

ランダム力学系と確率カオス

佐藤譲*

(北海道大学・電子科学研究所 / 理学研究院数学部門)

Yuzuru Sato

(RIES / Department of Mathematics, Hokkaido University)

1 ランダム力学系とランダムアトラクター

決定論的ダイナミクスと確率論的ノイズが混在する動力学で生じる非線形確率現象 (nonlinear stochastic phenomena) は, ランダム力学系理論 [1][2] で扱うことができる. 例えば勾配系の確率共鳴 (stochastic resonance)[3], 振動系のノイズ同期 (noise-induced synchronization)[4], カオス的力学系の雑音誘起カオス (noise-induced chaos)[5][6] といったよく知られた雑音誘起現象は, ランダム力学系の分岐現象として解析できる [7]. 以下では, ランダム力学系理論の中心的概念であるランダムアトラクターについて具体例に基づいて解説する.

ランダム力学系理論では

$$x_{n+1} = f(x_n) + \omega_n \quad (\omega_n : \text{一様乱数列}) \quad (1)$$

あるいは

$$dx = f(x)dt + g(x)dW_t \quad (W_t : \text{Wiener 過程}) \quad (2)$$

といったダイナミクスを扱う. こういった系のアトラクターはランダムアトラクターとよばれる. 駆動系 (driving system) を θ として (1) を

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \phi(n, \theta^n \omega_0) x_0, \\ \omega_{n+1} &= \theta \omega_n, \end{aligned} \quad (3)$$

*ysato@math.sci.hokudai.ac.jp

とかきなおし, x_0, ω_0 を初期値, $\omega = \{\omega_n\}$ をノイズ系列, $x = \{x_n\}$ を軌道とすると, ランダム力学系 (ϕ, θ) のアトラクターは以下の2通りの方法で定義される.

[Random forward attractor]

ランダムフォワードアトラクター $A(\omega)$ は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi(n, \theta^n \omega)B, A(\omega)) = 0, \text{ a.s.} \quad (4)$$

を満たす (θ, ϕ) の不変集合である.

[Random pullback attractor]

ランダムプルバックアトラクター $A'(\omega)$ は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi(n, \theta^{-n} \omega)B, A'(\omega)) = 0, \text{ a.s.} \quad (5)$$

を満たす (θ, ϕ) の不変集合である.

ここで $\text{dist}(X, Y)$ は Hausdorff 距離, B は状態空間内の有界集合で, 初期値の集まりと考えてもよい. 決定論力学系では両者は同一であり, プルバックアトラクターを考える必要はない. プルバックアトラクターの定義には時間を引き戻す操作が入っており, 直観的にわかりにくい, 多くの場合スナップショットアトラクター (snapshot attractor) で近似できることが明らかになってきている [8]. スナップショットアトラクターは状態空間上のたくさんの「粒子」を同一の力学則の下で時間発展させたときの粒子集団の分布を, ある時刻でスナップショットをとって記述したものであり, 力学系の大域的な混合性の解析に用いられてきた [9][10].

ランダム力学系でも定常分布, Lyapunov 指数, Kolmogorov-Sinai エントロピーといった不変量が定義でき [11][12], 性質のよい系では, 乗法エルゴード定理により Lyapunov 指数 (あるいはスペクトル) が一意に定まる. この場合 Pesin の等式も成り立つので Kolmogorov-Sinai エントロピーも正の Lyapunov 指数の和として同様に定まる. とくに最大 Lyapunov 指数 λ が正の場合, そのアトラクターはランダムストレンジアトラクター (random strange attractor) [13][14][15], その動力学は確率カオス (stochastic chaos) とよばれる [16][17]. 例えば Ornstein-Uhlenbeck 過程

$$dx = -\mu x dt + \sigma dW_t \quad (\mu, \sigma > 0) \quad (6)$$

を考えると, そのアトラクターはランダムポイントアトラクター, 不変分布は対応する Fokker-Planck 方程式の定常解 $\sqrt{\mu/\pi\sigma^2} \exp(-\mu x^2/\sigma^2)$, Lyapunov 指数は

$-\mu$ である。一般的なランダム力学系ではこういった可解な例は少ないが、非線形確率現象を理解するにあたり、非線形動力学研究でそうであったように、方程式を解く必要がない場合も多い。最大 Lyapunov 指数を λ とすると、前述のノイズ同期は $\lambda < 0$ のランダムポイントアトラクターであり、雑音誘起カオスは $\lambda > 0$ のランダムストレンジアトラクターである。確率共鳴は非自励力学系の周期的なランダムアトラクターであり、後述するサンプルメジャーの運動と外力とのタイムスケール同調の問題となる [18]。

2 確率 Lorenz 方程式とランダムストレンジアトラクター

確率カオスを示すランダム力学系の例として、確率 Lorenz 方程式 (stochastic Lorenz equations) を以下であたえる [15]。

$$\begin{aligned} dx &= s(x - y)dt + \sigma x dW_t, \\ dy &= (rx - y - xz)dt + \sigma y dW_t, \\ dz &= (-bz + xy)dt + \sigma z dW_t. \end{aligned} \quad (7)$$

例えば $s = 10, r = 28, b = 8/3$, および $\sigma = 0.3$ の場合, ある時刻 $t = t_0$ でのブルバックアトラクター上のサンプルメジャーは図1のようになる。サンプルメジャーとはあるノイズ系列を固定し、長時間平均も集団平均もとらずに、ある過去の状態から出発した系がとりうる可能なすべての状態を時刻 $t = t_0$ でサンプルしたときに得られる分布のサポートであり、その構成法から disintegrated measure とも呼ばれる [19]。数値計算をすると、複雑な構造を持つサポートの上に時刻 t での軌道分布 ρ_t が形成され、ある特徴的な時間スケールで変化していく様子が観察される。この ρ_t を長時間平均したものが不変分布であり、確率微分方程式7に対応する Fokker-Planck 方程式の定常解である。確率 Lorenz 系ではサンプルメジャーは不安定多様体上につぶされて集まる。この現象は filamentation とよばれる [15]。一般に最大 Lyapunov 指数が負のランダム力学系ではサンプルメジャーは局在化する傾向を示す。ノイズ同期がその極端な例である。ランダム力学系では接線方向に軌道が広がりを持って分布するため、時間連続系であっても中立方向に対応する null-Lyapunov 指数が存在するとは限らない。例えばランダム力学系 (7) は

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \simeq (0.710, -0.460, -14.14)$ という Lyapunov スペクトラムを持つことが数値的に確かめられる。このため緩和時間は λ_3 でなく、 λ_2 に概ね支配され、決定論 Lorenz 系より長くなる [8].

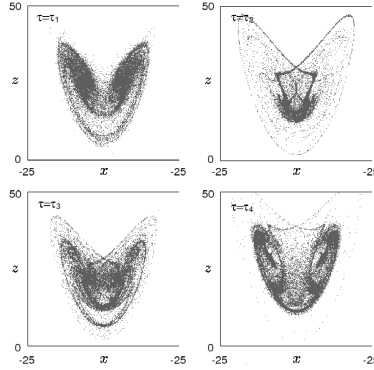


図 1: 確率 Lorenz 方程式のランダムアトラクター: ある時刻におけるプルバックアトラクター上のサンプルメジャー上の分布が濃淡で表されている。パラメータは $s = 10, r = 28, b = 8/3, \sigma = 0.3$. 各 τ はある時刻 $t = t_0$ を固定したときの引き戻し時間で $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \tau_4$.

確率 Lorenz 方程式は気象の予測不可能性を考えるために考案されたモデルである [15]. 時空間的に局所的な天候変動だけに興味があり、全系の予測に興味がない場合などを考えれば、この観点の有効性が理解できる。決定論カオスの予測不可能性は、我々が現象の初期値を完全に測定できないために生じる。例えば Bernoulli 写像の軌道は、初期値を任意精度で測定できるのなら、その情報が消失しない限り完全に予測可能である。一方で実現象では系に外部から攪乱が加わることにより、ときにその振舞いが質的に変化する。こういった非自励力学系あるいはランダム力学系における非線形現象の予測可能性については、広範囲の応用があるにもかかわらず、概念的に明確化されていない。この問題の古典的な研究としては例えば [20] を参照。流体の実験時系列からランダムストレンジアトラクターを構成し、集団運動を確率カオスとして解析する、という研究も最近著者らによりなされている [21]

3 結び

ランダム力学系の理論は決定論力学系の理論を包含しているが、より弱い体系になっている。実際、ランダム力学系では、非双曲性に由来する状態空間の微細構造は破壊される、あるいは、ノイズ項の存在により不変分布が自明に存在する、という形で力学系理論の典型的問題のいくつかが消滅する。この性質が利点なのか欠点なのかは問題と立場による。例えば Newhouse 現象や Arnold 拡散といった数学的構造が非線形現象として実現するか、という物理的な問いに対して、ノイズあるいは系の大自由度性により微細構造が覆い隠され、統計的に支配的な構造のみが観測される、とする立場がある。しかし微細構造がノイズによってむしろ顕在化することもある。例えば雑音誘起カオスは三周期窓内の測度 0 の攪拌集合が顕在化する非線形確率現象である。全系の決定論的記述か、適度に粗視化された確率論的記述か、どちらかに焦点を定めた方が多くの問題で見通しがよいかもしれない。しかし著者は実現象としてのカオスを、閉じた力学系の理論のみに頼って研究することにためらいを感じており、力学系に不定外力やノイズを加えたときの応答や制御という視点から、時空カオスを含み非線形現象をより深く理解できる可能性がある、と考えている。別の論点もある。例えば確率過程論で確率カオスはどう解釈されるか。確率カオスはカオスの遍歴 [22] の下位概念と位置づけることも可能だが、一般にランダム力学系理論は大自由度系のメゾスケール記述としてどの程度有効か。ランダム力学系、非自励力学系の理論により開放系のダイナミクスの理解がどの程度進むか。時系列埋め込み論 [23] のランダム力学系への拡張適用 [24] は統計科学とどのように交わるか。確率カオスの予測制御 [25] は可能か。こういった問いの妥当性は、具体的な研究を通して今後検証されていくものであろう。

本稿ではランダム力学系におけるランダムストレンジアトラクターと確率カオスについて解説した。ランダム力学系のカオス的振る舞いや複雑性については様々な議論がわき起こっており、その理解のためには既存の決定論力学系理論の概念を外挿するだけでなく、新しい概念を確立していく必要があるかもしれない。近年になって複数の分野で非自励力学系やランダム力学系の理論の有用性が認識され始めている [25][26][27]。力学系理論による非線形物理学の精緻化が、力学系理論自体の発展を促したように、本稿で考察したような非線形確率現象の現象論的研究や概念分析、モデリングや予測制御といった研究が、ランダム力学系、非自励力学系の数学的理論への有意義なフィードバックを起こすことを期待したい。

参考文献

- [1] Andrzej Lasota and Michael C Mackey. *Chaos, fractals, and noise: stochastic aspects of dynamics*, volume 97. Springer Science & Business Media, 1994.
- [2] Ludwig Arnold. Random dynamical systems springer monographs in mathematics. *Springer Berlin*, 1998.
- [3] Roberto Benzi, Giorgio Parisi, Alfonso Sutera, and Angelo Vulpiani. Stochastic resonance in climatic change. *Tellus*, 34(1):10–16, 1982.
- [4] Junnosuke Teramae and Dan Tanaka. Robustness of the noise-induced phase synchronization in a general class of limit cycle oscillators. *Physical review letters*, 93(20):204103, 2004.
- [5] Gottfried Mayer-Kress and Hermann Haken. The influence of noise on the logistic model. *Journal of Statistical Physics*, 26(1):149–171, 1981.
- [6] James P Crutchfield, JD Farmer, and Bernardo A Huberman. Fluctuations and simple chaotic dynamics. *Physics Reports*, 92(2):45–82, 1982.
- [7] Yuzuru Sato, Thai-Son Doan, Jeroen S W Lamb, and Martin Rasmussen. Stochastic bifurcation in random logistic maps. *to be published*, 2015.
- [8] Yuzuru Sato, Mickaël D Chekroun, and Michael Ghil. Snapshot attractors vs. pullbank attractor. *to be published*, 2015.
- [9] Filipe J Romeiras, Celso Grebogi, and Edward Ott. Multifractal properties of snapshot attractors of random maps. *Phys. Rev. A*, 41(2):784, 1990.
- [10] Tamás Bódai, György Károlyi, and Tamás Tél. Fractal snapshot components in chaos induced by strong noise. *Phys. Rev. E*, 83(4):046201, 2011.
- [11] Takehiko Morita. Asymptotic behavior of one-dimensional random dynamical systems. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 37(4):651–663, 1985.
- [12] François Ledrappier and L S Young. Entropy formula for random transformations. *Probability theory and related fields*, 80(2):217–240, 1988.

- [13] David Ruelle. Small random perturbations of dynamical systems and the definition of attractors. *Communications in Mathematical Physics*, 82(1):137–151, 1981.
- [14] Kevin K Lin and Lai-Sang Young. Shear-induced chaos. *Nonlinearity*, 21(5):899, 2008.
- [15] Mickaël D Chekroun, Eric Simonnet, and Michael Ghil. Stochastic climate dynamics: Random attractors and time-dependent invariant measures. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 240(21):1685–1700, 2011.
- [16] Tomasz Kapitaniak. Stochastic chaos. In *Proceedings of the XII Symposium “Vibrations in Physical Systems”*, pages 149–150, 1986.
- [17] Ludwig Arnold. Lyapunov exponents of nonlinear stochastic systems. *Nonlinear Stochastic Dynamic Engineering Systems, IUTAM Symposium*, pages 181–201, 1988.
- [18] Anna M Cherubini, Jeroen S W Lamb, Martin Rasmussen, and Yuzuru Sato. A random dynamical systems perspective on stochastic resonance. <https://arxiv.org/abs/1510.06973>, 2015.
- [19] Lai-Sang Young. What are SRB measures, and which dynamical systems have them? *J. Stat. Phys.*, 108(5):733–754, 2002.
- [20] Robert Shaw. The dripping faucet as a model chaotic system. *Aerial Press*, 1984.
- [21] Davide Faranda, Yuzuru Sato, Berangere Saint-Michel, and et. al. Stochastic chaos in a turbulent swirling flow. arxiv.org/abs/1607.08409., 2016.
- [22] Kunihiko Kaneko and Ichiro Tsuda. Chaotic itinerancy. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 13(3):926–936, 2003.
- [23] Norman H Packard, James P Crutchfield, J Doyné Farmer, and Robert S Shaw. Geometry from a time series. *Phys. Rev. Lett.*, 45(9):712, 1980.

- [24] Yuzuru Sato. Random dynamics from time series. *RIMS Technical Report*, 1827:24–32, 2012.
- [25] Samuel Zambrano, Miguel AF Sanjuán, and James A Yorke. Partial control of chaotic systems. *Physical Review E*, 77(5):055201, 2008.
- [26] George Haller. A variational theory of hyperbolic lagrangian coherent structures. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 240(7):574–598, 2011.
- [27] Guillaume Lajoie, Kevin K Lin, and Eric Shea-Brown. Chaos and reliability in balanced spiking networks with temporal drive. *Physical Review E*, 87(5):052901, 2013.