{R}^p$ は open proper convex

$\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^q$ は convex open かつ $\mathcal{D} =$

$(\mathcal{V} + \sqrt{F} \mathbb{R}^q) \times \mathcal{S}^{q-1} \cap D_{g,\varepsilon}$ は 定理 1.1.1, 1.1.4,

1.1.5 の仮定を満足するから

$$H^{q-1}(\Gamma(\mathcal{O} \times \mathcal{V} \times \mathcal{S}^{q-1}, \mathcal{G}_{g,\varepsilon}^i)) \simeq H^{q-1}(\mathcal{O} \times P(\mathcal{D}), \mathcal{O})$$

$$P(\mathcal{D}) = (\mathcal{V} + \sqrt{F} \{ |z| < \varepsilon \}) - \mathbb{R}^q \text{ 上}$$

$$\simeq H^{q-1}(\mathcal{O} \times (\mathcal{V}^{\mathbb{C}} - \mathbb{R}^q), \mathcal{O}) \quad (\mathcal{V}^{\mathbb{C}}: \mathcal{V} \text{ の Stein 包})$$

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_\Lambda^2 \rightarrow \mathcal{P}_* \mathcal{C}^0 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{P}_* \mathcal{C}^{q-1} \rightarrow \mathcal{B}_\Lambda^2 \rightarrow 0$$

on Λ

さて, 一般に M : real analytic manifold
 $\Lambda \subset \sqrt{-1}TM$: homogeneous involutory submanifold とするとき $C_M \rightarrow \mathcal{B}_\Lambda^2$ なる canonical morphism が Kashiwara-Laurent [7] で定義されている. injective であることが homological に示されている. 一方で, 以下で述べるように, 上で述べた Radon transformation において, $C_M \rightarrow \mathcal{B}_\Lambda^2$ なる morphism が定義できる. (ただし, 無責任な言えはあが. この 2つが同じ morphism であるという保証はない。)

まず C_M a smooth parameter である Radon transformation (Kataoka [8]) に于いて

$$C_M \cong \mathcal{S}_0^{p+1} / d(\eta, \zeta) \mathcal{S}_0^{p+2}$$

$$\text{ただし } \mathcal{S}_0^k(u_0, \lambda_0, (\eta_0, \zeta_0)) = \{f(w, z; \eta, \zeta) \in \mathcal{O}\mathcal{E}^{(k)}\}$$

defined on $|w - u_0| < \varepsilon, |z - \lambda_0| < \varepsilon, |(\eta, \zeta) - (\eta_0, \zeta_0)| < \varepsilon$

$$\eta^2 + \zeta^2 = 1, |\eta| < \varepsilon, |\zeta| < \varepsilon, \eta\eta + \zeta\zeta > 0 \text{ } \dots (1)$$

$$\text{一方 } \mathcal{B}_\Lambda^2 \cong \mathcal{P}_* \mathcal{G}_0^{q+1} / d_3 \mathcal{P}_* \mathcal{G}_0^{q+2}$$

以下 $P_0 = (u_0, z_0, \int (\eta_0 du + \bar{z} dz) \infty) = (0, 0, \int (\eta_0 du + \bar{z} dz) \infty) \in \Lambda$

$(\eta_0 = (1, 0, \dots, 0))$ とする。すると $f \in C_{M, P_0}$ は
 $f = \sigma(F(u, z; \eta, \bar{z}) d\sigma(\eta, \bar{z}))$

(F : defined on (1) $d\sigma(\eta, \bar{z}) : \mathbb{S}^{P+1}$ 上の

標準的の体積要素) とおける。一方 $g \in B_{\Lambda, P_0}^2$

は $g = \sigma(G(u, z, \bar{z}) d\sigma(\bar{z}))$

$G \in C^{\infty} : \text{defined on } \{(u, \int \eta du \infty, z, \bar{z})$

$|u| < \varepsilon, |\eta - \eta_0| < \varepsilon, \eta^2 = 1, \eta \bar{z} > 0, |z| < \varepsilon, \bar{z}^2 = 1\}$

とおける。

今 C^{∞} の smooth parameter $\tau \in \mathbb{R}$ on

transformation とおける。 C と同様。

$$C^{\infty} \cong \int_0^1 C^{\infty} / d\eta \int_0^1 C^{\infty}$$

($\int_0^1 C^{\infty}$ は 単に $\int_0^1 C^{\infty}$ 上の parameter η

$\eta, \tau \in \mathbb{R}$) $\tau \in \mathbb{R}, \tau \in \mathbb{R} \quad H(u, \eta, z, \bar{z}) \in C^{\infty}$

$\eta^m \{ |u| < \varepsilon, |u| < \varepsilon, \eta^2 = 1, |\eta - \eta_0| < \varepsilon, u \eta > 0 \}$

$\times \{ |z| < \varepsilon, |z| < \varepsilon, \bar{z}^2 = 1, \eta \bar{z} > 0 \} \dots (2)$

で定義されたいは $\sigma(\sigma(H d\sigma(u)) d\sigma(\bar{z}))$ は

B_{Λ, P_0}^2 の元を定める。

すなわち $j : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{P+1} \times \mathbb{S}^{P+1} \rightarrow \mathbb{S}^{P+1}$

$(0, \eta, \bar{z}) \mapsto (\eta \cos \theta, \bar{z} \sin \theta)$

とたいて $\delta > 0$ と十分小にすれば

$$(\eta_0, 0) \in \{(\eta \cos \theta, \zeta \sin \theta) ; |\eta - \eta_0| < \varepsilon, \zeta \geq 1, 0 \leq \theta < \delta\}$$

$$\subset \{(\eta, \zeta) \in \mathbb{R}^{p+q-1} ; |(\eta, \zeta) - (\eta_0, 0)| < \varepsilon\}$$

で、 j は $0 \neq 0$ での同型 かつ

$$j^* d\sigma(\eta \cos \theta, \zeta \sin \theta) = \cos^{p-1} \theta \sin^{q-1} \theta d\theta \wedge d\sigma(\eta) \wedge d\sigma(\zeta)$$

(Kataoka [8] Lemma 2.3.1) (符号は降く)

に注意して

$$H_\delta(\omega, \eta, \zeta, \theta) = \int_0^\delta F(\omega, \zeta, \eta \cos \theta, \zeta \sin \theta) \cos^{p-1} \theta \sin^{q-1} \theta d\theta$$

と定義する。すなわち F の定義域上 H_δ は (2)

で定義されているから $\sigma(\sigma(H_\delta d\sigma(\eta)) d\sigma(\zeta))$

は $\beta_{\Lambda, p}^2$ の元と定まる。以下 ω well defined と
あることを言う。

1) δ に依らず $\delta > \delta_1 > 0$ とする

$$H_\delta - H_{\delta_1} = \int_{\delta_1}^\delta F(\omega, \zeta, \eta \cos \theta, \zeta \sin \theta) \cos^{p-1} \theta \sin^{q-1} \theta d\theta$$

は ω に関する well defined な元とあるから $\sigma[(H_\delta - H_{\delta_1}) d\sigma(\eta)] = 0$

2) 代表元によらず $F d\sigma(\eta, \zeta) = d(\eta, \zeta) \omega$

とする。 $\eta_0 = (1, 0, \dots, 0)$ 上の $\mathbb{R}^{p+q-1}$ a local chart

として $(\eta', \zeta) = (\eta_2, \dots, \eta_p, \zeta_1, \dots, \zeta_q)$ としてもよい。

以下で $d\overset{12}{Z} = dZ_3 \wedge \dots$ 等々 なる。

$$\omega = \sum_{j=2}^p f_j d\overset{11}{\eta} \wedge d\overset{12}{Z} + \sum_{\ell=1}^q g_\ell d\overset{11}{\eta} \wedge d\overset{12}{Z} \quad \text{と可たす}$$

$$\text{おる. } \omega = f d\overset{12}{\eta} \wedge d\overset{12}{Z} \quad \text{と } \omega = g d\overset{11}{\eta} \wedge d\overset{12}{Z} \quad \text{と可たす}$$

で 調べるのはよい。($\mathbb{S}^{p-1}$ a chart η' を用いて)

$$a) \omega = f d\overset{12}{\eta} \wedge d\overset{12}{Z} \quad j^*\omega = f \omega^{p-1} \theta \sin^{p-1} \theta$$

$$\times d\overset{12}{\eta} \wedge d\theta \wedge d\sigma(\mathbb{S}) \quad \text{と } j^*d\omega = d j^*\omega$$

$$= d_\eta (f \omega^{p-1} \theta \sin^{p-1} \theta d\overset{12}{\eta}) \wedge d\theta \wedge d\sigma(\mathbb{S})$$

$$\text{と } (\int F d\theta) d\sigma(\eta) \in \text{Im } d_\eta \quad \text{と } 0$$

$$b) \omega = f d\overset{11}{\eta} \wedge d\overset{12}{Z} \quad \text{と可たす}$$

$$j^*\omega = f \omega^{p-1} \theta \sin^{p-2} \theta d\theta \wedge d\eta' \wedge \overset{3}{\Omega} \quad \text{--- A}$$

$$+ f \omega^{p-1} \theta \sin^{p-1} \theta \mathbb{S}_1 d\eta' \wedge d\sigma(\mathbb{S}) \quad \text{--- B}$$

$$+ f \omega^{p-2} \theta \sin^{p-1} \theta \mathbb{S}_1 d\theta \wedge \overset{2}{\psi} \wedge d\sigma(\mathbb{S}) \quad \text{--- C}$$

(Ω : $q-2$ form on $\mathbb{S}^{q-1}$. ψ : $p-2$ form on $\mathbb{S}^{p-1}$)

$$\text{と可たす. と } j^*d\omega = d j^*\omega$$

$$= d\mathbb{S} A + d\theta B + d_\eta C \quad \text{定義により}$$

$\int d\mathbb{S} A, \int d_\eta C$ は 0 である。また

$$\int d\theta B = \left[(f|_{\theta=\mathbb{S}} \omega^{p-1} \sin^{p-2} \theta \mathbb{S}_1) d\eta' \right] d\sigma(\mathbb{S}') \quad (q > 1)$$

中身が ω であるから $\int \omega = 0$ である。

$q=1$ の場合は直接示せる。

//

§2 ($\mathcal{O}$ の境界値としての 2-microfunctions

この節では、まず §1 の写像 σ の Čech cohomology による表現を与える。そして $\mathcal{O}$ の $\mathcal{O}$ 度数に関する曲面 Radon 分解について述べる。それをもとに、特異性の分解や Martineau 型の楔の刃定理などが示されるが、その際、cohomological Radon transformation との対応が与えられることにより議論が smooth となる。そして、これらの定理を用いて、 B_{Λ}^2 に対する基本的演算が直観的に定義され、2-特異スペクトルの評価も与えられる。また、積分も“原始的”に定義され、それが canonical であることも示される。最後にこれらの応用として、“théorème de Holmgren microlocal” (Kashiwara-Laurent [7]) の special case が直観的かつ素朴に示される。

2.1 Cohomological Radon transformation & Čech cohomology との対応

$$\begin{array}{ccc} \text{一般に } X_1 = \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q \times L & \xrightarrow{P} & \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q = X \\ \downarrow & & \uparrow \\ N_1 = \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q \times L & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q = N \end{array}$$

(L : smooth manifold)

$K^S \subset L$ は compact piecewise smooth oriented subset $P|_{S^1 \times K} \in P$ とかくとき.

$P_*(\mathcal{O}E^{(S)}|_{S^1 \times K}) \rightarrow \mathcal{O}$ なる morphism $\int_K$ が定義される. これは $P_*(\mathcal{O}E^{(S)}|_{S^1 \times K})$ の元をまず $\mathcal{O}$ 変数について局所化し, さらに fibre K 上で local に $\mathcal{O}E^{(S)}$ の元で代表される. そして, その代表元の, K の各 smooth piece (あるいは細分) への pull back の積を $\int_K$ と定義すれば, これは K の分割おなじみ $\mathcal{O}E^{(S)}$ の元を $\int_K$ により方に $\mathcal{O}$ に定まる. およ, この $\int_K$ に関して Stokes の定理が成立することは K の分割におよ $\mathcal{O}E$ の Stokes の定理に帰着されることより OK である.

さらに Z^r : complex manifold $K^S \subset Z$

($S: \text{real dim}$) とするに $COO_Z^{(S)} \rightarrow (OE_{Z_R}^{(S)})$
 に ± 1 $P_*(COO_Z^{(S)}|_{S^*X \times K}) \rightarrow (O)$ も定義され
 Poincaré の定理 ($K \subset \mathbb{C}^r$: real $r+1$ dim
 piecewise smooth oriented compact. $F \in P_*(COO|_{S^*X \times K})$
 かつ $\int_{2K} F dZ = 0$), 特に Cauchy の積分定理
 積分公式も成立する。

さて, B_Δ^2 の Čech cohomology による表現と
 Radon transform による表現との対応と与える。
 一般に, resolution による cohomology と Čech
 cohomology, あらう 2 の resolution による
 cohomology の間, a canonical 対応がある。Weil
 の補題により与えられる。

$U \subset \mathbb{A}^1 \times \mathbb{R}^p$: open proper convex $V \subset \mathbb{R}^q$ convex

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^{q-1} \mid |x| \in V, |y| < \varepsilon$$

$$y_3 - g(\sqrt{y^2 - (y_3)^2}) > 0 \}$$

$$\pi(D) = \{ z \mid |x| \in V, |y| < \varepsilon \} \subset \mathbb{R}^q$$

$$\text{とすると } \S 1 \text{ により } H^{i-1}(\Gamma(U \times D, (OE^{(i)})))$$

$$\simeq H^{i-1}(U \times \pi(D), (O)) \text{ であるからこの同型は}$$

次で与えられる。

$$\begin{array}{c}
 d_3 \downarrow \overline{\partial} \\
 \begin{array}{c}
 0 \rightarrow C^0(\sigma \times \pi(D)) \rightarrow C\mathcal{E}^{(0,0)}(\sigma \times \pi(D)) \rightarrow \dots \\
 \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\
 0 \rightarrow C^0\mathcal{E}^{(0)}(\sigma \times D) \rightarrow \dots
 \end{array}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c}
 \text{exact} \\
 \overbrace{\quad \quad \quad} \\
 \downarrow
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{exact} \left\{ \begin{array}{c}
 0 \rightarrow C^0\mathcal{E}^{(0)}(\sigma \times D) \rightarrow \dots \\
 \downarrow \\
 C^0\mathcal{E}^{(0,1)}(\sigma \times D) \rightarrow C\mathcal{E}^{(0,0)}\mathcal{E}^{(1,2)}(\sigma \times D) \rightarrow \dots \rightarrow C\mathcal{E}^{(0,1)}(\sigma \times \pi(D)) \rightarrow C\mathcal{E}^{(0,1)}(\sigma \times \pi(D)) \\
 \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\
 C\mathcal{E}^{(0,0)}\mathcal{E}^{(1,1)}(\sigma \times D) \rightarrow C\mathcal{E}^{(0,1)}\mathcal{E}^{(0)}(\sigma \times D)
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\varphi = \varphi_{i-1} \rightarrow \varphi_{i-1} = d_3 \varphi_{i-2} \rightarrow \varphi_{i-2} \rightarrow \dots \rightarrow \varphi_0 = \varphi_{-1}$$

For sequence $\{\varphi = \varphi_{i-1} \dots \varphi_{-1}\}$ is

$[\varphi] \mapsto [\varphi_{-1}]$ is well defined.

Let $\xi_1, \dots, \xi_q \in \mathbb{R}^q$ be a set of linearly independent unit vectors

such that $\xi_{j\pm} = \pm \xi_j$ is true.

$V_{j\pm} = \{z \in \pi(D); y_{j\pm} - g(\sqrt{y^2 - (y_{j\pm})^2}) > 0\}$

such that $\mathcal{U} = \{\sigma \times V_{j\pm}\}$ is a finite set

$\sigma \times \pi(D)$ is a Leray covering.

Let $H^{q-1}(\sigma \times \pi(D), C^0) \cong H^{q-1}(C^0(\mathcal{U}, C^0))$

is of the same type as follows:

$$\begin{array}{c}
 f \downarrow \overline{\partial} \\
 0 \rightarrow C^0(\sigma \times \pi(D)) \rightarrow C\mathcal{E}^{(0,0)}(\sigma \times \pi(D)) \rightarrow \dots \\
 \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\
 0 \rightarrow C^0(\mathcal{U}, C^0) \rightarrow C^0(\mathcal{U}, C\mathcal{E}^{(0,0)}) \rightarrow \dots
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c}
 \text{exact} \\
 \left\{ \begin{array}{c}
 \downarrow \\
 \downarrow
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\text{に於て } C^q(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \xleftarrow{\quad} C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{O} \otimes \mathcal{E}^{(0,0)}) \xleftarrow{\quad} \dots \xleftarrow{\quad} C^0(\mathcal{U}, \mathcal{E}^{(0, q-1)}) \xleftarrow{\quad} C^0(\mathcal{U}, \mathcal{E}^{(0, q)}) = \ker(C\mathcal{E}^{(0, q)}(\sigma \times \pi \mathcal{D})) \xrightarrow{\quad} C\mathcal{E}^{(0, q)}(\sigma \times \pi \mathcal{D})$$

$$\psi = \psi_{q-1} \xrightarrow{\quad} \psi_{q-1} = \delta \psi_{q-2} \xrightarrow{\quad} \psi_{q-2} \xrightarrow{\quad} \dots \xrightarrow{\quad} \psi_0 = \psi_{-1} \xleftarrow{\quad} \psi_{-1}$$

なる sequence $\{\psi = \psi_{q-1} \dots \psi_{-1}\}$ に於て

$[\psi_{-1}] \mapsto [\psi]$ と定義される。おてこの2つの morphism の合成に於て

$$h: H^{q-1}(\Gamma(\sigma \times \mathcal{D}, (\mathcal{O} \otimes \mathcal{E}^{(0, q)}))) \cong H^{q-1}(C(\mathcal{U}, \mathcal{O}))$$

なる同型が得られる。それは次で与えられる。

命題 2.1.1 $\Delta^k_x = \{(t_1, \dots, t_k) \mid 0 \leq t_j \leq 1, \sum t_j \leq 1\}$

を k 次元単体。 $\{e_1, \dots, e_{k+1}\}$ をその頂点とする。

写像 $[\sum_{j=1}^k z_j e_j, \dots, \sum_{j=k+1}^n z_j e_j]: \Delta^k \rightarrow \mathbb{S}^{q-1}$ ($j_1 < \dots < j_{k+1}, \sum e = \pm 1$)

を $[\dots](e_e) = e_e \sum_{j \in e} z_j$ を満たす "linear" な

map を、一般に φ を $\mathbb{S}^{q-1}$ 上の K -form とする。

$\int [\dots] \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Delta^k} [\dots]^* \varphi(t_1, \dots, t_k)$ と定義する。

なる $\varphi \in \Gamma(\sigma \times \mathcal{D}, (\mathcal{O} \otimes \mathcal{E}^{(0, q)}))$ に対し

$$h([\varphi]) = [\{\psi_{1, e_1}, \dots, \psi_{q, e_q}\}] \text{ とおく}$$

$$\psi_{1, e_1}, \dots, \psi_{q, e_q} = \int [\sum_{j=1}^q z_j e_j] \varphi$$

証明) $\{\psi = \psi_{q-1} \dots \psi_{-1}\}$ なる sequence を

ψ が与えられたとき, $\exists \psi_{q-2} \dots \psi_0, \psi_k \in ({}^k\mathcal{U}, C\mathcal{E}^{(0, \ell+2k)})$
 s.t. $\delta \psi_{q-2} = \psi, \bar{\partial} \psi_0 = \psi_{-1}, \delta \psi_k = \bar{\partial} \psi_{k+1}$
 とはいえない。 ψ_k と $\psi_k(j_1 \varepsilon_1 \dots j_{k+1} \varepsilon_{k+1}) = \int_{[-, -]} \psi_k$
 で定義する。 二つに

$$\begin{aligned} (\delta \psi_{k-1})(j_1 \varepsilon_1 \dots j_{k-1} \varepsilon_{k-1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} \int_{[j_1 \varepsilon_1, \dots, j_i \varepsilon_i, \dots]} \psi_{k-1} \\ &= \int_{[j_1 \varepsilon_1, \dots, j]} d_3 \psi_{k-1} \text{ (Stokes) } \end{aligned}$$

(上の定義では向きがハズレてしまっている。言い方なのでは。

厳密にはないが、符号のみの差なので無視する)

$$= \int_{[-, -]} \bar{\partial} \psi_k = \bar{\partial} \psi_k(j_1 \varepsilon_1 \dots) \text{ 両端でも OK}$$

あとこの ψ は確かに条件を満たす。 //

逆の対応は次の節で与えることとして、境界値作用素
 について述べておく。

$\tau: \widetilde{\Lambda} = (\widetilde{\Lambda} - \Lambda) \sqcup \mathbb{S}_\Lambda \widetilde{\Lambda} \rightarrow \widetilde{\Lambda}$ is real monoidal
 transform $j: \widetilde{\Lambda} - \Lambda \hookrightarrow \widetilde{\Lambda}$ とする。

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{A}}_\Lambda^2 &= j_* (C\mathcal{O}(\widetilde{\Lambda} - \Lambda) |_{\mathbb{S}_\Lambda \widetilde{\Lambda}}) \\ D_\Lambda \widetilde{\Lambda} &= \{ (p, \lambda, F^v, F^z) \in S_\Lambda \widetilde{\Lambda} \times S_\Lambda^* \widetilde{\Lambda}, \langle v, z \rangle \leq 0 \} \end{aligned}$$

$\begin{array}{ccc} & D_\Lambda \widetilde{\Lambda} & \\ \pi \swarrow & & \searrow \tau \\ S_\Lambda \widetilde{\Lambda} & & S_\Lambda^* \widetilde{\Lambda} \\ \tau \swarrow & & \searrow \pi \\ \Lambda & & \Lambda \end{array}$

とすると 次の exact sequence がある。

(Kashiwara-Laurent [7]) に述べられているが、 $C\mathcal{O}$ の

cohomology 消滅定理の証明が不十分と思われるので、
完全ではないと思われる。) .

$$0 \rightarrow \tilde{\alpha}^2 \xrightarrow{b} \tau^* B^2 \rightarrow \pi_* \tau^* C^2 \rightarrow 0$$

b が境界値作用素である。 b の Čech cohomology
による表現は素本□□ 金子□□ により改め
て与えられている。(いずれも、これが b の canonical
な定義と一致することは証明されている。しかし

素本□□ では単射性は示されている。)

今、 $\mathbb{R}^q$ の向きを ε へ定める。 $V \subset \mathbb{R}^q$: proper convex

V open $\subset \mathbb{R}^q$. Γ : proper convex cone. V^c : Stein 近傍

of V とし、 $\varphi \in \mathcal{O}(\sigma_X((\mathbb{R}^q \setminus V) \cap V^c))$

とし、 $\beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbb{R}^q$ とし、一次独立かつ、

$\beta_1, \dots, \beta_q \in \Gamma$ かつ $\beta_1, \dots, \beta_q$ の向きが
 $\mathbb{R}^q$ の正の向きであるとする。

$U = \text{前項の } U \cap (\sigma_X V^c)$ とおく。 $\varphi \in H^{q-1}(\mathcal{O}(U, (0)))$

における image $\Psi = \{\Psi_{i_1, \dots, i_{q-1}}\}$ は、

$\Psi_{i_1, \dots, i_{q-1}} = \varphi$ となる他 0 として与えられる。

そして $\Gamma(\sigma_X V, B_\Delta^2) = \left\{ \sum_{j=1}^N b_j(\varphi_j) ; \varphi_j \in \mathcal{O}((\sigma_X(V + i\Gamma_j)) \cap V^c) ; (\sigma_X(V + i\Gamma_j)) \cap V^c : \sigma_X V \perp a. \right.$

Γ_j 型の無限小楔 $\}$.

と書ける、 $\varphi_j \in (\mathcal{O}(\sigma_j \times (\tau_j + i\Gamma_j))^\circ)$ ($j=1,2$).

そこで $b(\varphi_1) + b(\varphi_2) = b(\varphi_1 + \varphi_2)$ ($\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$ or $\emptyset$)

$$\varphi_1 + \varphi_2 \in (\mathcal{O}((\sigma_1 \cap \sigma_2 \times (\tau_1 \cap \tau_2 + i\Gamma_1 \cap \Gamma_2))^\circ))$$

が成立する。

2.2 $\mathbb{C}^1$ の $\mathbb{C}$ -変数に関する曲面 Radon 分解

$\mathbb{C}^1$ ε , microfunction parameter ε に関する holomorphic function とする Katooka [8] 金子 [3] に従って $\mathbb{C}$ -変数に関する曲面 Radon 分解を与えた。内容は金子 [3] と全く同じ。ただし、極限論法が使用される点に多少注意を要する。

$\mathbb{C}^1$ 上の曲面 Radon 分解核 $W(z, \zeta)$ ($(z, \zeta) \in \mathbb{C}^1 \times N_\varepsilon$).

$N_\varepsilon = \{ \zeta \in \mathbb{C}^1, \zeta^2 = 1, |1 - \zeta| = |\operatorname{Im} \zeta| < \varepsilon \}$ と考える。

$$W(z, \zeta) = \frac{(9-1)!}{(-2\pi i)^9} \frac{(1-i\zeta)^{1-1} - (1+i\zeta)^{1-1} (z^2 - (\zeta\zeta)^2)}{\{z\zeta + i(z^2 - (\zeta\zeta)^2)\}^9}$$

$W(z, \zeta)$ の正則域は次の通りである。

1) $D_1 \subset \subset D_0$ (相対 compact) とするときは $\exists \varepsilon > 0$ s.t.

$$\forall z_0 \in \partial D_0 + iB_\varepsilon \quad (B_\varepsilon : \varepsilon\text{-ball}), W(z - z_0, \zeta)$$

は $(D_1 + iB_\varepsilon) \times N_\varepsilon$ で holomorphic

2) $\tilde{D} \subset \mathbb{C}^1$ が有界 $\Rightarrow \exists K > 0$. $W(z, \zeta)$ は

$$\{ (z, \zeta) \in \tilde{D} \times N_\varepsilon, f(y, \zeta) = y\zeta - (y^2 - y\zeta)^2 > K|y| \}$$

で holomorphic

命題 2.2.1 (Katoka [8], 金子 [3])

$\mathcal{U} \subset \mathbb{A}S^* \mathbb{R}^p$ open D_1, D_0 , ε は ± 2 近 ∞ なる ε である。

$D \supset D_0$, Γ : open convex cone in $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}$.

$f(p^*, z) \in \mathcal{O}(\mathcal{U} \times D_{\Gamma_{\varepsilon'}})$ ($D_{\Gamma_{\varepsilon'}} = D + i\Gamma \cap B_{\varepsilon'}$

; $\varepsilon' > \varepsilon$) である。 $= a \pm i$ $a \in \Gamma \cap B_{\varepsilon}$ である。

$$F(p^*, z, \beta) = \int_{D_0 + ia} f(p^*, w) \overline{W}(z-w, \beta) dw$$

$$\in \mathcal{O}(\tilde{E})$$

また $\tilde{E} \neq \emptyset$. $E = \bigcup_{y_0 \in B_{\varepsilon} \cap \Gamma} E_{y_0}$ ($E_{y_0} = \{(z, \beta) \in (D_1 + iB_{\varepsilon}) \times \mathcal{S}_\beta^{q-1}, f(y-y_0, \beta) > 0\}$) の近傍

にある, Δ^0 : proper convex $\subset \mathcal{S}^{q-1}$ である。

$F(p^*, z, \beta) \in \mathcal{O}(\mathcal{U} \times (k + i(\Gamma + \Delta)^0) \times \Delta^0)$ である。

また $F(p^*, z, \beta) \in \mathcal{O}(\mathcal{U} \times D_{\Gamma_{\varepsilon}} \times \mathcal{S}^{q-1})$ である。

$$\mathcal{U} \times D_{\Gamma_{\varepsilon}} \text{ 上 } \int_{\mathcal{S}^{q-1}} F(p^*, z, \beta) d\sigma(\beta) = f(p^*, z)$$

1) $\forall y_0 \in \Gamma \cap B_{\varepsilon}$ に対して, 積分路 γ_{y_0} である。

$\Gamma \cap D_0$ 上 $ia \rightarrow iy_0$, $m \in D_0$ 上 $w + iy_0$ である。

$$F_{y_0}(p^*, z, \beta) = \int_{\gamma_{y_0}} f(p^*, w) \overline{W}(z-w, \beta) dw \quad \text{である}$$

1), 2) に対して F_{y_0} は

$\mathcal{U} \times \tilde{E}_{y_0}$ ($\tilde{E}_{y_0} = \{(z, \beta) \in (D_1 + iB_{\varepsilon}) \times N_{\varepsilon}, f(y-y_0, \beta) > k|\eta|\}$)

上の $\mathcal{O} \cap \overline{W}$

ここで, $\gamma \in \mathbb{S}^1$ (i.e. $|\gamma|=1, \eta=0$) に対し $-f(\gamma, \gamma)$ は
 2a convex function 也

$$E_{\gamma_0} \cap E_{\gamma_1} = \bigcap_{0 \leq t \leq 1} E_{t\gamma_0 + (1-t)\gamma_1}$$

より, 実 1+次元の 経路 K_{γ_0, γ_1}

を 図 の 形 に 与え, $\forall (z, \gamma) \in E_{\gamma_0} \cap E_{\gamma_1}$,

$$\exists \forall \text{ open } C \subset \bigcap_{0 \leq t \leq 1} E_{t\gamma_0 + (1-t)\gamma_1} \text{ s.t.}$$

$\cup \times K_{\gamma_0, \gamma_1} \times \nabla$ 上 で integrand

が defined. 尤, K_{γ_0, γ_1} 上 で

Poincaré 定理 を 適用して

$$F_{\gamma_0} = F_{\gamma_1} \text{ on } \cup \times (E_{\gamma_0} \cap E_{\gamma_1})$$

より 第 1 の 主張 は OK

次に, F_{γ_0} について. γ が Δ° を 動くとき, F_{γ_0} は

$\cup \times (D_1 + i(\gamma_0 + \bigcap_{\gamma \in \Delta^\circ} \{f(\gamma, \gamma) > 0\})) \times \Delta^\circ$ で 定義され

ている. γ_0 を $\Gamma \cap B_\varepsilon$ で 動かすと

2 番目の 主張 が わかる.

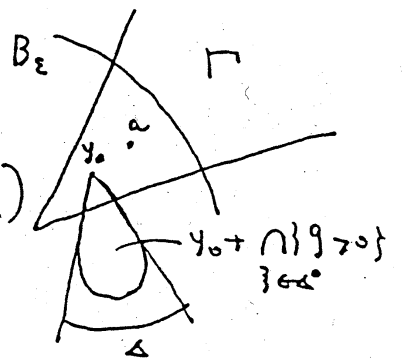
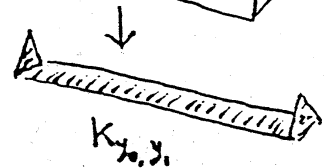
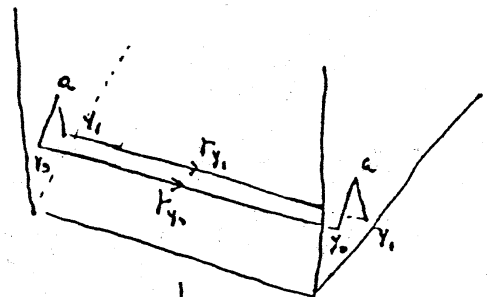
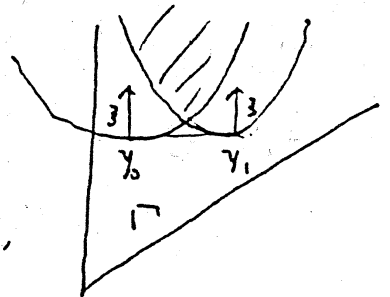
3 番目の 主張 については, 左辺 $\in \mathcal{O}(\cup \times D_1 \cap \Gamma_\varepsilon)$

は わかる ことから, $\cup \times D_1 \cap \Gamma_\varepsilon$ 上 local

に 左辺 が $f(p^*, z)$ と 等しいことを

言 えば いい.

$(p_0^*, z_0) = ((t_0, f(s, dt_0), z_0) \in \cup \times D_1 \cap \Gamma_\varepsilon$ を 与える.



とある。よ。

$$= \sum_{\sigma} \int_{\Gamma_{\sigma}} d\sigma(z) \int_{\Gamma_{\sigma}'} dw u(p^{\sigma}, w) \bar{W}(z-w, z) \dots (1)$$

$$+ \sum_{\sigma} \int_{\Gamma_{\sigma}} d\sigma(z) \int_{\Gamma_{\sigma}''} dw u(p^{\sigma}, w) \bar{W}(z-w, z) \dots (2)$$

$$(1) = \text{Sp} \left[\sum_{\sigma} \int_{\Gamma_{\sigma}} d\sigma(z) \int_{\Gamma_{\sigma}'} dw F(\tau, w) \bar{W}(z-w, z) \right]$$

これは通常の holomorphic function の Radon 分解 (2#)

$$= \text{Sp} [F(\tau, z)] \text{ on } U_0 \times (V_2 + iI_1)$$

$$\# \text{ (2)} = \int_{\Gamma_{\sigma}''} dw u(p^{\sigma}, w) \int_{\Gamma_{\sigma}'} d\sigma(z) \bar{W}(z-w, z) \sim$$

$$z-w \neq 0 \text{ として } \int_{\Gamma_{\sigma}'} \bar{W}(z-w, z) d\sigma(z) = 0 \quad \therefore (1) = 0$$

$\therefore U_0 \times (V_2 + iI_1) \pm \tau \cdot \text{ok}$ 判別局全体 $\tau \cdot \text{ok}$ 。 //

$$\Sigma 1. \quad \Delta \subset \subset \Gamma \text{ として } F(p^{\sigma}, z, \Delta^0) = \int_{\Delta \cap \Gamma_{\sigma}'} F(p^{\sigma}, z, z) d\sigma(z)$$

$\in \mathcal{O}(U \times (K + i\Delta 0))$ となる。

$u(p^{\sigma}, z) - F(p^{\sigma}, z, \Delta^0)$ は $U \times K \pm 2\text{-real analytic}$

$$\Sigma 2 \quad \tilde{\mathcal{A}}^2 \rightarrow \tau^{-1} \left(P \times \mathbb{Q}^{2-1} / d_3 P \times \mathbb{Q}^{4-1} \right) \simeq \tau^{-1} B^2$$

は上の # 号 $u(p^{\sigma}, z) \mapsto \left[\int_{\Gamma_{\sigma}'} u(p^{\sigma}, w) \bar{W}(z-w, z) dw d\sigma(z) \right]$

と与えられた。

系1は金子[3]と同じ。系2は命題中の
 互転公式と、前に与えた Radon transformation と
 Čech cohomology に対する 境界値作用素
 b の表現と 算み合わせればわかる。

命題 2.2.2 $F(p^*z) \in \mathcal{O}(\mathcal{U} \times (V + i\Gamma))_0$

に対し, $b(F) = b_{\Gamma}(F) = F(p^*x + i\Gamma_0) \in \mathcal{B}^2$

$$u = \sum b_{\Gamma_j}(F_j) \in \mathcal{B}^2(\mathcal{U} \times V)$$

に対し, $(p_0^*, x_0, \int_0^\infty dx_\infty) \notin S^2(u)$.

$$\Leftrightarrow F(z, \zeta) = \sum_j \int_{\mathcal{D}_0 + i\Gamma_j} F_j(p^*w) W(z-w, \zeta) dw \\ \in \mathcal{A}^2_{(p_0^*, x_0, \zeta_0)} \quad (a_j \in \Gamma_j + \frac{1}{2}\Gamma, \mathcal{D}_0 \subset \subset V)$$

$$\text{証明)} \Leftrightarrow u(p^*x) = \sigma(F(z, \zeta) d\sigma(\zeta))$$

で, $\text{COE}^{(1)}$ に対して de Rham の定理より

$$\exists w \in \text{COE}^{(1-2)}_{(p_0^*, x_0, \zeta_0)} \text{ s.t. } F d\sigma(\zeta) = dw$$

$$\text{よ} \text{て } \text{sp}(u) = \sigma(dw) = 0 \text{ at } (p_0^*, x_0, \int_0^\infty dx_\infty)$$

$$\Leftrightarrow G_j(p^*z, \zeta) = \int_{\mathcal{D}_0 + i\Gamma_j} F_j(p^*w) W(z-w, \zeta) dw$$

$$\text{よ} \text{て } F_j(p^*z) = \int_{\mathcal{S}^{1-1}} G_j(p^*z, \zeta) d\sigma(\zeta)$$

$$\text{on } \mathcal{U} \times (V_1 + i\Gamma_j)_0 \quad (V_1 \subset \subset V_0)$$

$$\text{よ} \text{て } F(z, \zeta) \equiv \sum_j \int_{\mathcal{D}_2 + i\Gamma_j} dw \left(\int_{\mathcal{S}^{1-1}} G_j d\sigma \right) W(z-w, \zeta) \\ (\text{mod } \mathcal{A}^2) \quad (V_2 \subset \subset V_1)$$

($\int_{\mathcal{S}^{1-1}} G_j d\sigma$ の定義域に合わせ $\mathcal{D}_j$ を修正し,

$V_0 \supset V_2$ に与えた。剰余が $V_3 \subset \subset V_2$ 上 $\mathcal{A}^2$ に存在

ことは明らかである。)

今 $(p_0^*, t_0, i_0^2 dx_0) \in S^2 u \neq \emptyset \exists w \in \mathcal{O}_S^{(1-2)}(\bar{D}_0 \times \bar{D})$

$$D = \{ |z - z_0| < \varepsilon, |z - z_0| < \varepsilon, 4|z - \sqrt{y^2 - y_0^2}| > 0 \}$$

$$s.t. \quad F d\sigma = dw$$

$\bar{V}_4 \subset \bar{V}_3$ なる小領域, $\bar{V}_4 \subset \{ |z - z_0| < \varepsilon \}$
 $\subset \bar{D}_0$. 二点に対応する積分区間, 水準 ε 小領域

$$F(z, z) \equiv \sum_{j, k \geq 1} \int_{\bar{V}_4 + i b_j'} dw \left(\int_{\Delta_k^0} G_j d\sigma \right) \bar{w} \\ + \sum_j \int_{\bar{V}_4 + i b_j'} dw \left(\int_{\Delta_0^0} G_j d\sigma \right) \bar{w}$$

$(\Delta_0^0 \subset \{ |z - z_0| < \varepsilon \}, \mathbb{S}^{q-1} \setminus \Delta_0^0 = \bigsqcup_{i=1}^N \Delta_i^0 \text{ 是 polygon 分解})$

$$\int_{\Delta_k^0} G_j \in \mathcal{O}(\bar{U} \times (\bar{V}_1 \times i(\bar{V}_j + \Delta_k)) \neq \emptyset)$$

$$b_j' \rightarrow c_k \in \Delta_k \text{ 変換する}. (\text{mod } a^2)$$

$$a_2 \equiv \sum_k \int_{\bar{V}_4 + i c_k} dw \bar{w} \int_{\Delta_k^0} F(z, z) d\sigma \\ + \int_{\bar{V}_4 + i c_0} dw \bar{w} \int_{\Delta_0^0} F d\sigma$$

$$k \geq 1 \text{ なら } \int_{\Delta_k^0} F d\sigma \in \mathcal{O}(\bar{U} \times (\bar{V}_1 \times i \Delta_k)) \neq \emptyset$$

$$c_k \notin \Delta_k^0 \neq \emptyset \int_{\bar{V}_4 + i c_k} \bar{w} dw \int_{\Delta_k^0} F d\sigma \in a^2$$

$$\notin \int_{\Delta_0^0} F d\sigma = \int_{\Delta_0^0} dw = \int_{\partial \Delta_0^0} w = \sum_x \int_{P_x^0} w$$

$$(\cup P_x^0 = \partial \Delta_0^0) \text{ なら } \int_{P_x^0} w \in \mathcal{O}(\bar{U}_0 \times (\{ |z - z_0| < \varepsilon \} + i B_{x,0}))$$

$$P_x^0 \notin \bar{D}_0 \text{ なら } \int_{\bar{V}_4 + i c_k} \bar{w} \int_{P_x^0} w \in a^2$$

$$\therefore \int_{\Delta_0^0} F d\sigma \neq 0 \quad //$$

これらを用いて金子[3] にある基本的な命題
(に相当するもの) を証明できる。これらに列挙する。
(証明は略)

定理 2.2.3 $f(p^*x) \in \mathcal{B}^2(U \times V)$; $U \subset \mathbb{R}^n$ $V \subset \mathbb{R}^m$
proper convex V open in $\mathbb{R}^m$ $V_0 \subset \subset V$ $U_0 \subset \subset U$
s.t. $S^2 f \subset U \times V \times \mathbb{R}^n + (\bigcup_{j=1}^N \Gamma_j^0) \times \infty$
とすると $\exists F_j \in C^0(U_0 \times (V_0 + i\Gamma_j)_0)$
s.t. $f = \sum b_{\Gamma_j}(F_j)$

定理 2.2.4 (Martineau 型の局所複素定理)

$f = \sum \phi_{\Gamma_j}(F_j) \in \mathcal{B}^2(U \times V)$
 $f = 0$ on $U \times V$ とすると $\exists \Delta_{jk} \subset \Gamma_j + \Gamma_k$ とすると
 $\exists H_{jk} \in C^0(U_0 \times (V_0 + i\Delta_{jk})_0)$ s.t.
 $H_{jk} = H_{kj}$ 且 $F_j = \sum_k H_{jk}$

2.3 B_{Λ}^2 に対する基本的演算とその応用

2.2 の定理 において hyperfunction の場合と同様に制限, 代入が定義でき, また, 2-hyperfunction と hyperfunction の積が定義できる。また, 積分が定義できる。これらの演算は Kashiwara-Laurent [17] で canonical (cohomological) に定義されているものであって, 二れらが一致するという保証はよく証明を要するところであるが, ここでは行わない。

1° 積

$$\begin{array}{ccc} \text{定理 2.3.1} & S_{\Lambda}^* \tilde{\Lambda} = \Gamma S^* \mathbb{R}^p \times \Gamma S^* \mathbb{R}^q & \xrightarrow{P} \Gamma S^* \mathbb{R}^q \\ & \downarrow & \downarrow \\ & \Lambda = \Gamma S^* \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q & \xrightarrow{P} \mathbb{R}^q \end{array}$$

$$u(p^*x) \in B^2(U \times V) \quad u(x) \in B(V)$$

$$u \in SS^2 u \cap p^{-1}((SSu)^c) = \emptyset$$

$\Rightarrow$ 積 $u(p^*x) \cup u(x) \in B^2(U \times V)$ が定義され

$$1) \operatorname{supp} u \cup \operatorname{supp} u \cap p^{-1}(\operatorname{supp} u)$$

$$2) SS^2 u \cup \{ (p^*x, (\lambda\beta + (1-\lambda)\eta) d\lambda\omega) ;$$

$$(p^*x, \beta d\lambda\omega) \in SS^2 u, (x, \eta d\lambda\omega) \in SSu \ 0 \leq \lambda \leq 1 \}$$

$$\cup SS^2 u \cup p^{-1}(SSu)$$

証明は hyperfunction の場合と同じである。すなわち
 定理 2.2.3 において local に singularity を分解し
 積を local に定義でき、定理 2.2.4 あるいは
 hyperfunction に対する局所複素の定理において
 local に unique に定義できていることがわかる。
 SS^2 の評価も同様にして得られる。

2° 制限, 代入

$f: N \rightarrow M$ real analytic manifold M の
 real analytic map φ に対して

$$\begin{array}{ccc} N \times_{\mathbb{H}} \sqrt{FS^*} M & \xrightarrow{\sqrt{FS^*} M} & \sqrt{FS^*} M \\ \downarrow \rho & & \downarrow \varphi \\ \sqrt{FS^*} N & & \sqrt{FS^*} M \end{array}$$

を canonical map とする。

定理 2.3.2.

1) f : embedding (制限)

map $\varphi: \sqrt{FS^*} \mathbb{R}^p \times \dots$ に拡張して

$$u \in \mathcal{B}_{\sqrt{FS^*} \mathbb{R}^p \times M}^2 \text{ が } SS^2 u \cap \sqrt{FS^*} \mathbb{R}^p \times \sqrt{FS^*} M = \emptyset$$

存在する $u|_{\sqrt{FS^*} \mathbb{R}^p \times N} \in \mathcal{B}_{\sqrt{FS^*} \mathbb{R}^p \times N}^2$ が定義できて

$$SS^2(u|_{\sqrt{FS^*} \mathbb{R}^p \times N}) \subset \rho^{-1}(SS^2 u)$$

$$= \rho(\sqrt{FS^*} \mathbb{R}^p \times_N \sqrt{FS^*} M \cap SS^2 u)$$

2) $f = \text{smooth}$ (代 λ)

$$f^* : f^{-1} B_{FS^* \mathbb{R}^p \times M}^2 \rightarrow B_{FS^* \mathbb{R}^p \times N}^2$$

存在代 λ が定義され.

$$SS^2(f^*u) = \rho \omega^{-1}(SS^2u)$$

これは hyperfunction の場合と同様である。

3° 積方

$$N_1 = \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^r \hookrightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q \times \overline{\mathbb{C}}^q \times \mathbb{C}^r \times \overline{\mathbb{C}}^r = X_1$$

$$p \downarrow$$

$$p \downarrow$$

$$N = \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q \hookrightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q \times \overline{\mathbb{C}}^q = X$$

$$(\mathbb{C}^q \simeq \mathbb{C}^q \times_{\mathbb{C}} \overline{\mathbb{C}}^q \hookrightarrow \mathbb{C}^q \times \overline{\mathbb{C}}^q = \mathbb{C}^q \text{ の複素化 etc.})$$

$$\tilde{\Lambda}_1 = \sqrt{FS^*} \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{p} \sqrt{FS^*} \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q = \tilde{\Lambda}$$

つまり $\tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}$ 上には次の exact sequence

(flabby resolution) が存在する。

$$0 \rightarrow COO^{(r)} \rightarrow C_{N_1}^{(0,0)(r)}|_{\tilde{\Lambda}_1} \rightarrow \dots \rightarrow C_{N_1}^{(0,q+r)(r)}|_{\tilde{\Lambda}_1} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow CO \rightarrow C_N^{(0,0)}|_{\tilde{\Lambda}} \rightarrow \dots \rightarrow C_N^{(0,q)}|_{\tilde{\Lambda}} \rightarrow 0$$

$$\text{つまり } COO^{(r)} = COO \otimes \Omega_{\mathbb{C}^r}^r \quad (\Omega_{\mathbb{C}^r}^r: r\text{-次正則型式})$$

$$C_{N_1}^{(0,k)(r)} = C_{N_1} \otimes \Omega_{\mathbb{C}^r}^r \otimes \Omega_{\mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^r}^{(0,k)} \quad (\Omega_{\mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^r}^{(0,k)}: k\text{-次反正則型式})$$

今 $Z \subset \tilde{\Delta}_1$ closed かつ $p|_Z$ propre

$p(Z) \subset G$ closed. $n \in \tilde{\Delta}$ かつ $z \in$

$$\Gamma_Z(\tilde{\Delta}_1, C_{N_1}^{(0, k+r), (0)}|_{\tilde{\Delta}_1}) \xrightarrow{\int_{\mathcal{C}^+}} \Gamma_G(\tilde{\Delta}, C_N^{(0, k)}|_{\tilde{\Delta}})$$

$$\sum_{k+|p|=k+r} u_{\alpha\beta} (p^* z, \omega) d\bar{z}^\alpha \wedge d\bar{\tau}^\beta \wedge d\tau \mapsto \sum_{\substack{|a|=k \\ |p|=r}} \int_{\mathcal{C}^+} u(p^* z, \omega) d\bar{\tau}^\alpha d\tau \times d\bar{z}^\alpha$$

で $\int_{\mathcal{C}^+}$ が定義され 収束可換にす。

$$\begin{array}{ccc} \cdots & \longrightarrow & \Gamma_Z(\tilde{\Delta}_1, C_{N_1}^{(0, k+r), (0)}|_{\tilde{\Delta}_1}) \longrightarrow \cdots \\ & \searrow & \downarrow \quad \quad \quad \nearrow \\ & & \Gamma_G(\tilde{\Delta}, C_N^{(0, k)}|_{\tilde{\Delta}}) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

$$\text{よって } H_Z^{k+r}(\tilde{\Delta}_1, C_{N_1}^{(0, k+r), (0)}|_{\tilde{\Delta}_1}) \rightarrow H_G^k(\tilde{\Delta}, C_N^{(0, k)}|_{\tilde{\Delta}})$$

f_1 morphism が induce する。これに B^2 の積分を定義する。

$$\Delta_1 = \sqrt{A} S^* \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^r \xrightarrow{p} \sqrt{A} S^* \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \Delta$$

$$Z \subset U \times V \times W \quad (U \subset \sqrt{A} S^* \mathbb{R}^p, V \subset \mathbb{R}^i, W \subset \mathbb{R}^r: \text{opens})$$

$p|_Z$ propre $p(Z) \subset G \subset U \times V$ かつ $z \in$

$$\Gamma_Z(U \times V \times W, B_{\Delta_1}^2 \otimes U_{\mathbb{R}^r}) \quad (U_{\mathbb{R}^r}: \text{体積分要素})$$

$$= H_Z^{q+r}(U \times V \times W, C_{N_1}^{(0, q+r), (0)}|_{\tilde{\Delta}_1})$$

$$\xrightarrow{\int_{\mathcal{C}^+}} H_G^q(U \times V, C_N^{(0, q)}|_{\tilde{\Delta}}) = \Gamma_G(U \times V, B_{\Delta}^2)$$

これにおよ 積分を定義する。

$$Z = U \times V \times K_1 \times \cdots \times K_r \quad K_j \subset \mathbb{R} \text{ compact}$$

$W = \mathbb{R}^2$ $W^c = \mathbb{C}^r$ とする。すこし定義により

$u \in \Gamma_{\mathbb{Z}}(\sigma \times \tau \times W, B^2)$ に対し $\int_{\mathbb{C}^r} u$
 $= \int_{\mathbb{C}^r} \dots \int_{\mathbb{C}^r} u$ が定義される。あと以下で
 $r=1$ の場合を調べる。

$$\begin{array}{ccc} Z = \sigma \times \tau \times K \hookrightarrow \sigma \times \tau^c \times \mathbb{C} = Y, & \tilde{Z} = \sigma \times \tau^c \times K \\ \downarrow P & & \downarrow \end{array}$$

$$G = \sigma \times \tau \hookrightarrow \sigma \times \tau^c = Y$$

$u = \{\sigma_i\}_{i \in I}$, $u' = \{\sigma_i\}_{i \in I_0} \subset u$ と

$(Y, Y-G)$ の open covering を $\tilde{u} = \{\tilde{\sigma}_\alpha\}, \tilde{\sigma}_\alpha\}_{\alpha \in I}$

$\tilde{u}' = \{\tilde{\sigma}_\alpha\}_{\alpha \in I_0} \cup \{\tilde{\sigma}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ とし $\tilde{\sigma}_\alpha = P^{-1}(\sigma_i)$

$\tilde{\sigma}_\alpha = P^{-1}(\sigma_i) - \tilde{Z}$ とする。 $(\tilde{u}, \tilde{u}')$ は $(Y, Y-G)$

の open covering。これは Weil の補題による

canonical map

$$c : H^{q+1}(C(\tilde{u}, \tilde{u}', (0, \infty))) \rightarrow H^{q+1}(\Gamma_{\mathbb{Z}}(Y, (N_1 | \tilde{\Delta}_1)))$$

$$c : H^q(C(u, u', (0))) \rightarrow H^q(\Gamma_G(Y, (N^{(0, \infty)} | \tilde{\Delta}))$$

がある。これに対し次の命題がある。

命題 2.3.3 (c.f. Kashiwara-Kawai [4])

$\varphi \in Z^{q+1}(\tilde{u}, \tilde{u}', (0, \infty))$ に対し $\int c\varphi = c\varphi$

が成り立つ。

$$\psi_{i_0 \dots i_q} = \sum_{r=0}^q (-1)^{r+1} \int_1 \varphi_{a(i_0)} \dots a(i_r) h(i_r) \dots h(i_q)$$

(r : $K \Sigma$ における cycle)

証明) Weila 補題より $\exists \{\varphi_{q+1} = \varphi, \varphi_q, \dots, \varphi_0, u\}$
 $\varphi_k \in C^k(\tilde{u}, \tilde{u}', C_{u, \dots, u}^{(u, q-k)(u)} |_{\tilde{\Delta}_1}) \quad u \in \Gamma_{\Sigma}(\gamma_1, C_{u, \dots, u}^{(q, q)(u)} |_{\tilde{\Delta}_1})$
 $s.t. \quad \delta \varphi_k = \bar{\partial} \varphi_{k+1} \quad \delta \varphi_0 = \varphi. \quad \bar{\partial} \varphi_0 = u$
 これより $\varphi_k \in C^k(u, u', C_{u, \dots, u}^{(u, q-k)(u)} |_{\tilde{\Delta}})$ と取れる
 に定義する.

まず $\tilde{u} = \{\nabla_{a(i)}, \bar{\nabla}_{u(i)}\}_{i \in I} \quad \nabla_{a(i)} = \nabla_{u(i)} = \nabla_{a(i)}$
 $\tilde{u}' = \{\nabla_{a(i)}\}_{i \in I_0} \cup \{\bar{\nabla}_{u(i)}\}_{i \in I} \quad \subset \subset \forall \varphi_k \in \tilde{\varphi}_k \in C^k(\tilde{u}, \tilde{u}', C_{u, \dots, u}^{(u, q-k)(u)} |_{\tilde{\Delta}_1})$
 の $\tilde{\Delta}$ に拡張する. ("穴"をうめる) $\subset \subset$

$$\psi_{k i_0 \dots i_k} = \sum_{r=0}^k (-1)^{r+1} \int_D \{\delta \tilde{\varphi}_k - \bar{\partial} \tilde{\varphi}_{k+1}\} a(i_0) \dots a(i_r) h(i_r) \dots h(i_k)$$

($k=0 \dots q-1, D \supset K \quad K = \partial D$) $\subset \subset \subset$

これは K の外で integrand が 0 であり well defined

claim $\delta \varphi_k = \bar{\partial} \varphi_{k+1} \quad (k=0 \dots q-2)$

$$\bar{\partial} \varphi_0 = \int u \quad \delta \varphi_{q-1} = \varphi$$

$\bar{\partial} = \bar{\partial}_\Sigma + \bar{\partial}_\tau$ なる分解に依り, $u \in C_{u, \dots, u}^{(u, q)(u)} |_{\tilde{\Delta}_1}$

に対し $v = v^\tau + v^\Sigma \quad v^\tau := d\tau$ 近く, $v^\Sigma := \bar{\partial}_\Sigma$ 近く

と書くことにする. と定義により $\int_D u = \int_D v^\tau$

$\subset \subset$

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_2 \psi_{0,0} &= -\bar{\partial}_2 \int_D \delta \tilde{\varphi}_0 - \bar{\partial}_2 \tilde{\varphi}_1 \uparrow a(i\omega) d(i\omega) \\ &= -\bar{\partial}_2 \int_D \{ (\delta \tilde{\varphi}_0)^T_{a(i\omega) d(i\omega)} - (\bar{\partial}_2 \tilde{\varphi}_1^T_{a(i\omega) d(i\omega)} + \bar{\partial}_2 \tilde{\varphi}_1^Z_{a(i\omega) d(i\omega)}) \} \\ &= -\int_D \{ \bar{\partial}_2 (\delta \tilde{\varphi}_0)^T_{a(i\omega) d(i\omega)} - \bar{\partial}_2 ((\delta \tilde{\varphi}_0)^Z_{a(i\omega) d(i\omega)} - \bar{\partial}_2 \tilde{\varphi}_1^Z_{a(i\omega) d(i\omega)}) \}\end{aligned}$$

$$\text{つまり } \bar{\partial}_2 \tilde{\varphi}_1^Z_{a(i\omega) d(i\omega)} = (\bar{\partial}_2 \tilde{\varphi}_1^Z_{a(i\omega) d(i\omega)})^Z \text{ に対し}$$

$$k \text{ の外に } (\delta \tilde{\varphi}_0)^Z_{a(i\omega) d(i\omega)} = \bar{\partial}_2 \tilde{\varphi}_1^Z_{a(i\omega) d(i\omega)} \text{ に対し}$$

$$\text{Stokes の定理より} = -\int_D \bar{\partial}_2 (\delta \tilde{\varphi}_0)_{a(i\omega) d(i\omega)}$$

$$\text{つまり } (\delta \tilde{\varphi}_0)_{a(i\omega) d(i\omega)} = \tilde{\varphi}_{0, d(i\omega)} - \tilde{\varphi}_{0, a(i\omega)} = -\varphi_{0, a(i\omega)}$$

$$(\tilde{\varphi}_{0, d(i\omega)} = 0, \nabla a(i\omega) = 0_{a(i\omega)})$$

$$\therefore \bar{\partial}_2 \psi_{0,0} = \int_D \bar{\partial}_2 \varphi_{0, a(i\omega)} = \int_D u$$

同様にして $q-1 \leq k \leq 1$ のとき

$$\bar{\partial}_2 \psi_{k,0,\dots,0} = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \int_D \bar{\partial}_2 (\delta \tilde{\varphi}_k)_{a(i\omega) \dots a(i\omega) d(i\omega) \dots}$$

がわかる。

または $\delta \psi_{k-1}$ であるが、長い単純な計算により

$$(\delta \psi_{k-1})_{i_1 \dots i_k} = \int_D \bar{\partial}_2 \left\{ \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} (\delta \tilde{\varphi}_k)_{a(i_1) \dots a(i_r) d(i_{r+1}) \dots} \right\}$$

がわかる。すなわち $1 \leq k \leq q-1$ の claim は OK。

また $k=q$ のとき

$$(\delta \psi_{q-1})_{i_0 \dots i_{q-1}} = \int_D \bar{\partial}_2 \sum_{r=0}^{q-1} \binom{q-1}{r} (\delta \tilde{\varphi}_q)_{a(i_0) \dots a(i_r) d(i_{r+1}) \dots}$$

$$= \int_{\partial D} \sum_{r=0}^{q-1} \binom{q-1}{r} (\delta \tilde{\varphi}_q)_{a(i_0) \dots a(i_r) d(i_{r+1}) \dots}$$

$$= \int_{\partial D} \sum_{r=0}^{q-1} \binom{q-1}{r} \varphi_{a(i_0) \dots a(i_r) d(i_{r+1}) \dots}$$

$$(\because \partial D \text{ 上では } \delta \tilde{\varphi}_q = \delta \varphi_q = \varphi)$$

//

2nd claim is $C\psi = \int u \varepsilon \bar{\psi} u$. //

次に 柏原-河合-木村 [6] に従って "原始的" の
積の定義を行う。これら 2つの定義が一致
することを示す。

補題 2.3.4 $U \subset \mathbb{A}^1 S^* \mathbb{R}^p$ open proper convex $D \subset \mathbb{C}^q$

convex $\pi: \mathbb{A}^1 S^* \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^q \rightarrow \mathbb{A}^1 S^* \mathbb{R}^p \times \mathbb{C}^{q-1}$
(z_1, z')

とすると

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{z'}(\pi^{-1}(U \times \pi(D))) \hookrightarrow \mathcal{O}(\pi \times D) \xrightarrow{D_{z'}} \mathcal{O}(\pi \times D) \rightarrow 0$$

is exact

$$\text{証明) } 0 \rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{O}_{z'}) \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{D_{z'}} \mathcal{O} \rightarrow 0 \quad (*)$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{z'}(\pi^{-1}(U \times \pi(D))) \rightarrow \mathcal{O}(\pi \times D) \rightarrow \mathcal{O}(\pi \times D) \rightarrow H^1(\pi \times D, \pi^{-1}(\mathcal{O}_{z'}))$$

$$\text{is exact, } 0 \rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{O}_{z'}) \rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{E}_{z'}^{(0,0)} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{E}_{z'}^j)$$

resolution に對し, §1 の定理 1.1.5 より

$$H^k(\pi \times D, \pi^{-1}(\mathcal{E}_{z'}^{(0,0)})) = 0 \quad (k \geq 1) \quad \text{よって}$$

$$H^j(\pi \times D, \pi^{-1}(\mathcal{O}_{z'})) \simeq H^j(\Gamma(\pi \times D, \pi^{-1}(\mathcal{E}_{z'}^{(0,0)})))$$

$$= H^j(\Gamma(\pi \times \pi(D), (\mathcal{E}_{z'}^{(0,0)}))) = H^j(\pi \times \pi(D), \mathcal{O}_{z'}) = 0$$

$$(j \geq 1) \quad \text{よって 主張は OK}$$

//

Ex 1) $\sigma \subset \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^p$ open proper convex $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ open

$$\Rightarrow D_{x_1} B^2(\sigma \times \Omega) = B^2(\sigma \times \Omega)$$

2) $\Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{s-1}$ $\Omega_1 = (a, b)$ $\Omega_2 = \text{open}$

$u \in B^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ $\Leftarrow D_{x_1} u = 0 \Rightarrow \exists ! v \in B^2(\Omega_2)$

$$u(p^*, x) = v(p^*, x')$$

By B^2 of flabbiness 1) $\Omega = \mathbb{R}^s$ $\Leftarrow \Leftarrow$

$$u \in B^2(\sigma \times \mathbb{R}^s) \Leftarrow \exists \text{ } u = \sum \phi_j(\psi_j)$$

$\psi_j \in C^0(\sigma \times (\mathbb{R}^s + i\Gamma_j))$ Γ_j : open convex cone

と可なり。補題より $\psi_j = D_{x_1} \exists \psi_j$ の domain

$$\Leftarrow u = D_{x_1} \sum \phi_j(\psi_j). \quad //$$

2) 上と同様に考えれば、また、

$$0 \rightarrow P^{-1} B_{\Lambda'}^2 \hookrightarrow B_{\Lambda}^2 \xrightarrow{D_{x_1}} B_{\Lambda}^2 \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

が成り立つ。

//

定義 $u(p^*, x, t) \in \prod_{\sigma \times \mathbb{R} \times K} (\sigma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, B^2)$

$K = [a, b] \subset \mathbb{R}$ $\Leftarrow$ p^* により localize $\Leftarrow$

$u(p^*, x, t) = D_{x_1} v(p^*, x, t)$ 存在 u が存在する。

$\sigma \times \mathbb{R} \times (-\infty, a)$ 上で $D_{x_1} u = 0$ あり $u = u_1(p^*, x)$

同様に $\sigma \times \mathbb{R} \times (b, \infty)$ 上で $u = u_2(p^*, x)$ と可なり。

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n \int_{\mathbb{R}} u dt = U_2(p^*, x) - U_1(p^*, x)$ と定義する。これが well defined であることは上の補題の系よりわかる。多変数の場合は反復積分で定義できる。

命題 2.3.5 上の2つの定義は一致する。(符号は不定)

証明) fibre の次元が 1 であることは 1.1.2.11 の系より十分。

$U \subset TS^*\mathbb{R}^n$ open proper convex $V \subset \mathbb{R}^n$ open convex

$V^{\mathbb{C}} = V + i\mathbb{R}^n$ $K = [a, b] \subset [a_1, b_1] \subset \mathbb{R}$

$(U \times V^{\mathbb{C}}, U \times (V^{\mathbb{C}} - V))$ の open covering $(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \in$

$\mathcal{U} = \{\bar{W}_0, \bar{W}_{1\pm}, \dots, \bar{W}_{q\pm}\} : \bar{W}_0 = U \times V^{\mathbb{C}}.$

$\bar{W}_{j\pm} = U \times (V + i\{\pm\gamma_j > 0\})$

$\mathcal{U}' = \{\bar{W}_{1\pm}, \dots, \bar{W}_{q\pm}\}$ と定める。これは $\mathcal{U}$ を induce する

かつ $(U \times V^{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}, U \times V^{\mathbb{C}} \times \mathbb{C} - U \times V \times K)$ の covering

$(\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{\mathcal{U}}')$ は

$\tilde{\mathcal{U}} = \{\bar{U}_{a(0)}, \bar{U}_{a(1\pm)}, \dots, \bar{U}_{a(q\pm)}\} \cup \{\bar{U}_{b(0)}, \dots, \bar{U}_{b(q\pm)}\}$

$\tilde{\mathcal{U}}' = \tilde{\mathcal{U}} - \{\bar{U}_{a(0)}\}$ ($\bar{U}_{a(0)} = p^{-1}\bar{W}_0$, $\bar{U}_{b(i\pm)} = \bar{U}_{a(i\pm)} - U \times V \times K$)

かつ $(U \times V^{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}, U \times V \times \mathbb{R})$ の covering $(\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{\mathcal{U}}')$

$\in$

$$\tilde{u} = \{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_{1\pm} \dots \tilde{\sigma}_{q_H \pm}\} \quad \tilde{u}' = \tilde{u} - \{\tilde{\sigma}_0\}$$

$$(\tilde{\sigma}_0 = \sigma_{a(w)} \dots \tilde{\sigma}_{q_{\pm}} = \sigma_{a(q_{\pm})} \quad \tilde{\sigma}_{q_H \pm} = W_0 \times \{\pm \operatorname{Im} \tau > 0\})$$

とす。 \$\tilde{\sigma}_0 = \sigma_{a(w)}\$ は \$\tilde{\sigma}_{q_H \pm}\$ heray covering \$\tilde{u}\$ あり

$$\tilde{\sigma}_0 = \sigma_{a(w)} \quad (\cdot \neq q_H \pm) \quad \tilde{\sigma}_{q_H \pm} \subset \sigma_{a(w)} \quad \neq 1)$$

$$\text{次は可換} \quad : \quad 0 \rightarrow H_{\sigma \times \tau \times k}^{q+1}(\sigma \times \tau \times \mathbb{C}(\infty)) \rightarrow H_{\sigma \times \tau \times \mathbb{R}}^{q+1}(\sigma \times \tau \times \mathbb{C}(\infty))$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow c & & \uparrow c \\ H^{q+1}(C(\tilde{u}, \tilde{u}'(\infty))) & \rightarrow & H^{q+1}(C(\tilde{u}, \tilde{u}'(\infty))) \\ [\varphi] & \mapsto & [h \varphi] \end{array}$$

$$\text{左に } L(h\varphi)_{0,1\varepsilon_1 \dots q_H \varepsilon_{q+1}} = \varphi_{a(w)} \dots a(q, \varepsilon q) \ell(w) | \varepsilon_{q_H} \operatorname{Im} \tau > 0$$

ある \$u = [h\varphi]\$ の境界値表示は.

$$\sum_{\varepsilon=(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{q+1})} \operatorname{sgn} \varepsilon \, b(\varphi_{a(w)} \dots a(q, \varepsilon q) \ell(w) | \varepsilon_{q_H} \operatorname{Im} \tau > 0)$$

$$\text{今 } \tilde{\varphi}_{0,1\varepsilon_1 \dots q_H \varepsilon_{q+1}} = \int_{a_1}^{\tau} \varphi_{a(w)} \dots \ell(w) d\tau \quad (\text{積分路は } \varepsilon_{q_H} \operatorname{Im} \tau > 0 \text{ 上})$$

とす: well defined) \$\varepsilon \neq 1\$ かつ \$D_{\tau} \tilde{\varphi} = \varphi\$ あり

$$u = D_{\pm} \sum_{\varepsilon} \operatorname{sgn} \varepsilon \, b(\tilde{\varphi}_{0,1\varepsilon_1 \dots q_H \varepsilon_{q+1}}) = D_{\pm} u$$

$$\text{二重 } \operatorname{Im} \tau < a \text{ 上 } \tilde{\varphi}_{0,1\varepsilon_1 \dots q_H \varepsilon_q} = \int_{a_1}^{\tau} \varphi_{a(w)} \dots \ell(w) d\tau$$

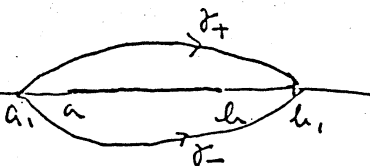
$$\text{は well defined } \tilde{\varphi}_{0,1\varepsilon_1 \dots q_H \varepsilon_q} |_{\varepsilon_{q_H} \operatorname{Im} \tau > 0} = \tilde{\varphi}_{0,1\varepsilon_1 \dots q_H \varepsilon_{q+1}}$$

$$\neq 1) \quad v = 0 \text{ on } \sigma \times \tau \times (-\infty, a).$$

また \$\operatorname{Im} \tau > a\$ 上

$$\tilde{\varphi}_{0,1\varepsilon_1 \dots q_H \varepsilon_q} = \int_{a_1}^{\tau} \varphi_{a(w)} \dots \ell(w) d\tau \quad \text{well defined.}$$

$$\tilde{\varphi}_{0,0,1\varepsilon_1 \dots q_H \varepsilon_{q+1}} = \int_{\tau_{\pm}} \varphi_{a(w)} \pm \tilde{\varphi}_{0,1\varepsilon_1 \dots q_H \varepsilon_q} \quad \neq 1)$$



$$U = \sum_{\varepsilon=(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l)} sgn \varepsilon b \left(\int_{\gamma} \varphi_{a(\varepsilon_1)} \dots a(\varepsilon_l) \right) \text{ on } U \times V \times (l, \infty)$$

あるいは第2の定義では

$$\int u = \sum_{\varepsilon} sgn \varepsilon b \left(\int_{\gamma} \varphi_{a(\varepsilon)} \dots a(\varepsilon_l) \right) \quad (*)$$

一方最初の定義によれば

$$\int u = \sum_{\varepsilon=(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l)} sgn \varepsilon b \left(\sum_{k=0}^q (-1)^{k+1} \int_{\gamma} \varphi_{a(\varepsilon)} \dots a(\varepsilon_l) \omega(\varepsilon_k) \dots \right)$$

$= \int \varphi$ が cycle なら

$$0 = (\delta \varphi)_{a(\varepsilon)} \dots a(\varepsilon_l) \omega(\varepsilon_1) \dots \omega(\varepsilon_l) \quad \text{あるいは}$$

$$\varphi_{a(\varepsilon)} \dots a(\varepsilon_l) \omega(\varepsilon) = \varphi_{a(\varepsilon)} \dots a(\varepsilon_l) \omega(\varepsilon_1)$$

$$+ (-1)^q \sum_{k=1}^l (-1)^k \varphi_{a(\varepsilon)} \dots a(\varepsilon_{k-1}) \omega(\varepsilon_k) \dots a(\varepsilon_l) \omega(\varepsilon_k) \dots$$

$$\therefore (*) = \sum sgn \varepsilon b \left(\int_{\gamma} \varphi_{a(\varepsilon)} \dots a(\varepsilon_l) \omega(\varepsilon_1) \right)$$

$$+ \sum sgn \varepsilon b \left(\int_{\gamma} \varphi_{a(\varepsilon)} \dots a(\varepsilon_{l-1}) \omega(\varepsilon_l) \right)$$

$$\text{以下 inductive に } = (-1)^{q+1} \sum sgn \varepsilon b \left(\sum_{k=0}^q (-1)^{k+1} \int_{\gamma} \varphi_{a(\varepsilon)} \dots a(\varepsilon_l) \omega(\varepsilon_k) \dots \right)$$

$$\int_{\gamma} \varphi_{a(\varepsilon)} \dots a(\varepsilon_l) \omega(\varepsilon_1) \dots \omega(\varepsilon_l) \quad \text{が正しい。}$$

(番号が異なるものを、その $\pm$ で γ の向きを調べる) //

以上で第2の定義が正当化された。すなわち第2の定義が座標不変であることを示した。

次に $SS^2 \int u$ の評価を与える。

命题 2.3.6 $\mathcal{U}(P^1, x, \Delta) \in \Gamma_{\text{or}, \text{or}, k}(\text{or} \times \text{or} \times \mathbb{R}^n, B^2)$

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{C} \cap SS^2 \int_{\mathbb{R}^n} u \in P(SS^2 \cap (AS^* \mathbb{R}^p \times AS^* \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^r)).$$

証明) $r=1$ について次をいふは十分

claim $Sp \mathcal{U}(P^*, x, t) = 0$ on $\{(P^*, x, t); F(3dx + 0dt) \approx 0\}$

$$p_1^* \in U_0, x \in U_0, x \in \mathbb{R}, z \in W_0 \} \Rightarrow \text{sp} \int u = 0$$

on $\overline{U_0} \times \overline{V_0} \times \overline{W_0}$.

証明) 2) an exact sequence $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$:

$$0 \rightarrow \sigma^{-1} C_{\Lambda'}^2 \hookrightarrow C_{\Lambda}^2|_L \xrightarrow{D_{\pm}} C_{\Lambda}^2|_L \rightarrow 0$$

$$(\sigma: L \rightarrow \Lambda' = \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^p \times \sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^q)$$

$$2') \quad 0 \rightarrow C_{\Lambda'}^2(\mathcal{U}_0 \times \mathcal{V}_0 \times \sqrt{W_0}) \rightarrow C_{\Lambda}^2(\mathcal{U}_0 \times \mathcal{V}_0 \times \mathbb{R} \times \sqrt{W_0}) \xrightarrow{P^*}$$

$$\frac{1}{2} \mathbb{Z} \quad u = D_{\pm} u \quad a \mapsto \bigcup_0 \times \bigcup_0 \times \mathbb{R} \times \sqrt{H} W_0 \perp$$

$$0 = \text{Sp}(u) = D_x \text{Sp}(u) \quad \text{z.B.} \quad \text{Sp}(u) = \omega(p^*, x)$$

on $\sigma_0 \times \tau_0 \times \mathbb{R} \times \sqrt{1} w_0$ $\frac{1}{2}, 2$

$$\text{sp} \int u = \text{sp} (v_2 - v_1) = \omega - \omega = 0 \quad //$$

4° その他

$$\int u(p^\pm, x, t) \delta(t-y) dt = u(p^\pm, x, y) \quad \text{etc.}$$

ために、次の補題を準備する。

補題 2.3.7. $u(p^*, x, t) \in \mathcal{B}^2(U^p \times V^q \times W^r)$

$S \cdot S^2 u \cap \{ (p^*, x, t), H(odx + \delta^{r-1} dt) = 0 \}$;

$\{ (p^*, x, t) \in U \times V \times W \} = \emptyset$ とする。このとき

$u(p^*, x, 0) = u(p^*, x, t)|_{t=0}$, $u(p^*, x, t) \delta(t)$

が定義されるが、実は

$$u(p^*, x, t) \delta(t) = u(p^*, x, 0) \delta(t)$$

証明) (p^*, x) により localize し、また t は 0 の

相対 compact 近傍を動くとしてもよい。このとき

$$\exists F_j \in \mathcal{C}^0(U_0 \times (V_0 \times D + i(\Gamma_j \cap B_\varepsilon)))$$

$$\text{s.t. } \Gamma_j^\circ \cap \{0\} \times \mathbb{R}^{r-1} = \emptyset \quad u = \sum b_{\Gamma_j}(F_j)$$

$$\text{on } U_0 \times V_0 \times D$$

$$= \text{v} \quad 0 \rightarrow \mathcal{C}^0 \xrightarrow{\tau} \mathcal{C}^0 \xrightarrow{t \mapsto 0} \mathcal{C}^0 \rightarrow 0$$

なる exact sequence を反復適用して

$$F_j = F_j(p^*, x, 0) + \sum \tau_k F_{jk}(p^*, x, \tau)$$

とかけよう。おこ。

$$u = \sum b(F_j(p^*, x, 0)) + \sum u_k \tau_k$$

$S S^2 u_k$ も u と同じ条件を満たすから

$u_k \cdot \delta(t)$ は well defined かつ τ_k は real analytic

$$\text{より } (u_k \tau_k) \delta(t) = u_k (\tau_k \delta(t)) = 0$$

$$\therefore u \delta(x) = u(x_0) \delta(x) \quad //$$

$$\begin{aligned} & \text{これに代わって } u(p^*, x, t) \delta(t-y) \\ &= u(p^*, x, y) \delta(t-y) \text{ がわかるから} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int u(p^*, x, t) \delta(t-y) dt &= \int u(p^*, x, y) \delta(t-y) dt \\ &= u(p^*, x, y) \int \delta(t-y) dt \quad (\delta \text{ の定義}) \\ &= u(p^*, x, y) \quad \text{とある。} \end{aligned}$$

5° 応用

以上の演算の応用の一つとして次の定理を示す。

定理 2.3.8 (microlocal Holmgren Theorem;

Kashiwara-Lauvent [7] Théorème 4.2.3 の

Special case)

$$\Lambda = \sqrt{1} S^* \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \supset \{p_0^*\} \times \mathbb{R}^q = J \ni p_0$$

$$f: S \rightarrow \mathbb{R} \text{ real analytic } df(p_0) \neq 0$$

$$p_0^* \notin (p_0^*, \lambda, \pm \sqrt{1} df(p_0) \infty) \in S_{\Lambda}^* \tilde{\Lambda} \text{ を満たす。}$$

$$Z = \{p \in S \mid f(p) \geq 0\} \quad \text{とある}$$

$$0 \rightarrow \Gamma_Z(B_{\Lambda}^2|_S)_{p_0} \rightarrow C_{\Lambda, p_0}^2 \text{ exact}$$

(証明) 方針は金子 [3] に従う。 $\mathbb{R}^q$ 上の

座標変換に依り $\mathbb{R}^q = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^{q-1}$ $f(t, x) = t - x^2$

$$P_0 = (P_0^*, 0, 0) \quad P_0^* = (P_0^{*1}, 0, 0, \sqrt{t} dt + \dots)$$

$\psi \in L^2$ (Holmgren 変換)

$$u \in \mathcal{D}'(B_\lambda^2|_S)_P$$

$$Sp(u)_{P_0^*} = 0 \quad \text{とす。}$$

$$u \in \mathcal{B}_\lambda^2(\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W})$$

$$(\mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W} \ni (P_0^*, 0, 0)) \quad \text{とす}$$

$$(S - Z) \cap \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{W} \quad \text{上 } u = 0 \quad \psi \in L^2 \neq 0$$

$$\text{とす。 } r > 0 \quad \{|x| = r\} \subset \mathcal{W} \quad \text{とす。}$$

$$P_0^* \in {}^2\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}, \quad 0 \in {}^2\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$$

$$S \cap (\mathcal{U}_0 \times \mathcal{V}_0 \times \{|x| = r\}) \quad \text{上 } u = 0$$

とす。はじめる。

$$u \in \mathcal{B}_\lambda^2(\mathcal{U}_0 \times \mathcal{V}_0 \times \mathbb{R}_x^{q-1})$$

$$\text{Supp } u \text{ は } \lambda \text{ により compact}$$

$$\{(P^*, t, x); P^* = P_0^*, t = 0, x \neq 0\}$$

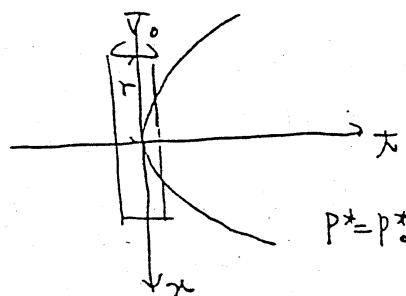
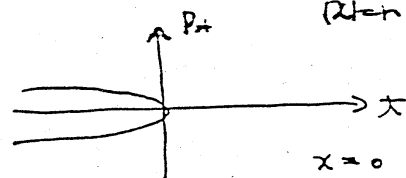
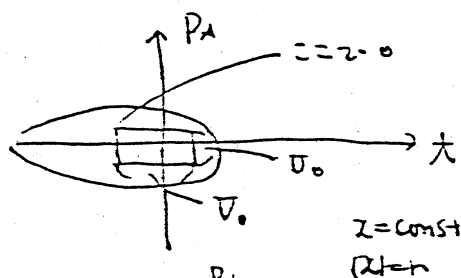
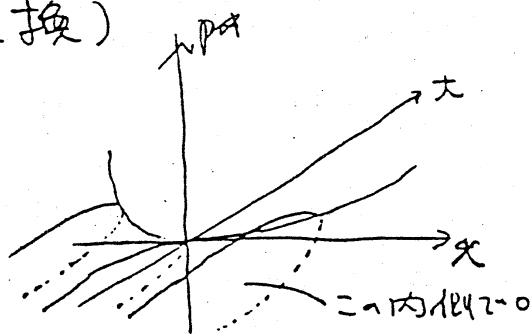
$$\cup \{(P^*, t, x); P^* = P_0^*, t < 0\}$$

$$\text{とす。 } 0 \in L^2 \neq 0$$

$$\text{とす。 } Sp(u)_{P_0^*} = 0 \quad \text{とす。}$$

$$Sp(u) \text{ は } \{(P^*, t, x, \sqrt{t}(dt + \dots dx)) \in \mathcal{U}_1, |t| < \varepsilon$$

$$x \in \mathbb{R}^q, |z| < \varepsilon\} \quad \text{とす。 } 0 \in L^2 \neq 0. \quad (\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_0)$$



$$\text{further } f(x) = \sum_{\sigma} b_{\sigma}(W_{\sigma}(x)) \stackrel{\text{def}}{=} \sum W_{\sigma}(x)$$

$$(W_{\sigma}(x) = \frac{1}{(-2\pi i)^{q-1}} \frac{\text{sgn } \sigma}{z_1 \cdots z_{q-1}}) \quad \text{と } \sigma \in \Gamma_{\sigma}^{\circ}$$

$$SS W_{\sigma}(x) = \{ (x, \sqrt{t} dx) \in \Gamma_{\sigma}^{\circ} \}$$

$$f_{\sigma}(p^*, x, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^{q-1}} f(p^*, x, u) W_{\sigma}(x-u) du$$

とある。これは $U_0 \times V_0 \times \mathbb{R}^{q-1}$ 上 well defined

である。特異点の SS^2 の評価は

$$SS^2 f_{\sigma} \subset \{ (p^*, x, \lambda, \sqrt{t}(adt + \beta dx)) \infty ;$$

$$\exists u. (p^*, x, u, \sqrt{t}(a, \beta)) \in SS^2 f, \beta \in \Gamma_{\sigma}^{\circ} \}$$

($\beta=0$ を除く)。

ここで U_0 上の $\mathcal{A}^{\text{reg}} = \{x \neq 0\}$ 上 $A = \bigcup_{|x| < \varepsilon} \{x\} \times \mathbb{R}^{q-1}$ 上では

$$(\sqrt{t}(adt + \beta dx)) \in (|\beta| < \varepsilon) \text{ と } \beta \in \Gamma_{\sigma}^{\circ}.$$

$$\therefore SS^2(f_{\sigma}|_A) \subset \{ (p^*, x, \lambda; \sqrt{t}(adt + \beta dx)) \infty, (a, \beta) \in \tilde{\Gamma}_{\sigma}^{\circ} \}$$

$\tilde{\Gamma}_{\sigma}^{\circ}$: proper convex in $\mathbb{R}^{q-1}$

$$\text{further } 0 \rightarrow \tilde{Q}^2 \rightarrow \tau^* \beta^2 \rightarrow \tau_* \tau^* C^2 \rightarrow 0$$

$$\text{further } f_{\sigma}|_A = b(\tilde{G}_{\sigma}(p^*, \tau, z))$$

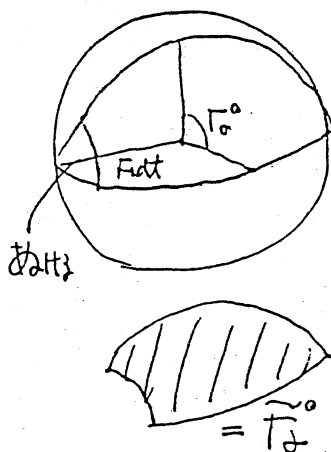
$$G_{\sigma} \in \mathcal{O}(\bigcup_{|x| < \varepsilon} \{x\} \times \mathbb{R}^{q-1} + i\tilde{\Gamma}_{\sigma}^{\circ})$$

$$\text{further } \forall x < 0, \exists U_x \times V_x \ni (p^*, x)$$

$$\text{s.t. } f = 0 \text{ on } U_x \times V_x \times \mathbb{R}^{q-1}$$

$$\text{further } f_{\sigma} = 0 \text{ on } U_x \times V_x \times \mathbb{R}^{q-1} \text{ with } \tau \neq 0$$

$$\Rightarrow V_x \subset \{|x| < \varepsilon\} \text{ と } \tau \neq 0$$



$b(G_\sigma)|_{\sigma_* \times \sigma_* \times \mathbb{R}^{q-1}} = 0$ b a injectivity #1
 $G_\sigma = 0$ on $\sigma_* \times \sigma_* \times \mathbb{R}^{q-1}$ a fibre に対して C^0 に對する
 了解析接続の一貫性により $G_\sigma = 0$ on
 $\sigma_* \times \{|\mathbf{u}| < \varepsilon\} \times \mathbb{R}^{q-1}$ a fibre
 $\therefore f_\sigma|_{\sigma_* \times \{|\mathbf{u}| < \varepsilon\} \times \mathbb{R}^{q-1}} = b(G_\sigma) = 0$
 $\therefore 0 = \sum_\sigma f_\sigma = f *_{\mathbf{x}} \delta = f$ on $\sigma_* \times \{|\mathbf{u}| < \varepsilon\} \times \mathbb{R}^{q-1}$
 最後の集合は D_0 の近傍である。 //

Remark 定理の最初にも書いたとおり、この定理は
 Kashiwara-Lemire [7] に述べられている次の定理:

定理 $\Lambda \subset \sqrt{T^*M}$ homogeneous involutory
 submanifold^s $x_0 \in \Lambda$ $S_{x_0} : x_0$ を通る, Λ の
 bicharacteristic leaf $\subset \Lambda$. $f : S_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$ ε
 x_0 の近傍で定義された real analytic map を
 $f(x_0) = 0$. $df(x_0) \neq 0$ ならば $\alpha \in \Lambda$, $x_0^* \in (x_0, \pm \sqrt{\Lambda} df(\alpha))$
 の一方は $x_0^* \in \sqrt{T^*} S_{x_0} \simeq (T_{x_0}^* \Lambda)_{x_0} S_{x_0}$
 $Z = \{x \in S_{x_0} ; f(x) \geq 0\}$ である。 Z である
 $0 \rightarrow \Gamma_Z(B_{\Lambda}^2|_{S_{x_0}})_{x_0} \rightarrow C_{\Lambda, x_0}^2$ exact

の special case である。上記論文においては、まず $\Lambda \in 1$ 変
数表示として regular involutory にしたあと、それを、
quantized canonical transformation において 標準形
 $\Lambda \approx iS^* \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ に写すことができてることが示されてい
て、結局上の special case に帰着されるのである。上記
論文においては Λ を $\text{purely cohomological method}$
を用いてやや弱い形を証明し、あとは geometrical な
方法で上の結果を得ている。ここでは、別証明として
異なる方向の直感的な証明を試みてみた。

$$\text{系} \quad \text{同じ条件のもとで} \quad 0 \rightarrow \Gamma_{\Sigma} (G_M | S_{\Sigma})_{\Sigma} \rightarrow (\Lambda_{\Sigma}^2)^* \\ (\text{exact})$$

この系の弱形は Bony [13] において既に用いられ、また
Schapira による propagation of singularities にも用
いられている。(c.f. Kushinara-Laurent [7], Grigis,
Schapira, Sjöstrand [14])

さうに, 次の命題が成る。

命題 2.3.9. (c.f. 柏原-河合-木村 [6], 金子 [3])

$\Lambda = \sqrt{-1} S^* \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ $\Lambda_1 = \sqrt{-1} S^* \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \times S^{q-1}$
 とす。 $(\Lambda_1 \simeq S^*_{\Lambda} \tilde{\Lambda})$ とき Λ_1 上の
 sheaf homomorphisms $\Theta: C^2_{\Lambda} \rightarrow B^2_{\Lambda_1}/a^2_{\Lambda_1}$
 $\Psi: B^2_{\Lambda_1}/a^2_{\Lambda_1} \rightarrow C^2_{\Lambda}$ があって,
 $\Psi \circ \Theta = \text{id}: C^2_{\Lambda} \rightarrow C^2_{\Lambda}$ と成る。

証明は, 柏原に於て Caflakness の証明に用い
 られた種分核を用いて全く同様に行なわれる。(具体的
 な証明は, C^2_{Λ} の種分核を定義していないので,
 金子 [3] の定理 4.6.5 の証明の方針におこなわれる。)

系 $K \subset \sqrt{-1} S^* \mathbb{R}^p$: compact propre convex

$W \subset \sqrt{-1} S^* \mathbb{R}^q$: compact とす。

$\forall u \in \Gamma(K \times W, C^2_{\Lambda})$. $\exists \tilde{u} \in \Gamma(S^*_{\Lambda} \tilde{\Lambda}, C^2_{\Lambda})$

$s \mapsto \tilde{u}|_{K \times W} = u$. かつ $\forall L \times V \subset S^*_{\Lambda} \tilde{\Lambda}$

$(L \subset \sqrt{-1} S^* \mathbb{R}^p$: 相対 compact propre convex $V \subset \sqrt{-1} S^* \mathbb{R}^q$

相対 compact) に対し. $\exists v \in \Gamma(L \times \pi(V), B^2_{\Lambda})$

$$\text{set } \tilde{u} = sp(u)$$

$$\text{証明) } u \in \Gamma(K \times W, C_{\Lambda}^2) \Rightarrow \exists u \in \Gamma(K \times W, B_{\Lambda_1}^2 / A_{\Lambda_1}^2)$$

$$= = =$$

$$0 \rightarrow A_{\Lambda_1}^2 \rightarrow B_{\Lambda_1}^2 \rightarrow B_{\Lambda_1}^2 / A_{\Lambda_1}^2 \rightarrow 0$$

$$\text{で, } H^1(K \times W, A_{\Lambda_1}^2) = \varinjlim_{\sigma \times \Omega \supset K \times W} H^1(\sigma \times \Omega, C_{\sigma \times \Omega}^\infty)$$

$= 0$ ($\because \sigma \subset \mathbb{R}^p$ is proper convex open, $\Omega: W$ の複素近傍は Stein としてよい) により

$$0 \rightarrow \Gamma(K \times W, A_{\Lambda_1}^2) \rightarrow \Gamma(K \times W, B_{\Lambda_1}^2) \rightarrow \Gamma(K \times W, B_{\Lambda_1}^2 / A_{\Lambda_1}^2) \rightarrow 0$$

よって, $B_{\Lambda_1}^2$ の flabbiness で, Φ, Ψ が sheaf homomorphism であることから 第1の主張は OK. 第2の主張は

$$0 \rightarrow A_{\Lambda}^2 \rightarrow B_{\Lambda}^2 \rightarrow \pi_* C_{\Lambda}^2 \rightarrow 0$$

と, A_{Λ}^2 に対する 上と同じ消滅定理により OK. //

この系は, flabbiness, softness とは ほぼ 違うものであり, 少くとも上の形の直積型 compact の上では C_{Λ}^2 の元を B_{Λ}^2 の元で代表させることができず, 積分等も直観的に定義できること, C_{Λ}^2 により, $\mathbb{R}^p$ 変数に関して support が compact に

cut 2つと等か1つ。

文 献

- [1] Andreotti - Grauert : Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes,
Bull. Soc. Math. France. 90 (1962)
- [2] Douady : Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires
Astérisque 16 (1974)
- [3] 金子晃 : 超函数入門 上, 下
東京大学出版会. (上: 1980, 下: 1982)
- [4] Kashiwara : Cours à paris-Nord (1978)
- [5] Kashiwara-kawai : On holonomic systems of
Microdifferential equations III
Publ. RIMS, Kyoto Univ. 17, No.3. (1981)
- [6] 柏原-河合-木村 : 代数解析学の基礎
紀伊國屋書店 (1980)
- [7] Kashiwara-Laurent : Théorèmes d'annulation
et deuxième microlocalisation
Paris-Sud. ORSAY : Pre print
- [8] Kataoka : On the theory of Radon transformations
of hyperfunctions

- J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA 28. No. 2. (1981)
- [9] 小松孝三郎 : 佐藤の超函数と定数係数偏微分方程式
東大セミナー 22 (1968)
- [10] ——— : クロタニイフ空間と核定理
上智大学数学講究録 No. 9. (1981)
- [11] 森本光生 : 佐藤超函数入門
共立出版 (1976)
- [12] Sato-Kawai-Kashinara (S-k-k) : Microfunctions
and Pseudo differential equations
Lecture Notes in Math 287. Springer (1973)
- [13] Bony : Extensions du théorème de Holmgren
Séminaire Goulaouic-Schwartz (1975-1976)
- [14] Grigis-Schapira-Sjöstrand : propagation de
singularités analytiques pour des opérateurs à
caractéristiques multiples
Note aux C.R.A.S., Paris, 353 (1981) Série I