

擬微分作用素の L^2 有界性とコンパクト性について

東大 理 青木 邁

1. 序

有限階の微分可能性を仮定して、擬微分作用素の L^2 有界性を求めた結果は、次の様なものが知られている。

(i) A.P. Calderón - R. Vaillancourt [2, 3] (特に[2])

$$D_x^\alpha D_x^\beta a \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \text{ for } \alpha_k, \beta_k = 0, 1, 2, 3$$

ならば、 $a(X, D)$ は L^2 -有界である。

(ii) ^{Ho} Cordes [4]

$$D_x^\alpha D_x^\beta a \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \text{ for } |\alpha|, |\beta| \leq [n/2] + 1$$

ならば、 $a(X, D)$ は L^2 -有界である。

(iii) T. Kato [5] $0 < p < 1$ の時

$$(1 + |\beta|)^{(|\beta| - |\alpha|)p} D_x^\alpha D_x^\beta a \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \text{ for } |\alpha| \leq [n/2] + 2$$

$|\beta| \leq [n/2] + 1$ ならば、 $a(X, D)$ は L^2 -有界である。

これらの証明方法は、すべて symbol を convolution に分解し、非常に扱い安い symbol を持つ擬微分作用素を重みをつけて、

積分するという形に、一般の擬微分作用素を表示して、 L^2 -operator norm を調うべるといふものである。ここでは、(ii)と(iii)に於て、 L^∞ -norm を (L^1+L^p) -norm ($1 \leq p \leq \infty$) に取り替ても、同じ結果が成立すること、さらにコンパクト性に関して ($p=\infty$ の時には、ある付加条件の下で) 結果が得られることを報告する。詳しい証明は、後日発表する予定である。

2. 定義・記号

C^∞ -symbol を扱うのではなく、有限階の微分可能性しか仮定しないから、 $\wedge$ -symbol に対する擬微分作用素を次の様に定義する。(T. Kato [5] による。)

定義 simple symbol $a(x, \xi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ に対し p.d.o. $A = a(x, D) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ を次の等式で定める。

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \langle Au, v \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \langle a, w \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)}$$

$$w(x, \xi) = (2\pi)^{-n/2} e^{i\xi x} \hat{u}(\xi) \hat{v}(x)$$

$$\text{ここで } u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

特に $a(x, \xi) = x_j$ の時 $a(x, D) = X_j$ (函数 x_j を掛ける作用素)

$a(x, \xi) = \xi_j$ の時 $a(x, D) = D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ となる。

記号 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上の有界線型作用素の全体を $B(L^2(\mathbb{R}^n))$ とする。 $\mathcal{C}(L^2(\mathbb{R}^n))$ でコンパクト作用素全体を表わし、その部分空間 $\mathcal{C}_p(L^2(\mathbb{R}^n))$ ($p > 0$) を norm $\|\cdot\|_p$ が有限なコンパクト作用素全体とする。 ここで $\|\cdot\|_p$ は、コンパクト

作用素 T に対し、

$$|T| = (T^*T)^{1/2} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (\cdot, \psi_j) \psi_j, \quad \{\psi_j\}: \text{base of } L^2(\mathbb{R}^n)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad \|T\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^p \right)^{1/p} & (0 < p < \infty) \\ \sup_j \lambda_j & (p = \infty) \end{cases}$$

によって定義される。特に、 $C_1(L^2(\mathbb{R}^n))$ は trace class であり、 $C_2(L^2(\mathbb{R}^n))$ は Hilbert-Schmidt class、 $C_{\infty}(L^2(\mathbb{R}^n)) = C(L^2(\mathbb{R}^n))$ である。

3. 基本等式

補題 1. $1/p + 1/q \geq 1, \quad 1 \leq p, q \leq \infty$ の時、

$b \in L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ と $g \in L^q(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ に対し下記の等式が成立する。

$$(b * g)(X, D) = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} d\alpha d\beta \, b(\alpha, \beta) e^{i\beta X} e^{-i\alpha D} g(X, D) e^{i\alpha D} e^{-i\beta X} \quad \square$$

ここで、 $*$ は $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上の convolution を示す。

4. 作用素解析

補題 1 の等式の右辺に出てくる作用素積分の operator norm に関し次の事実が成立する。

補題 2. $1/p + 1/q \geq 1, \quad 1 \leq p, q \leq \infty$ の時

$b \in L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ と $G \in C_q(L^2(\mathbb{R}^n))$ に対し

$$b[G] \in \begin{cases} B(L^2(\mathbb{R}^n)) & (1/p + 1/q = 1 \text{ の時}) \\ C_r(L^2(\mathbb{R}^n)) & (1 + 1/r = 1/p + 1/q > 1 \text{ の時}). \end{cases}$$

$$\text{ここで } b[G] = \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} d\alpha d\beta \, b(\alpha, \beta) e^{i\beta X} e^{-i\alpha D} G e^{i\alpha D} e^{-i\beta X}.$$

さらに次の事実が成立する。

$$(i) \|b\{G\}\|_r \leq (2\pi)^{(1-1/p)n} \|b\|_{L^p} \|G\|_q.$$

$$(ii) b \geq 0, G \geq 0 \Rightarrow b\{G\} \geq 0.$$

$$(iii) |(b\{G\}u, v)_{L^2}|^2 \leq (|b|\{G\}u, u)_{L^2} (|b|\{G\}v, v)_{L^2} \\ \text{for } u, v \in L^2(\mathbb{R}^n). \quad \square$$

補題2の $1/p + 1/q = 1$ の場合の証明は, T. Kato [5] の Theorem 3.1 と同様にできる。 $1/p + 1/q > 1$ の場合は, 下の H. Komatsu による C_p -norm の特徴付けを必要とする。

補題3. (H. Komatsu [6, Proposition 8.5])

$1 \leq p \neq \infty$ の時, $T \in B(L^2(\mathbb{R}^n))$ に対して

$$\|T\|_p = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |(Te_k, f_k)|^p \right\}^{1/p} \text{ が成立する。}$$

ここで $\sup$ は $\{e_k\}, \{f_k\}$ を正規直交基底全体を動かして取る。 $\square$

(注意) $T \notin C_p(L^2(\mathbb{R}^n))$ に対しては $\|T\|_p = \infty$ ($0 < p < \infty$) とする。

5. 特別な symbol

補題1と2を利用するには, 定係数正 D.O.p の基本解で, それを symbol に持つ正 D.O.p が $C_1(L^2(\mathbb{R}^n))$ に属する extension を持つものがあるとよい。この様な基本解は, $(1-\Delta)^s$ の基本解から求めることが出来る。(H.O. Cordes [4], T. Kato [5])

$(1-\Delta_x)^s \psi_s(x) = \delta(x)$ in $\mathbb{R}^n$ なる基本解 ψ_s は, 次の性質を持つ。

$$\begin{cases} \psi_s \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \\ D^\alpha \psi_s(x) = \begin{cases} O(1+|x|^{2s-n-|\alpha|}) & \text{as } |x| \rightarrow \infty \text{ if } 2s-n-|\alpha| \neq 0 \\ O(\log|x|) & \text{if } 2s-n-|\alpha| = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$\left\{ D^\alpha \psi_s(x) \text{ decays exponentially as } |x| \rightarrow \infty \right.$

特に、 $s > 0$ の時 $\psi_s \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $s > \frac{n}{4}$ の時 $\psi_s \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 。

補題 4. $\psi, \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ で、 ψ と φ は $|x| \rightarrow \infty$ で指数減少すれば、 $g(x, z) = \psi(x) \varphi(z)$ に対して、 $g(x, D) \subset G \in C_1(L^2(\mathbb{R}^n))$ 。
□

この補題と、基本解 ψ_s の性質により、次の補題が成立する。

補題 5. $g(x, z) = \psi_s(x) \psi_t(z)$ とする時、

$g(x, D) \subset G \in C_1(L^2(\mathbb{R}^n))$ if $s, t > \frac{n}{4}$ 。

さらに、すべての multi-order α に対して、 $g(x, D) D^\alpha X^\alpha g(x, D)$ は $C_1(L^2(\mathbb{R}^n))$ に属する extension を持つ。
□

補題 6. 上の補題で、 $s > \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$, $t > \frac{n}{4}$ ならば、さらに

$D_j g(x, D)$, $|D| g(x, D)$ は $C_1(L^2(\mathbb{R}^n))$ に属する extension を持つ。

又 $s > \frac{n}{4}$, $t > \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$ ならば $g(x, D) X_j$, $g(x, D) |X|$ も $C_1(L^2(\mathbb{R}^n))$ に属する extension を持つ。
□

6. 結果 (I)

定理 1. $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ ($\infty-$ を含む) とする。

$\exists s, t > \frac{n}{4}$ s.t. $(1 - \Delta_x)^s (1 - \Delta_z)^t a \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) + L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$

$$\Rightarrow a(x, D) \in \begin{cases} B(L^2(\mathbb{R}^n)) & (p = \infty) \\ C_p(L^2(\mathbb{R}^n)) & (1 \leq p \leq \infty-) \end{cases}$$

さらに、 $\|a(x, D)\|_p \leq C_{n, s, t} \|(1 - \Delta_x)^s (1 - \Delta_z)^t a\|_{L^1 + L^p}$ 。□

ここで $L^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ は $L^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ の部分集合で、無限遠点の開の近傍に制限すると L^{∞} -norm が 0 に行く函数全体よりなる。

定理 2. $1 \leq p \leq \infty$ (∞ を含む) とする.

$D_x^\alpha D_z^\beta a \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) + L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ for $|\alpha|, |\beta| \leq [\frac{n}{2}] + 1$

$$\Rightarrow a(x, D) \in \begin{cases} B(L^2(\mathbb{R}^n)) & (p = \infty) \\ C_p(L^2(\mathbb{R}^n)) & (1 \leq p \leq \infty-) \end{cases}$$

さらに, $\|a(x, D)\|_p \leq C_n \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq [\frac{n}{2}] + 1} \|D_x^\alpha D_z^\beta a\|_{L^1 + L^p}$. $\square$

定理 1 は, 補題 1, 2, 5 より示す. 定理 2 は, 仮定から,

定理 1 の仮定が満足されることを示せばよい. それには, 次の補題を使う.

補題 7. すべての実数 $s > 0$ に対して,

$(1 - \Delta)^{\frac{1}{2} - s} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ は,

$$(1 - \Delta)^{\frac{1}{2} - s} = (1 - \Delta)^{-(\frac{1}{2} + s)} - i \sum_{j=1}^n \mathcal{S}_j^s D_j$$

ここで $(1 - \Delta)^{-(\frac{1}{2} + s)}$ と $\mathcal{S}_j^s$ は, それぞれ L^1 -convolution kernel $\psi_{\frac{1}{2} + s}$ と $\partial \psi_{s + \frac{1}{2}} / \partial x_j$ を持つ. $\square$

ここで, 定理 3 の証明に必要な補題も同様に示せる.

補題 8. すべての $p : 1 \leq p \leq \infty$ に対し,

$$\exists \sigma > \frac{n}{4} + \frac{1}{2}, \exists \tau > \frac{n}{4}, \exists C_n > 0$$

$$\text{s.t. } \|(1 - \Delta_x)^\sigma (1 - \Delta_z)^\tau a\|_{L^1 + L^p} \leq C_n \sum_{\substack{|\alpha| \leq [\frac{n}{2}] + 2 \\ |\beta| \leq [\frac{n}{2}] + 1}} \|D_x^\alpha D_z^\beta a\|_{L^1 + L^p}$$

$$\|(1 - \Delta_x)^\tau (1 - \Delta_z)^\sigma a\|_{L^1 + L^p} \leq C_n \sum_{\substack{|\alpha| \leq [\frac{n}{2}] + 1 \\ |\beta| \leq [\frac{n}{2}] + 2}} \|D_x^\alpha D_z^\beta a\|_{L^1 + L^p}$$

$\square$

7. 結果 (II)

定理 3. $0 < p < 1, 1 \leq p \leq \infty$ (∞ -を含む) とする。

$$(1+|\xi|)^{(|\beta|-|\alpha|)p} D_x^\alpha D_\xi^\beta a \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) + L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

$$\text{for } |\alpha| \leq [n/2] + 2, |\beta| \leq [n/2] + 1$$

$$\Rightarrow a(x, D) \in \begin{cases} B(L^2(\mathbb{R}^n)) & (p = \infty) \\ C_p(L^2(\mathbb{R}^n)) & (1 \leq p \leq \infty-) \end{cases}$$

$$\pm \text{ 3 に } \|a(x, D)\|_p \leq C_n \sum_{\substack{|\alpha| \leq [n/2] + 2 \\ |\beta| \leq [n/2] + 1}} \|(1+|\xi|)^{(|\beta|-|\alpha|)p} D_x^\alpha D_\xi^\beta a\|_{L^1 + L^p}.$$

□

定理 3' $0 < p < 1, 1 \leq p \leq \infty$ (∞ -を含む) とする。

$$(1+|\xi|)^{(|\alpha|-|\beta|)p} D_x^\alpha D_\xi^\beta a \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) + L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

$$\text{for } |\alpha| \leq [n/2] + 1, |\beta| \leq [n/2] + 2$$

$$\Rightarrow a(x, D) \in \begin{cases} B(L^2(\mathbb{R}^n)) & (p = \infty) \\ C_p(L^2(\mathbb{R}^n)) & (1 \leq p \leq \infty-) \end{cases}$$

$$\pm \text{ 3 に } \|a(x, D)\|_p \leq C_n \sum_{\substack{|\alpha| \leq [n/2] + 1 \\ |\beta| \leq [n/2] + 2}} \|(1+|\xi|)^{(|\alpha|-|\beta|)p} D_x^\alpha D_\xi^\beta a\|_{L^1 + L^p}.$$

□

定理 3 の証明の概略.

区間 $[0, \infty)$ 上の単位の分割 $\{\phi_k(r)\}_{k=1}^\infty$ を次の様にとる。

$$\begin{cases} \phi_1 \in C_0^\infty[0, 2), \phi_1(r) = 1 \text{ for } \forall r \in [0, 1] \\ \phi_k \in C_0^\infty(k-1, k+1), \phi_k(k+r) = \phi_2(2+r) \quad (k \geq 2) \end{cases}$$

$\mathbb{R}_\xi^n$ 上の単位の分割 $\{\Phi_k(\xi)\}_{k=1}^\infty$ を $\{\phi_k(r)\}_{k=1}^\infty$ を使って次の様に決める。

$$\Phi_k(\xi) = \phi_k(|\xi|^{-1-p})$$

$a_R(x, \bar{z}) = \Phi_R(\bar{z}) a(x, \bar{z})$ とすると,

$$a(x, \bar{z}) = \sum_{R=1}^{\infty} a_R(x, \bar{z}) \quad , \quad a(x, D) = \sum_{R=1}^{\infty} a_R(x, D) \quad \text{となる.}$$

$a_R(x, \bar{z})$ に対しては、次の不等式を満足する定数 C と ε とれる。

$$|(R^{-\gamma} D_x)^\alpha (R^{-\gamma} D_{\bar{z}})^\beta a_R(x, \bar{z})| \leq C \chi_R(\bar{z}) \sum_{\beta \leq \beta'} f_{\alpha, \beta'}(x, \bar{z})$$

for $|\alpha| \leq [m/2] + 2, |\beta| \leq [m/2] + 1$

ここで $\gamma = \frac{p}{1-p} > 0$, χ_R は $\text{supp } \Phi_R$ の定義関数であり,

$$f_{\alpha, \beta}(x, \bar{z}) = |(1+|\bar{z}|)^{(1-p)|\alpha|} D_x^\alpha D_{\bar{z}}^\beta a(x, \bar{z})| \quad \text{である.}$$

故に、定理 2 を使って、仮定より

$$a_R(x, D) \subset A_R \in \begin{cases} C_p(L^2(\mathbb{R}^m)) & (1 \leq p \leq \infty-) \\ B(L^2(\mathbb{R}^m)) & (p = \infty) \end{cases}.$$

仮定より、 $f_{\alpha, \beta}$ は、 L^1 -function と L^p -function の和で表現で

$$\text{きるから} \quad f_{\alpha, \beta}(x, \bar{z}) = f_{\alpha, \beta, 1}(x, \bar{z}) + f_{\alpha, \beta, p}(x, \bar{z})$$

$$f_{\alpha, \beta, q} \in L^q(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m) \quad (q=1, p) \quad \text{とできる.}$$

$$\text{さらに} \quad f_q(x, \bar{z}) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq [m/2] + 2 \\ |\beta| \leq [m/2] + 1}} |f_{\alpha, \beta, q}(x, \bar{z})| \quad (q=1, p) \quad \text{とする.}$$

次の補題は、補題 8 と同値であるが、計算の為に explicit formula が必要になる。

補題 9.

$$\exists s > \frac{n}{4} + \frac{1}{2}, \exists t > \frac{n}{4} \quad \exists \text{ non-negative function } \mu \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

s.t. $\mu(x)$ は $|x| \rightarrow \infty$ の時 指数減少する。

$$(1 - R^{-2s} \Delta_x)^s (1 - R^{-2t} \Delta_{\bar{z}})^t a_R(x, \bar{z}) = b_{R, 1}(x, \bar{z}) + b_{R, p}(x, \bar{z}) \quad \text{とせよ.}$$

$$|b_{R,q}(x,z)| \leq \begin{cases} \int dy \, k^{-m} \mu(k^2(x-y)) \chi_R(z) f_q(y,z) & ([m/2]: \text{奇数}) \\ \int dk \, k^{-m} \mu(k^2(z-k)) \chi_R(k) f_q(x,k) & ([m/2]: \text{偶数}) \end{cases}$$

上の数値 s, t を使って, $g_R(x,z) = \psi_s(k^2 x) \psi_t(k^2 z)$ とおくと,

$$g_R(X,D) \subset G_R \in C_1(L^2(\mathbb{R}^n)) \quad \text{となり,}$$

$$A_R = b_{R,1} \{G_R\} + b_{R,p} \{G_R\} \quad \text{となる.}$$

残りは, $\sum_R b_{R,1} \{G_R\} \in C_1(L^2(\mathbb{R}^n))$

$$\sum_R b_{R,p} \{G_R\} \in \begin{cases} C_p(L^2(\mathbb{R}^n)) & (1 \leq p \leq \infty) \\ B(L^2(\mathbb{R}^n)) & (p = \infty) \end{cases}$$

を, 補題 3, 5, 6 と, G_R が互いに unitary equivalent なことを使って示せばよい。詳しくは, 他の機会に譲る。

追記 定理 1. 2. 3. 3' の弱い形は, [1] に発表してある。

参考文献

- [1] S. Aoki: On L^2 -boundedness and L^2 -compactness of pseudo-differential operators. Proc. Japan Acad., 54A, 1978, ^{P.145}-150.
- [2] A. P. Calderón and R. Vaillancourt: On the boundedness of pseudo-differential operators. J. Math. Soc. Japan, 23, 1971, p. 374-378.
- [3] —; A class of bounded pseudo-differential operators Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 69, 1972, p. 1185-1187.
- [4] H. O. Cordes: On compactness of commutators of multiplications and convolutions, and boundedness of pseudo-differential operators J. Func. Anal., 10, 1975, p. 115-131.

[5] T. Kato : Boundedness of pseudo-differential operators
Osaka J. Math., 13, 1976, P. 1-9.

[6] H. Komatsu ; Theory of Locally Convex Spaces
Dept. of Math., Univ. of Tokyo, 1974.