

Linear Differential Equations modeled after hyperquadrics

熊本大理 佐々木 武 (T. Sasaki)

九大大理 吉田 正章 (M. Yoshida)

1. はじめに

$\mathcal{H}_2$ を次数 2 の Siegel 上半平面, $\Gamma(2)$ をレベル 2 のモジュラー群とする。自然な写影 $\pi: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2/\Gamma(2)$ の逆写像について考えたい。空間 $\Lambda \subset \mathbb{P}^3$ を

$$\Lambda = \{(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3) \in \mathbb{C}^3; \lambda^i \neq 0, 1, \lambda^i (i \neq j)\}$$

によって定め, Λ の各元 λ に曲線

$$\{v^2 = u(u-1)(u-\lambda^1)(u-\lambda^2)(u-\lambda^3)\}$$

の周期行列に対応させると π^{-1} が得られる。ここで,

$\mathcal{H}_2$ は 3 次元 IV 型対称領域として $\mathbb{P}^4$ の非退化 2 次超曲面 Q^3 の中に実現されるから, π^{-1} は Λ から Q^3 への写像, 従って Λ から $\mathbb{P}^4$ への写像である。これは, 同次座標を並べてみれば, 5 つの函数で与えられる。我々の目標はこれらの函数のみによるべき微分方程式系

(UDE とよぶ): $\Lambda = \mathbb{P}^3$ 上の Fuchs 型線形微分方程式

式系, を具体的に求めることである。結果は次の通り。

$$(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3) = (x, y, z) \text{ とおくとき}$$

$$w_{xx} + \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-z} + \frac{1}{x-y} \right) \right] w_x$$

$$- \frac{y(y-1)}{2x(x-1)(x-y)} w_y - \frac{z(z-1)}{2x(x-1)(x-z)} w_z + \frac{1}{x(x-1)} w = 0,$$

$$(z-x)y(y-1) \left[2w_{xy} + \left(\frac{1}{y-z} + \frac{1}{y-x} \right) w_x + \left(\frac{1}{x-z} + \frac{1}{x-y} \right) w_y + \frac{1}{(z-x)(z-y)} w \right]$$

$$= -(y-x)z(z-1) \left[2w_{xz} + \left(\frac{1}{z-y} + \frac{1}{z-x} \right) w_x + \left(\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x-z} \right) w_z + \frac{1}{(y-x)(y-z)} w \right],$$

及び (x, y, z) を巡回置換して得られる4式。

この方程式と Appell の F_1 は緊密な関係がある。[Y2]参照。

§2 では簡単に歴史をふりかえったあと, 「二次条件をみたす微分方程式系」を求める。すなわち, 解空間の次元が $n+2$ である n 次元多様体上の方程式系であって, 独立な解を並べて得られる P^{n+1} への写像による多様体の像が「二次超曲面」にはいるものの求め方を示す。§3では, この結果を使って上記

modular 群 $\Gamma(z)$ に対応する UDE の求め方を示す。

§4 では §2 の結果と射影微分幾何 (射影接続をもつ多様体の部分多様体の幾何) のことばで説明する。

なお、先のような群ととりあずる理由を簡単に述べておきたい。 X は Hermite 対称空間, Γ は X に働く不連続群とし, M は orbifold $\Gamma \backslash X$ とする。このとき, 射影 $\pi: X \rightarrow M$ の逆写像 π^{-1} は M の "developing map" とよばれる。我々は π^{-1} は ^{何らかの良}微分方程式で記述されると考へる。 Gauss の微分方程式, Appell の F_1 超幾何微分方程式はその好例である。しかも, 両者とも標語的には "射影構造の developing equation" と与えてくれる。そうすると "変形構造" はどうかと考へるのは自然な流れ行きであろう。 Siegel modular 群はこの好例になるというのが, とりあずる理由である。 Hilbert modular 群も同様であり, これについては [SY1, 2] を参照して頂きたい。以上の背景については [Y1] を参照して頂きたい。

2. 二次超曲面をモデルとした微分方程式系

2.1 Laguerre - Forsyth の理論

函数 $z = z(x)$ についての3階常微分方程式

$$(A) \quad z''' + p_1 z'' + p_2 z' + p_3 z = 0$$

をまず考へよう。 Laguerre - Forsyth の理論というのは

1879年 Laguerre が (A) について 次の3つのこと

を示したことに端を荒している。

(1) z の変換 $z \rightarrow e^{f(x)} z$ と x の座標変換を

組みあわせると 方程式 (A) は 方程式

$$(A1) \quad z''' + p z = 0$$

に変形できる。

(2) 形 (A1) を保つ上記変換は射影一次変換に限り、

このとき p は変換について共変である。

(3) (p は (変換の jacobian)³ $\times$ (P_i の微分方程式) と表わされるが) $p=0$ であることと 方程式 (A) の 3 つの独立な解の間には 2 次の関係式が成立つこととは同値である。

実際、 $p=0$ ならば (A1) の独立な解として

$$z_1 = 1, z_2 = x, z_3 = x^2 \text{ がとれ, } z_1 z_3 - (z_2)^2 = 0$$

であるから (3) は容易にわかる。高階の常微分方程式については Brioschi, Halphen, Forsyth, Bouton 等によって一般化された。なかでも Halphen は (A1) の p が P^2 内の曲線の不変量であることを最よく示した。

2.2 2変数の場合 — E.J. Wilczynski の仕事

Halphen の考え方を 2変数の方程式系に適用し

たのは E. J. Wilczynski である。そのうちの1つとして、
 $z(x, y)$ についての次の方程式系を扱った。

$$(B) \quad \begin{cases} z_{xx} = l z_{xy} + a z_x + b z_y + p z \\ z_{yy} = m z_{xy} + c z_x + d z_y + q z. \end{cases}$$

ここで、(B) は可積分系である

$$(1) \quad 1 - lm \neq 0$$

をみたし、4つの独立な解 $\{z^0, z^1, z^2, z^3\}$ をもっているでしょう。Wilczynski の示したことの1つは §2.1 の(1)と同じ変換を行くと (B) は方程式系

$$(B1) \quad \begin{cases} z_{xx} = \beta z_y + p' z \\ z_{yy} = \gamma z_x + q' z \end{cases}$$

に帰着できること、 β, γ は $\mathbb{P}^3$ への写像 $(z^0(x, y), \dots, z^3(x, y))$ によって得られる曲面の3次の不変量であること、そして $\beta = \gamma = 0$ という条件がこの曲面が2次曲面であるための必要充分条件であることである。

この結果を具体的な方程式系、例として Appell の超幾何微分方程式系 F_2, F_3, F_4 に適用する — 微分幾何学的取り扱いをする — ことが可能である。[SY1] を参照。

また (1) が成立しない： $1 - lm = 0$ となる方程式系には Appell の F_1 が属する。これについて

これは [Y1] 参照。

2.3 変数の数が3以上の場合

— 2次超曲面をモデルとした微分方程式系 —

$M \subset \mathbb{C}^n$ の領域, $(x^1, \dots, x^n) \in$ その座標, $z^1, \dots, z^{n+2} \in M$ 上の $n+2$ 本の線形独立な函数としよう。

これらは z についての線形方程式

$$\det \begin{vmatrix} z & z^1 & \cdots & z^{n+2} \\ z_1 & z_1^1 & \cdots & z_1^{n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_n & z_n^1 & \cdots & z_n^{n+2} \\ z_{ij} & z_{ij}^1 & \cdots & z_{ij}^{n+2} \\ z_{kl} & z_{kl}^1 & \cdots & z_{kl}^{n+2} \end{vmatrix} = 0$$

の解である。 $r=1, \dots, n$, $z_i = \partial z / \partial x^i$, etc.

$$\Delta_{ij} = \det \begin{vmatrix} z^1 & \cdots & z^{n+2} \\ z_1^1 & \cdots & z_1^{n+2} \\ \vdots & & \vdots \\ z_n^1 & \cdots & z_n^{n+2} \\ z_{ij}^1 & \cdots & z_{ij}^{n+2} \end{vmatrix}$$

とおくとき, z^i が独立であることより 少なくとも1つの (i, j) について $\Delta_{ij} \neq 0$ である。 $\Delta_{1n} \neq 0$ とする。

このとき 方程式系は

$$(C) \quad \begin{cases} z_{ij} = g_{ij} z_{1n} + A_{ij}^k z_k + A_{ij}^0 z, & 1 \leq i, j \leq n \\ A_{ij}^k = A_{ji}^k, A_{ij}^0 = A_{ji}^0, g_{ij} = g_{ji}, \\ g_{1n} = 1, A_{1n}^k = A_{1n}^0 = 0 \end{cases}$$

の形をしている。ここで $z = (z^1, \dots, z^{n+2})$ とおくと $z(M)$ は $\mathbb{P}^{n+1}$ の超曲面になる。§4 で述べるように $z(M)$ は自然な共形接続をもつ。対応する計量は今の場合 $\sum g_{ij} dx^i dx^j$ であることがわかる。さらに、 $z(M)$ が 2-次超曲面に含まれるならばこの接続は平坦, conformally flat, であることが証明できる。逆に次の定理が成立する。

定理 $n \geq 3$ とする。 $\sum g_{ij} dx^i dx^j$ は共形的平坦な計量とし $g_{1n} = 1$ とする。函数 $\theta \in \det(e^\theta g_{ij}) = 1$ となるように定め テンソル $e^\theta g_{ij}$ についての Christoffel symbol $\in \Gamma_{ij}^k$; $R_{ij} \in$ Ricci tensor, $S_{ij} \in$ Schouten tensor: $S_{ij} = \frac{1}{n-2} (R_{ij} - \frac{R}{2(n-1)} e^\theta g_{ij})$ とし,

$$A_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - g_{ij} \Gamma_{1n}^k, A_{ij}^0 = S_{ij} - g_{ij} S_{1n}$$

とおく。このとき 方程式系 (C) は可積分であり, $n+2$

この解を持ち、それから得られる $\mathbb{P}^{n+1}$ への写像の像は 2 次超曲面に含まれる。 $\square$

注 1. この定理は実数係数でも成立する。双形的平坦な構造を持つ多様体 M は (その普遍被覆から) 球面上に覆射されるという定理 (Kuiper) の、覆射写像は方程式系 (C) を M 上に得られるということである。

注 2. $n = 2$ のときは 双形接統の最小主成分から定理は成立しない。

3. Siegel modular 群に対応する方程式系

3.1 modular 群 $\Gamma(z)$

D は n 次元 IV 型対称領域とある:

$$D = \left\{ (z^i) \in \mathbb{C}^n; (\operatorname{Im} z^1)(\operatorname{Im} z^n) - \sum_{j=2}^{n-1} (\operatorname{Im} z^j)^2 > 0, \operatorname{Im} z^1 > 0 \right\}$$

$n = 2$ のとき bidisc $H \times H$ (H 上半平面), $n = 3$ のとき 次数 2 の Siegel 上半平面 $\mathcal{H}_2$ である。 Q は $(n+2) \times (n+2)$ 対称行列:

$$\begin{aligned} (t^0, t^1, \dots, t^{n+1}) Q (t^0, t^1, \dots, t^{n+1}) \\ = -t^0 t^{n+1} + t^1 t^n - \sum_{j=2}^{n-1} (t^j)^2 \end{aligned}$$

Q の定める $\mathbb{P}^{n+1}$ の 2 次超曲面 $\Sigma \subset Q^n$ とおく。 D は埋め込み

$(z^1, \dots, z^n) \rightarrow (t^0, \dots, t^{n+1}) = (1, z^1, \dots, z^n, z^1 z^n - \sum (z^i)^2)$
 によって $\mathbb{Q}^n$ の領域となる。群 $\text{Aut}(D)$ は 群 $\{X \in \text{GL}(n+2, \mathbb{R}) ; XQ^+X = Q\} / \pm 1$ の index 2 の部分群
 と同一視される。 $\mathbb{Q}^n$ の自然な双形構造は

$$\omega = dz^1 dz^n + dz^n dz^1 - 2 \sum_{j=2}^{n-1} (dz^j)^2$$

で与えられる。

さて, $\Gamma \subset \text{Aut}(D)$ を不連続群, $D' \in \Gamma$ が free
 に作用する D の最大領域とし射影 $D' \rightarrow D'/\Gamma \in \pi$
 とかく。 $\text{Aut}(D)$ は D に双形的に作用するから $\pi_*(\omega)$
 は D'/Γ 上の正則双形構造である。今, $\sum g_{ij} dx^i dx^j$
 がこの $\pi_* \omega$ を表わす計量であれば §2.3 の定理
 によって可積分系が存在する。そして, これは π の逆写
 像を与えている。この方程式系を Γ に付随する UDE
 (一意に方程式) と呼ぶ。

一般に Γ に対してその UDE が存在するとしても
 それを具体的に求めることは必ずしも簡単ではない。これは
 計量 g_{ij} を求める一般的方法がないからである。我
 るの成功したケース $\Gamma = \Gamma(2) = \mathcal{H}_2$ に帰くして $\mathbb{H}_2$
 の Siegel modular 群, について次に述べる。

3.2 $\Gamma(2)$ の双形構造 $\pi^*\omega$ について

実 symplectic 群 $Sp(2, \mathbb{R})$ は

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GL(4, \mathbb{R}); \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & \\ & -I_2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

で定義される。群 $Aut(\mathcal{H}_2)$ は作用

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau^1 & \tau^2 \\ \tau^2 & \tau^3 \end{pmatrix} \longrightarrow (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}$$

によって $Sp(2, \mathbb{R})/\pm 1$ に同型である。 $\Gamma = GL(4, \mathbb{Z}) \cap Sp(2, \mathbb{R})$

は full modular 群, $\Gamma(2) = \{X \in \Gamma; X \equiv I_4 \pmod{2}\}$ は

レベル 2 の部分群である。 $\Gamma/\Gamma(2) \cong S_6$ (対称群)。 ι は

involution $\begin{pmatrix} \tau^1 & \tau^2 \\ \tau^2 & \tau^3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \tau^1 & -\tau^2 \\ -\tau^2 & \tau^3 \end{pmatrix}$ である。 ι は平面

$H_0 = \{\tau^2 = 0\}$ を固定している。 $\Gamma(2)$ の固定点全体は

$H = \Gamma H_0$ である。 H は空集合

$$\Xi = \{ \xi = (\xi^1, \dots, \xi^6) \in (\mathbb{P}^1)^{\times 6}; \xi^i \neq \xi^j \ (i \neq j) \}$$

を考へよう。 $PGL(2, \mathbb{C}) \times S_6$ が自然に Ξ に作用する。

Ξ の各点 ξ に対して $\mathbb{P}^2(u, v, w)$ の平面曲線

$$C(\xi) =: w^4 v^2 = (u - \xi^1 w) \cdots (u - \xi^6 w)$$

に対応させる。 $C(\xi) \cong C(\xi') \iff \xi = g \xi', \ g \in PGL$

$(2, \mathbb{C}) \times S_6$ である。 このとき

$$\Xi / PGL(2, \mathbb{C}) = \Lambda := \{(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3); \lambda^i \neq 0, 1, \lambda^i (i \neq j)\}$$

であり, 曲線

$$C(\lambda): w^3 v^2 = u(u-w)(u-\lambda^1 w)(u-\lambda^2 w)(u-\lambda^3 w)$$

の parameter 空間 になる。 $\text{Aut}(\Lambda) = S_6$ 。 $\exists \tau$, $H_1(C(\lambda), \mathbb{Z})$ の標準基底と $C(\lambda)$ の周期行列が (τ, I_2) になるようにとる。 $\tau \in \mathcal{H}_2 - F$ である。このとき対応

$$\Lambda \longrightarrow \mathcal{H}_2 - F; \lambda \longrightarrow \tau(\lambda)$$

は射影 $\mathcal{H}_2 - F \longrightarrow (\mathcal{H}_2 - F)/\Gamma(2) \cong \Lambda$ の逆写像 $\exists$ である。

$(\mathcal{H}_2 - F)/\Gamma = \Lambda/S_6$ である。同型 $\mathcal{H}_2 - F/\Gamma(2) \cong \Lambda$

であるように与える。 τ - θ 函数 $\theta_{g'g''h'h''}(\tau); g', g'', h', h'' = 0, 1, 2$

$$\begin{aligned} \theta_{g'g''h'h''}(\tau) = \sum_{p', p'' \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i \times \\ \{ (p' + \frac{g'}{2})^2 \tau^1 + 2(p' + \frac{g'}{2})(p'' + \frac{g''}{2}) \tau^2 + (p'' + \frac{g''}{2})^2 \tau^3 \\ + (p' + \frac{g'}{2})h' + (p'' + \frac{g''}{2})h'' \}) \end{aligned}$$

で定めると $\lambda^i(\tau)$ は

$$\lambda^1(\tau) = \left(\theta_{1100}/\theta_{0100} \right)^2 \left(\theta_{1000}/\theta_{0000} \right)^2$$

$$\lambda^2(\tau) = \left(\theta_{1100}/\theta_{0100} \right)^2 \left(\theta_{1001}/\theta_{0001} \right)^2$$

$$\lambda^3(\tau) = \left(\theta_{1000}/\theta_{0000} \right)^2 \left(\theta_{1001}/\theta_{0001} \right)^2$$

で与えられる。問題は

$$\pi_* \left(d\tau^1 d\tau^3 + d\tau^3 d\tau^1 - 2(d\tau^2)^2 \right)$$

に $\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3$ で表わすことができる。その計算には $\lambda^i(\tau)$

の時変異での状況を調べることに S_6 の簡単な不変式論が必要である。計算は厄介なので省略しておき論にだけ述べると

$$\begin{aligned} & \pi_*(d\tau^1 d\tau^3 + d\tau^3 d\tau^1 - 2(d\tau^2)^2) \\ \cong & (\lambda^1 - \lambda^2)\lambda^3(\lambda^3 - 1)(d\lambda^1 d\lambda^2 + d\lambda^2 d\lambda^1) \\ \text{共形の} & + (\lambda^2 - \lambda^3)\lambda^1(\lambda^1 - 1)(d\lambda^2 d\lambda^3 + d\lambda^3 d\lambda^2) \\ & + (\lambda^3 - \lambda^1)\lambda^2(\lambda^2 - 1)(d\lambda^3 d\lambda^1 + d\lambda^1 d\lambda^3) \end{aligned}$$

となる。これから $\Gamma(2)$ に付随する UDE と代わるには §2 の定理を適用すればよい。

4. P^{n+1} 内の超曲面

この § では §2 の定理を証明する。定理そのものはわかってしまえば計算でも証明できるので共形計量 $\sum g_{ij} dx^i dx^j$ 及び Wilczynski の不変量 β, γ (§2.2) を証明することにする。

4.1 まずユークリッド空間 E^{n+1} の超曲面 M^n と考えよう。 $\nabla \in E^{n+1}$ の Levi-Civita 接続; $\nu \in M$ の単位法ベクトル; $X, Y \in T_p M \in M$ の接ベクトルとあると, ベクトル $\nabla_X Y$ は M の接方向成分と直交成分とに分解される。

$$(2) \quad \nabla_X Y = \nabla'_X Y + h(X, Y)\nu.$$

∇' が M 上の Levi-Civita 接続になり, h が M の第2基本形式とよばれている。この分解はユークリッド運動群によってかわらない。 ∇' と h との間には, 超曲面として M が実現されていることを表現する重要な関係式 — Gauss の方程式と Codazzi-Minardi の方程式 — が成立する。これと同じことを $\mathbb{P}^{n+1}$ の超曲面について, 射影変換群と運動群として, 行いたい。まずわかることはこの運動群で不変な“法ベクトル”はとれようはないことである。しかし, 分解(2)の類似がやはり成立する。 ω を $\mathbb{P}^{n+1}$ の標準射影接続形式とすると M についての一般的条件のもとで, 一定のプロセスを行くと(後述のバンドルの reduction を行うこと),

$$(3) \quad \omega|_M = \pi + \tau$$

という分解が成立し, π は M 上の歪形接続を, τ は超曲面の(歪変)不変量を与える。さらに, π と τ との間には関係式 — やはり Gauss, Codazzi-Minardi とよぶ — が成り立ち, これによって $\mathbb{P}^{n+1}$ の超曲面が特徴づけられる。このことをもう少し詳しくいってみたい。

4.2 M^n を $\mathbb{P}^{n+1}$ の超曲面, $i: M \rightarrow \mathbb{P}^{n+1}$; $e_0: M \rightarrow \mathbb{C}^{n+2} \setminus \{0\}$ を i の local lift, $i(p) = [e_0(p)]$, とする。

にあるだろうか? e と $\tilde{e}$ の関係

$$\tilde{e} = g e \quad ; \quad g = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ \mu & c & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \in \text{PGL}(n+2)$$

で結びあはれることがわかることより

$$(7) \quad \mathbb{I}_{\tilde{e}} = \lambda^2 \mathbb{I}_e$$

である。すなわち

『 $\mathbb{I}_e$ の conformal class は frame e のとりかえにはよらない。』

とくに (h_{ij}) が非退化のとき $\mathbb{I}$ は M 上の正定形式と定める。 (h_{ij}) はユークリッド的に考えて超曲面の中の基本形式となるので、“非退化”の幾何的意味は了解して頂けたいと思う。3)より $\mathbb{R}$ -係数で $(h_{ij}) > 0$ とは局所的に曲面が凸であることを示す。今解(3)の π は $\mathbb{I}$ に対応する正定形式と見做すことができる。簡単のため (frame e とりかえて) $h_{ij} = \delta_{ij}$ とできたとする。このような性質をもつ frames の全体はバンドルとなる。 π の e への投影と表現するには π をこのバンドル上の線形形式と見做すのが自然である。しかし、このバンドルは “ n 次元空間” の次のように reduction とする。新しい tensor h_{ijk} と

$$\sum h_{ijk} \omega^k = dh_{ij} - \sum h_{ik} \omega_j^k - \sum h_{jk} \omega_i^k + (n+2) h_{ij} (\omega_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1})$$

によって定めよう。このとき $\sum h^{ij} h_{ijk} = 0$ ((h^{ij}) は (h_{ij})

の逆行列) かつ $\omega_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1} = 0$ となるように frame

を制限できることがわかる。そうすると 3-次対称形式

$$(8) \quad \text{III} = \sum h_{ijk} \omega^i \omega^j \omega^k$$

が不変の意味をもつこと、実際にはその conformal

class が frame に依存しないことが証明される。

これは Wilczynski の β, γ である: $\text{III} = \beta dx^3 + \gamma dy^3$ 。

(5) また $\text{II} = l dx^2 + 2 dx dy + m dy^2$ 。すなわち、

$\sum h_{ij} \omega_{n+1}^j - \omega_i^0 = \sum l_{ij} \omega^j$ によって l_{ij} を定めるとき

frame に $\sum h^{ij} l_{ij} = 0$ という条件を課す。そのような

frames の全体を P とおくと P は $\mathbb{C}^n \cdot \text{CO}(n)$ を

fibre とあるバンドルになる。このバンドルの上で π は

一意の意味をもち $\tau = \omega - \pi$ によって τ を定義

すればよい。 τ は h_{ijk}, l_{ij} 及び ω_{n+1}^0 より定まり、

実は M 上の 1-次微分形式とみなしてよいことが

わかる。条件 (5) を π と τ の言葉で書きかえれば

関係式を Gauss, Codazzi-Minardi の関係式という。

まとめ

定理 M^n を P^{n+1} 内の非退化超曲面とすると、 M は

芝形接続 π 及び "埋め込みの不変量" τ をもつ。逆に

π 及び τ が与えられ Gauss, Codazzi-Minardi の関係式

$\tau \neq 0$ とするとき, M は P^{n+1} の非退化超曲面として 群 $PGL(n+2)$ の自由度を除いて一意的に定まる。ただし $n \geq 3$ とする。 $\square$

注 3 $n=2$ のときは 共形接続の特殊性によって別の扱いが, $n=1$ のときは π のかわりに射影接続 π が出てくるので別の扱いが必要である。

系. π が 共形的に平坦であれば, $\tau=0$ とするとき Gauss, Codazzi-Minardi の関係式が成立し, このとき曲面は 2 次超曲面である。 $\square$

いずれも証明は省略する。詳しくは [S], [SY3] をみて頂きたい。§2 の定理は この系より 方程式系 (C) と方程式系 (4) $de = \omega e$ の対応関係とをいえば, 直ちに得られる。この対応は次のようである。まず (C) の基本解系, あるいは $n+2$ 次元ベクトルとある。 $z_1, \dots, z_n, z_{n+1}$ は z の偏微分から得られるベクトルとある。このとき

$$e_0 = z, \quad e_1 = z_1, \dots, e_n = z_n, \quad e_{n+1} = z_{n+1}$$

と定める。(C) は ω を次のようにとることにして (4) になる。

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & dx^j & 0 \\ A_{ik}^0 dx^k & A_{ik}^j dx^k & g_{ik} dx^k \\ B_k^0 dx^k & B_k^j dx^k & G_k dx^k \end{pmatrix}.$$

ただし, B_k^j, G_k は (C) にもう一度微分して得られる方程式

$$z_{ijn} = G_j z_{in} + B_j^k z_k + B_j^0 z$$

の係数である。

参考文献

- [K] N.H. Kuiper, On conformally flat spaces in the large, Ann. of Math. 50(1949), 916-924.
- [S] T. Sasaki, On the projective geometry of hypersurfaces, Equations différentielles dans le champ complexe (Colloque franco-japonais 1985), Hermann (1987).
- [SY1] T. Sasaki & M. Yoshida, Linear differential equations in two variables of rank four I, preprint 1987.
- [SY2] T. Sasaki & M. Yoshida, Linear differential equations in two variables of rank four II - The uniformizing equation of a Hilbert modular orbifold, preprint 1987.
- [SY3] T. Sasaki & M. Yoshida, Linear differential equations modeled after hyperquadrics, preprint 1987.
- [W] E.J. Wilczynski, Projective differential geometry of curved surfaces: first memoir, Trans. AMS 8(1907), 233-260; fourth memoir, ibid. 10(1909), 176-200.
- [Y1] M. Yoshida, Fuchsian differential equations, (aspects in math.), Vieweg Verlag 1987.
- [Y2] M. Yoshida, in preparation.