

実的方法による補間空間

と作用素の完全連続性

阪大理 早川 款達郎

§1 序

Banach 空間の連続線型作用素に関する凸型定理は, Calderon, Stein, Gagliardo, Lions-Peetre 等により, 2 種々の研究され, 各々 Complex Method 及び Real Method として [1] [2] に述べられている. 元来, これは, 作用素の連続性を問題にしたが, 1960 Krasnosel'skii [3] は L^p 空間の場合は上の凸型定理は作用素の完全連続性を保存することを示した. Persson [4] は更に広く, 作用素の定義の側の Banach 空間の pair がある仮定 (approximation hypothesis) を満たす場合に Krasnosel'skii と同様な定理が成り立つこと及びその仮定は十分に多くの Banach 空間の pair に対して満たれることを証明した.

我々は, ここで実的方法 (Real Method) の時は, Persson の仮定がなくても次の定理が成立することを示す.

(1)

定理 $[E_0, E_1], [F_0, F_1]$ を interpolation pair とし, T は $[E_0, E_1]$ から $[F_0, F_1]$ への完全連続な線型作用素とすると T は $S(\theta, p; E_0, E_1)$ から $S(\theta, p; F_0, F_1)$ への作用素として完全連続になる。但し $0 < \theta < 1, 1 \leq p < \infty$ 。

(注) $[F_0, F_1]$ の Approximation Hypothesis をみたすとは F_0 の任意の compact set K に対して $\mathcal{B}([F_0, F_1], [F_0, F_1])$ の中の一様有界な族 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_K$ として ① $\mathcal{P}(F_i) \subset F_0 \cap F_1 \quad i=0,1 \quad \forall P \in \mathcal{P}$.
② $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}$ かつ $\|(P_\varepsilon - I)x\|_{F_0} \leq \varepsilon \quad \forall x \in K$ をみたすものが存在することである。

記号

$E \subset F$; E は F の線型部分空間でかつ γ の γ へは連続。

$[E_0, E_1]$; interpolation pair

$\mathcal{B}([E_0, E_1], [F_0, F_1])$; $[E_0, E_1]$ から $[F_0, F_1]$ への有界線型作用素のなる Banach 空間. (= $\mathcal{B}(E_0, F_0) \cap \mathcal{B}(E_1, F_1)$)

$K([E_0, E_1], [F_0, F_1])$; 同じく完全連続線型作用素のなる上の γ の空間。

$$\ell^p_\theta(E) = \{ \{x^{(k)}\}_{k=0}^\infty ; x^{(k)} \in E, \{e^{\theta k} \|x^{(k)}\|_E\} \in \ell^p \}$$

$[E_0, E_1]$ に対し.

* $E_0 \cap E_1$ 及び $E_0 + E_1$ は 集合としての $E_0 \cap E_1$ 及び $E_0 + E_1$

に等し

$$\text{Max} \{ \|x\|_{E_0}, \|x\|_{E_1} \} \text{ 及び } \text{Inf} \{ \|x_0\|_{E_0} + \|x_1\|_{E_1} ; x = x_0 + x_1 \}$$

なる $\|x\|$ は x に対し Banach 空間となる。

$$* \quad w(p_0, \theta, E_0 ; p_1, \theta-1, E_1) \equiv \mathcal{L}_{\theta}^{p_0}(E_0) \cap \mathcal{L}_{\theta-1}^{p_1}(E_1)$$

$$S(p_0, \theta, E_0 ; p_1, \theta-1, E_1) \equiv \{ x = \sum_k x^{(k)} ; \{ x^{(k)} \} \in w(\dots) \}$$

$$\|x\|_S = \text{Inf} \{ \{ \|x^{(k)}\|_w ; \sum_k x^{(k)} (= \sum \{ x^{(k)} \}) = x \}$$

$$= : \tau \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

但し $\theta = 0, 1$ かつ $\theta \geq 1$ は $p = 1$ に $\theta \geq 1$ 。

$$* \quad \theta < 1 \Rightarrow w(p, \theta, E_0 ; p, \theta-1, E_1) \ni w(\theta, p ; E_0, E_1)$$

$$S(p, \theta, E_0 ; p, \theta-1, E_1) \ni S(\theta, p ; E_0, E_1)$$

と $\theta < 1$ 。

命題 1.

$$S(\nu, p_\nu ; w(\theta_0, p_0 ; E_0, E_1), w(\theta_1, p_1 ; E_0, E_1))$$

$$= w(\theta_\nu, p_\nu ; E_0, E_1)$$

但し $0 < \nu < 1$

$$(\theta_\nu, \frac{1}{p_\nu}) = (1-\nu)(\theta_0, \frac{1}{p_0}) + \nu(\theta_1, \frac{1}{p_1})$$

(3)

命題 2. (Lions, Peetre)

$$S(\nu, p; S(\theta_0, p; E_0, E_1), S(\theta_1, p; E_0, E_1)) \\ = S(\theta_0, p; E_0, E_1).$$

命題 3.

$$S(0, 1; E_0, E_1) = \overline{E_0 \cap E_1}^{(E_0)} \quad (E_0 \cap E_1 \text{ が } E_0 \text{ の } 2\text{-重閉}) \\ S(1, 1; E_0, E_1) = \overline{E_0 \cap E_1}^{(E_1)} \quad (E_0 \cap E_1 \text{ が } E_1 \text{ の } 2\text{-重閉})$$

§ 2. 定理の証明.

定理は次の 2 段階に分けて証明される.

$$(I) \quad T \in K([E_0, E_1], [F_0, F_1])$$

$$\Rightarrow T \in K(S(\theta, 1; E_0, E_1), S(\theta, 1; F_0, F_1)) \quad 0 < \theta < 1$$

$$(II) \quad T \in K(S(\theta, 1; E_0, E_1), S(\theta, 1; F_0, F_1))$$

かつ

$$T \in \mathcal{B}(S(\theta, \infty; E_0, E_1), S(\theta, \infty; F_0, F_1))$$

$$\Rightarrow T \in K(S(\theta, p; E_0, E_1), S(\theta, p; F_0, F_1)) \quad 1 \leq p < \infty$$

命題 3 によれば, (I) を示すには, (I') を示せばよい.

$$(I') \quad T \in K([S(0, 1; E_0, E_1), S(1, 1; E_0, E_1)], [F_0, F_1])$$

$$\Rightarrow T \in K(S(\theta, 1; E_0, E_1), S(\theta, 1; F_0, F_1)).$$

今 $T \in \mathcal{L}([E_0, E_1], [F_0, F_1])$ に対し, 次のような $\tilde{T}$ を定義する.

$$\tilde{T} : w(\theta, p : E_0, E_1) \longrightarrow w(\theta, p : F_0, F_1).$$

$$\tilde{T}\{x^{(k)}\} = \{Tx^{(k)}\} \quad \text{if } \{x^{(k)}\} \in w(\theta, p : E_0, E_1)$$

よって $\tilde{T}$ は有界線型作用素であることがわかる.

次のような性質をもつ.

$$T \in K(S(\theta, p : E_0, E_1), S(\theta, p : F_0, F_1))$$

$\Leftrightarrow$

$$\Sigma \circ \tilde{T} \in K(w(\theta, p : E_0, E_1), S(\theta, p : F_0, F_1)).$$

$$\left(\begin{array}{ccc} w(\theta, p : E_0, E_1) & \xrightarrow{\tilde{T}} & w(\theta, p : F_0, F_1) \\ \downarrow \Sigma & & \downarrow \Sigma \\ S(\theta, p : E_0, E_1) & \xrightarrow{T} & S(\theta, p : F_0, F_1) \end{array} \right)$$

したがって, $\Sigma \circ \tilde{T} = T \circ \Sigma$ であることは $\Leftrightarrow$ はあきらかである.

ある $\Leftrightarrow$ は, $S(\theta, p : E_0, E_1)$ の基底は Σ による.

$w(\theta, p : E_0, E_1)$ にも導入されたものである.

$w(\theta, p : E_0, E_1)$ には次のような projection P_k, P_+, P_-

を考える.

$$P_k \{x^{(k)}\} = \{\dots, 0, 0, \dots, 0, x^{(-k+1)}, \dots, x^{(0)}, \dots, x^{(k-1)}, 0, 0, \dots\}$$

$$P_+ \{x^{(n)}\} = \{ \dots, 0, \dots, 0, x^{(n)}, x^{(n)}, \dots, x^{(n)}, \dots \}$$

$$P_- = I - P_+.$$

よ注意によれば (I) は (I') と同値である.

$$(I'') \Sigma \tilde{T} \in K([w(0,1; E_0, E_1), w(1,1; E_0, E_1)], [F_0, F_1])$$

$$\Rightarrow \Sigma \tilde{T} \in K(w(0,1; E_0, E_1), S(0,1; F_0, F_1)).$$

と $n \geq 2$ 注意の $k \geq 1$ に對して

$$\Sigma \tilde{T} \cdot P_k \in K(w(0,1; E_0, E_1), S(0,1; F_0, F_1)).$$

$$\text{は } \tilde{T} \cdot P_k \in K(w(0,1; E_0, E_1), w(0,1; F_0, F_1)).$$

が導かれる。

$$\text{従つて } \Sigma \tilde{T} \cdot P_k \text{ は } \Sigma \tilde{T} \text{ に } \mathcal{L}(w(0,1; E_0, E_1), S(0,1; F_0, F_1))$$

の中で収束するとは証明すければよい。

$$\text{即ち } \Sigma \tilde{T} \cdot (I - P_k) \rightarrow 0 \text{ in } \mathcal{L}(w(0,1; E_0, E_1), S(0,1; F_0, F_1)).$$

以下 $\mathcal{L}(w(\theta, p; E_0, E_1), S(\theta, p; F_0, F_1))$ のノルムを $\|\cdot\|_{\theta, p}$ とかくことにしよう。

すると、命題1.及び2.と、インターポレーション定理によつて、

(6)

$$\begin{aligned}
& \| \Sigma \circ \tilde{T} \circ (I - P_k) \|_{0,1} \\
& \leq \| \Sigma \circ \tilde{T} \circ (I - P_k) P_+ \|_{0,1} + \| \Sigma \circ \tilde{T} \circ (I - P_k) P_- \|_{0,1} \\
& \leq C \{ \| \Sigma \circ \tilde{T} \circ (I - P_k) P_+ \|_{0,1}^{1-\theta} \| \Sigma \circ \tilde{T} \circ (I - P_k) P_+ \|_{1,1}^{\theta} + \\
& \quad + \| \Sigma \circ \tilde{T} \circ (I - P_k) P_- \|_{0,1}^{1-\theta} \| \Sigma \circ \tilde{T} \circ (I - P_k) P_- \|_{1,1}^{\theta} \} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \| \Sigma \circ \tilde{T} \circ (I - P_k) P_+ \|_{0,1} \leq \| \Sigma \circ \tilde{T} \|_{0,1} \leq \| T \| \\
& \| \Sigma \circ \tilde{T} \circ (I - P_k) P_- \|_{1,1} \leq \| \Sigma \circ \tilde{T} \|_{1,1} \leq \| T \|
\end{aligned}$$

$$\text{従, } \| \Sigma \circ \tilde{T} \circ (I - P_k) P_+ \|_{1,1} \rightarrow 0$$

$$\| \Sigma \circ \tilde{T} \circ (I - P_k) P_- \|_{0,1} \rightarrow 0$$

と示めせばよい。

より強く次の補題が成立する。

補題 1.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \wedge x$$

$$\| \Sigma \circ \tilde{T} \circ (I - P_N) P_- x \|_{F_0} \leq \varepsilon \| (I - P_N) P_- x \|_{W(0,1; E_0, E_1)}$$

$$\forall x \in W(0,1; E_0, E_1) \quad \forall N \geq N_\varepsilon$$

同様にして

$$\| \Sigma \circ \tilde{T} \circ (I - P_N) P_+ x \|_{F_1} \leq \varepsilon \| (I - P_N) P_+ x \|_{W(1,1; E_0, E_1)}$$

$$\forall x \in W(1,1; E_0, E_1) \quad \forall N \geq N_\varepsilon$$

(II) は (I) に 対して 考へ と 同様 に.

$$\| \Sigma \circ \tilde{T} \circ (I - P_k) \|_{\theta, p} \rightarrow 0 \quad \varepsilon \text{ 示す 可なり}$$

$$\| \Sigma \circ \tilde{T} \circ (I - P_k) \|_{\theta, 1} \rightarrow 0 \quad \varepsilon \text{ 示す 可なり}$$

これは 次の補題から出る.

補題 2.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon$$

$$\| \Sigma \circ \tilde{T} \circ (I - P_N) x \|_{S(\theta, 1; F_0, F_1)} \leq \varepsilon \| (I - P_N) x \|_{W(\theta, 1; E_0, E_1)}.$$

補題 1 と 2 は 全く 同一型 を し ている か?

補 1 z は ℓ^1 の 性質

$$\begin{aligned} \| \{ x^{(k)} \} \|_{\ell^1} &= \sum_{k \geq 1} \| (P_{k+1} - P_k) P_+ \{ x^{(k)} \} \|_{\ell^1} \\ &\quad + \sum_{k \geq 1} \| (P_{k+1} - P_k) P_- \{ x^{(k)} \} \|_{\ell^1} \end{aligned}$$

補題 2 z は ℓ^∞ の 次の よう な 性質.

$$x = \{ x^{(k)} \}, y = \{ y^{(k)} \} \in \ell^\infty \quad \text{かつ} \quad \| x \|_{\ell^\infty} \leq 1, \| y \|_{\ell^\infty} \leq 1$$

$$x^{(k)} \neq 0 \Rightarrow y^{(k)} = 0 \quad \text{と 可なり}$$

$$\| x + y \|_{\ell^\infty} \leq \max \{ \| x \|_{\ell^\infty}, \| y \|_{\ell^\infty} \} \leq 1.$$

を用いて証明される.

(8).

文 献 表.

- [1] Calderon Studia Math. 24 ('64) pp 113-190. Intermediate spaces and interpolation, the complex method.
- [2] Lions-Peetre I.H.E.S. 19 ('64) p 5-68. Sur une classe d'espaces d'interpolation.
- [3] Krasnoselskii Dokl. A. Nauk 131 ('60) 246-248. On a theorem of M. Riesz.
- [4] Persson Ark. Math. 5 ('64) 215-219. Compact linear mappings between interp. spaces.
- [5] Peetre. J. Ric. di Mat. 12 ('63) 248-261. Sur le nombre de paramètres dans la définition de certains espaces d'interpolation.