

管路の流れの 1 次元非定常流モデル に対する差分近似について

東北学院大学工学部

河野幸夫 (Yukio Kono)

岡山大学環境理工学部

渡辺雅二 (Masaji Watanabe)

1 序論

管路の一樣な流れが弁の閉鎖によって遮断されたときには、流速に比較して予想外に大きな圧力が発生することがある。この圧力の変化は水撃と呼ばれ管路の流れに特有な現象として知られている。圧力を水の高さ、すなわち圧力水頭 H (m) で表すと、水撃による圧力水頭の変化量 ΔH は流速 V (m/s) の変化量 ΔV を用いて

$$\Delta H = \frac{a}{g} \Delta V \quad (1)$$

で近似される。ここでは、 a (m/s) は水撃波の伝播速度、 g は重力加速度を表す [9]。水撃破の伝播速度 a は管の形状、材質等により決定されるが、内径 50 mm、肉厚 3 mm の水道鋼管の場合、水撃破の伝播速度として 1325 m/s が得られた例がある [3]。 $a = 1325$ (m/s), $g = 9.81$ (m/s²), $\Delta V = 0.1$ (m/s) の場合、 $\Delta H \approx 13.51$ (m) となるが、これは 1.351 kgf/cm² に相当する。

一方、水撃により上昇した圧力はやがて下降する。このとき圧力水頭の一樣流からの減少量の最大値は (1) の ΔH と同程度である。したがって、水撃圧が大きいほど圧力の最小値は小さくなるといえる。管路の流れでは、圧力がとる最小値 p_v があり、圧力が p_v まで低下するときには、液体の気化気体が発生し、流れは液体と液体の気化気体が混合した気液 2 相流になる。このような水撃、液体の気化のような現象が現れる管路の非定常流の解析法を紹介する。管路の液体流に関しては運動方程式と連続方程式、気液 2 相流に関しては運動方程式とボイド率に関する偏微分方程式に差分近似を適用する。解析結果と実験結果の比較検討も行なう。

2 管路の非定常液体流解析

ここでは、以下のような管路を想定し、非定常液体流の解析法と解析結果を実験結果とともに紹介する。長さ L (m)、直径 d (m) の管の一端は水槽に接続され、他の一端には弁が

*東北学院大学工学部土木工学科 (〒 985 多賀城市中央 1-13-1)

†岡山大学環境理工学部環境数理学科 (〒 700 岡山市津島中 2-1-1)

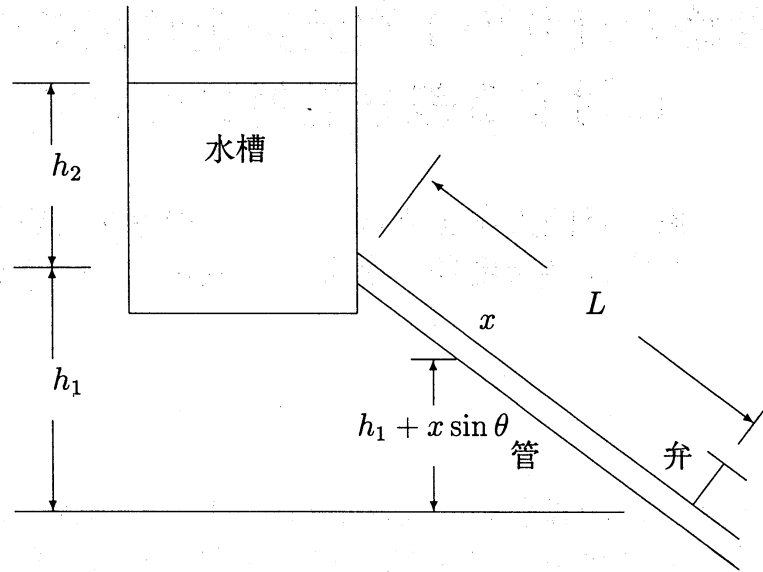


図 1: 管路モデルの模式図. θ は管と水平面の間の角度を表す. ここでは $\theta = -\arcsin h_1/L$.

取り付けられている. 水槽と管の接続点である給水口は弁より高い位置にあり, したがって管は給水口から弁に向かって下向きに傾斜している. 弁から給水口までの高さを h_1 (m) とする. 水槽の水位は一定に保たれ, 給水口から水面までの高さを h_2 (m) とする. 管路に沿って座標軸を設定し, 座標を x で表す. 給水口的位置を $x = 0$, 弁の位置を $x = L$ とする (図 1). 初期には弁が開放され, 水槽から供給される水が流速 V_0 (m/s) で一様に流れている. このときに弁が遮断されると, 管路の流れは一様流から非定常流に変化する.

管路の非定常流の解析には, 運動方程式と連続方程式がよく用いられる [9]. これら二つの方程式は準線形偏微分方程式系を構成し, その数値解法としては, 差分近似, 補間等により特性曲線の方法に近似解を計算する方法が主流であった [9]. 一方, x に関する偏導関数に上流差分近似を適用する方法も紹介されている [4, 3, 5]. ここでは, 2 次の上流差分の適用によって得られる常微分方程式系 [11] に 4 次の Runge-Kutta 法と 4 次の Adams-Bashforth-Moulton 予測子修正子法 [6] を用いて得られた結果を紹介する. 数値解析には, 図 1 に近い実験装置にあわせて次のパラメータの値を用いた.

$$L = 54.37, d = 0.05, h_1 = 3.3, h_2 = 2.99, T = 0.015. \quad (2)$$

ここでは, T (s) は, 弁が完全に閉じるまでに要する時間とする. 更に, 運動方程式, 連続方程式に現れる重力加速度 g (m/s²), Darcy-Weisbach の摩擦係数 f , 波速 a (m/s), 管の傾斜角 θ には次の値を用いた.

$$g = 9.81, f = 3, a = 1325, \theta = -\arcsin(h_1/L). \quad (3)$$

区間 $[0, L]$ の分割数 n , 時間 t (s) 方向のステップの長さ Δt には次の値を用いた.

$$n = 1600, \Delta t = 0.000004. \quad (4)$$

管路の流れの圧力は、よく圧力水頭 H で表される。 p を圧力、 γ を水の単位重量とすると、位置 x での圧力と圧力水頭の関係は

$$p = \gamma(H - h_1 - x \sin \theta) \quad (5)$$

で表される。すなわち、圧力水頭と管の高さの差に水の単位重量をかけたものが圧力となる。圧力水頭に関する実験結果と (2), (3), (4) のパラメターの値を用いて行なった解析結果を図 2 に紹介する。

図 2 には、上流差分近似を用いた管路の非定常流の解析結果を紹介した。一方、これまでは運動方程式と連続方程式の解析法としては、特性曲線の変化を差分や補間を用いて近似的に求める方法 [9]、いわゆる特性曲線法がよく用いられてきた。そこで、上流差分近似を適用した方法による解析結果と特性曲線法による解析結果の違いについて考察する。図 2 で紹介した解析結果の一部と特性曲線法による解析結果を図 3 に示す。特性曲線法では、上流差分近似に比較して、波の前端や後端が丸くなることが示されている。

3 管路の気液 2 相流解析

圧力が、弁の閉鎖により発生した水撃から回復した後、その反動で初期の一樣流の圧力より小さくなる。一樣流の流速が大きいほど水撃圧が高くなるように、圧力の最小値も小さくなる。図 4 は、 $x = 54.27$ での一樣流の流速に対する圧力水頭の最小値と最大値の変化を示す。管路の流れでは、圧力がある値 p_v まで低下すると、局所的に水と水蒸気の混合した気液 2 相流が形成される。一方、圧力と圧力水頭の関係は (5) で表されるので

$$H_v = \frac{p_v}{\gamma} + h_1 + x \sin \theta$$

とすると、位置 x では圧力水頭が H_v まで低下するときに気液 2 相流が形成される。実験では、 $H_v = -10$ 付近で気液 2 相流の形成が観察された。したがって、図 4 の解析結果から、初期の一樣流の流速が 0.16 m/s 以上のときは、少なくとも弁および計測装置の位置付近で気液 2 相流の形成が予測される。

気液 2 相流が形成されるときには、液体流と共に気液 2 相流の解析が必要となる。気液 2 相流のモデルとしては、運動方程式 [8, 1] とボイド率の変化を流速の式で表す偏微分方程式 [8, 1, 3, 10, 5] が紹介されている。気液 2 相流モデルは液体流モデルとインターフェース方程式とともに解析される。気液 2 相流の形成をとまなう非定常流の解析例を実験結果とともに図 5 に示す。この解析では、液体流の運動方程式には 1 次精度の上流差分近似を適用した方法 [3, 5]、気液 2 相流の運動方程式には [7] で紹介された方法を用い、更に、インターフェース方程式 [8, 1] を用いた。 n と Δt は次の値を設定した。

$$n = 400, \Delta t = 0.0000001. \quad (6)$$

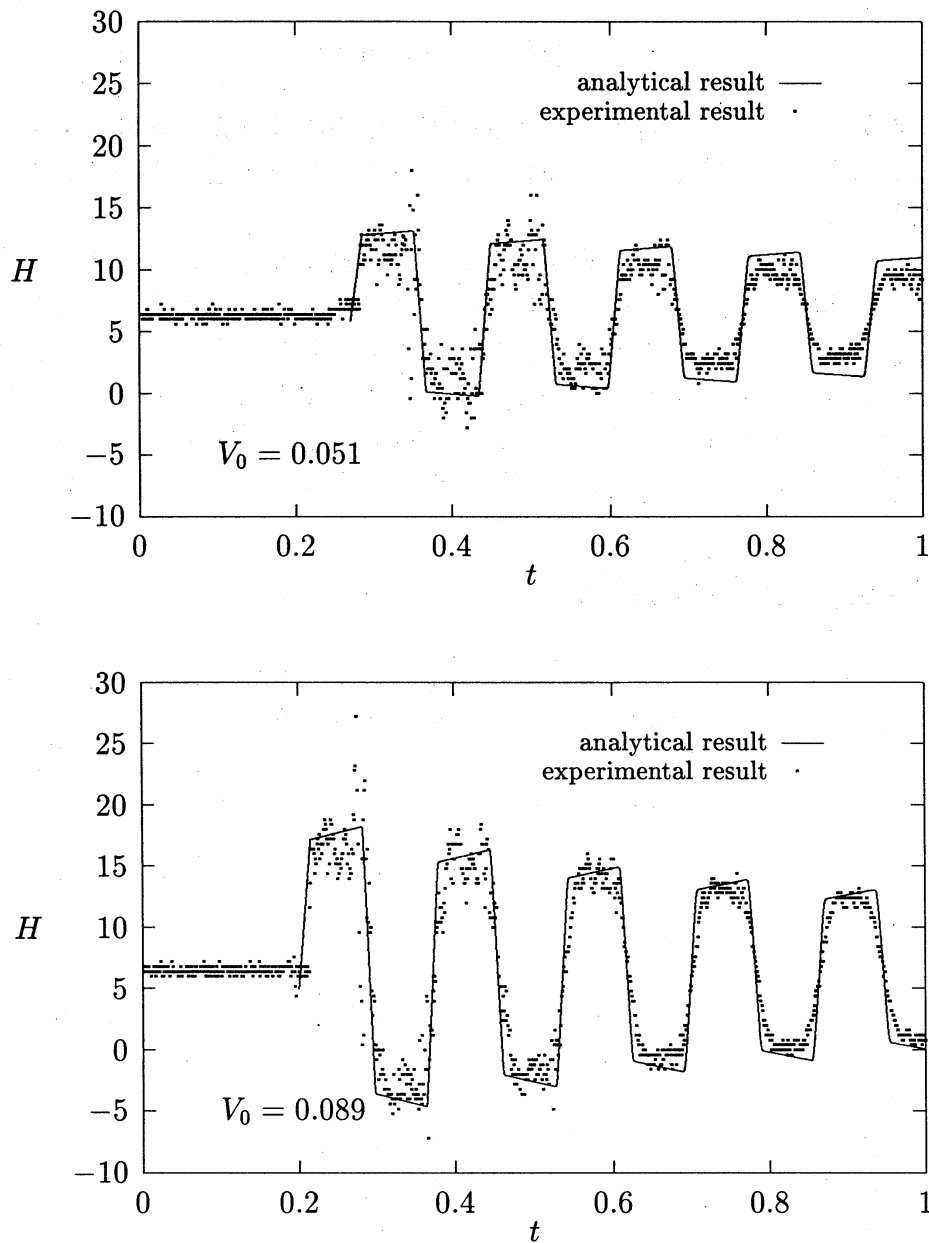


図 2: 実験結果と解析結果. 長さ $L = 54.37 \text{ m}$, 直径 $d = 0.05 \text{ m}$ の水道用鋼管と水道水を用いた実験結果と解析結果を示す. 弁の上流 0.1 m , すなわち $x = 54.27$ の位置で圧力が計測された. 横軸は時間 $t \text{ (s)}$, 縦軸は圧力水頭 $H \text{ (m)}$. 給水口的位置 $x = 0$ では $H = h_1 + h_2$ とする. 位置 x での管と弁の高低差は $h_1 + x \sin \theta$ ($\theta = -\arcsin(h_1/L)$). 解析結果では, 弁閉鎖の開始時間を $V_0 = 0.051$ のときには $t = 0.27$, $V_0 = 0.089$ のときには $t = 0.2$ とした. 上流差分による解析結果は, 実験で計測される水撃をよくとらえているといえる.

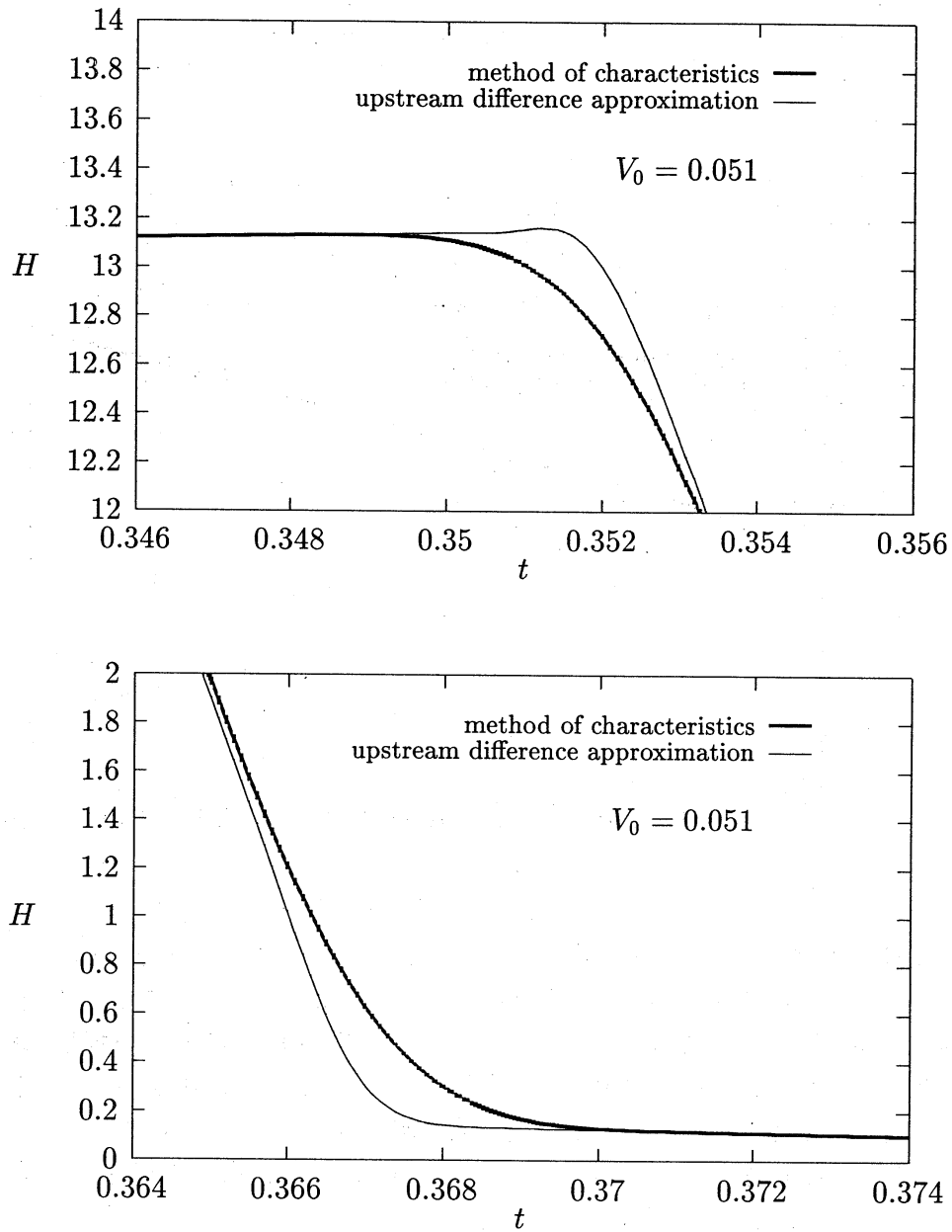


図 3: 上流差分近似による解析結果と特性曲線法による解析結果. 図 2 に示す $V_0 = 0.051$ の場合の解析結果の一部を拡大し, 補間を用いた特性曲線法の解析結果とともに示す. 特性曲線法による結果は, 上流差分近似による結果と比較して, 波の前端や後端が丸くなっている.

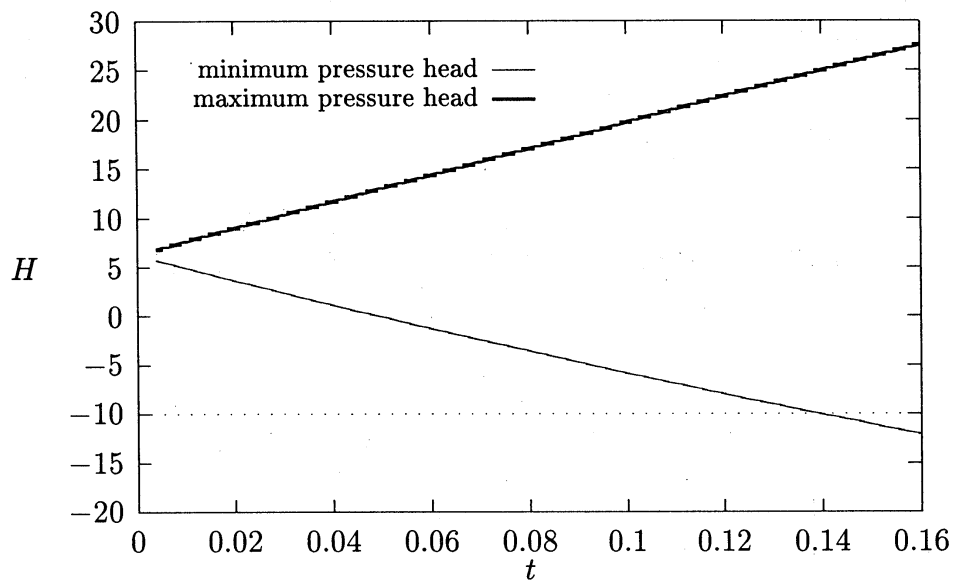


図 4: 初期流速に対する圧力水頭の最小値と最大値の変化. (2), (3), (4) のパラメターの値を用いて, 図 2 の解析結果を得るために用いた方法により $x = 54.27$ での圧力水頭の最大値と最小値を求めた. $V_0 = 0.004$ から $V_0 = 0.16$ まで 0.004 間隔の一樣流の流速 V_0 に対して, 50000 ステップまで (弁の閉鎖開始時間を 0 とすると $t = 0$ から $t = 0.2$ まで) 計算を行なった. $V_0 = 0.16$ になると圧力水頭の最小値は $H_v = -10$ に達するので, V_0 が 0.16 以上では, 少なくとも弁および計測装置の位置付近で気液 2 相流の形成が予測される.

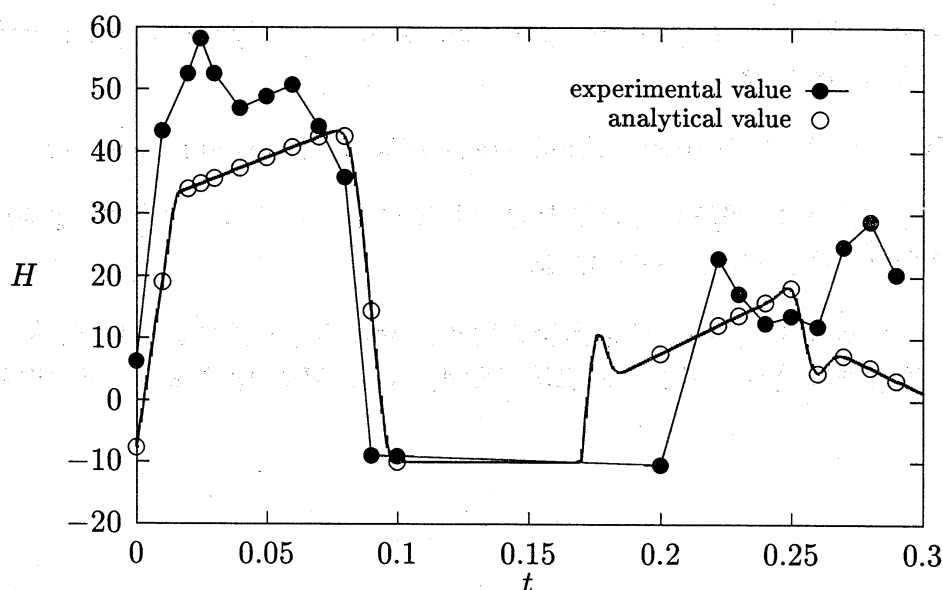


図 5: 気液 2 相流の形成をともなう非定常流の実験結果と解析結果. (2), (3), (6) のパラメータの値を用いて行なわれた. 弁の閉鎖開始時間は $t = 0$ とする. 弁付近では約 0.1 秒後, 圧力水頭が -10 m に達し, 気液 2 相流が形成される.

参考文献

- [1] A. Bergant and A. R. Simpson, *Interface model for transient cavitating flow in pipelines*, in *Unsteady Flow and Fluid Transients*, R. Bettess and J. Watts, eds., Balkema, Rotterdam, 1992: 333-342.
- [2] R. Courant, E. Isaacson, and M. Rees, *On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences*, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, V (1952): 243-255.
- [3] 水撃圧による管破壊と負圧部気液混相流に関する研究, 博士論文, 東北学院大学, 1996.
- [4] 河野幸夫, 菅野高弘, 渡辺雅二, 水撃圧による管の動的破壊と準静的破壊の実験的比較研究, *土木学会論文集*, 509/II-30 (1995.2): 55-65.
- [5] 河野幸夫, 渡辺雅二, 管内流に現れる非定常現象の数値解析, 準備中.
- [6] J. D. Lambert, *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, New York, 1973.
- [7] P. D. Lax, *Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation*, *Communications of Pure and Applied Mathematics*, VII (1954): 159-193.

- [8] V. L. Streeter, *Transient cavitating pipe flow*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE **109** (1983): 1408-1423.
- [9] E. B. Wylie and V. L. Streeter, *Fluid Transients*, McGraw-Hill, New York, 1978.
- [10] 渡辺雅二, 河野幸夫, 管路における気液 2 相流のモデル解析について, 環瀬戸内応用数理研究部会第 1 回論文集, 1998: 42-46.
- [11] 渡辺雅二, 河野幸夫, 管路の非定常流の解析における差分近似について, 第 2 回環瀬戸内応用数理研究部会シンポジウム講演予稿集: 9-10, 平成 10 年 6 月, 岡山理科大学.