

SL(2, F) 上の不変超関数の端点分解について

京大 理 松本茂樹

F を、剰余体の標数が 2 でない非アルキメデス的局所体とし $G = \text{SL}(2, F)$ とする。わいわいは、 G 上の任意の不変超関数が軌道的測度 (G のひとつの共役類に support された不変超関数) の重ね合わせとして得られることを示す。このことにより P. J. Sally, Jr. and J. A. Shalika [1] の序文において提出された問題 “すべての G 上の不変超関数が Fourier 変換をもつか” に肯定的な答を与えることができる。

定理を述べるために定義と記号を用意する。

定義 G の閉部分集合 B で、 G のコンパクトな開部分集合 A を用いて $\{gag^{-1}; g \in G \text{ かつ } a \in A\}$ の形にかけるものを tube という。また、このよりの A を tube B の slice という。

記号 G の部分集合 N で、任意の tube B に対して $N \cap B$ が B の slice になるものをひとつ固定し、 $\mathcal{Q} = \{\nu; \nu \text{ は軌道的測度で } \nu(N) = 1\}$ とおく。これは G 上のラドン測度全体の

なす空間 M の部分集合だが、 $\mathcal{Q}$ には M の漢位相に関する相対位相を入れておく。 G の正則元の全体を G' とし、 $G'' = G - G'$ とおく。 また、 $\mathcal{Q}$ の元で、正則元からなる共役類に対応するものの全体を $\mathcal{Q}'$ とし、 $\mathcal{Q}'' = \mathcal{Q} - \mathcal{Q}'$ とおく。 このとき $\mathcal{Q}'$ は零次元の、距離の付く局所コンパクト空間となり、 $\mathcal{Q}''$ は 10 個の元 $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{10}$ からなる集合である。 G 上の Schwartz 空間 $\mathcal{S}(G)$ から $\mathcal{Q}$ 上の連続関数全体のなす空間 $C(\mathcal{Q})$ への線型写像 J を $J(f)(\nu) = \nu(f)$ ($f \in \mathcal{S}(G)$, $\nu \in \mathcal{Q}$) で定める。 さて、 f が G' 上で 0 なら $J(f)$ の台はコンパクトだが、一般にはそうではない。 そこで $\mathcal{S}(G)$ の元 $f_1, f_2, \dots, f_{10} \in 10$ 行 10 列の行列 $(\nu_i(f_j))$ が正則になるようにとり、その逆行列を (s_{ij}) として $i=1, 2, \dots, 10$ に対して $c_i = \sum_j s_{ij} \nu_j$ とおくと $\mathcal{L}: f \mapsto J(f - \sum_i c_i(f) f_i)$ は $\mathcal{S}(G)$ から $\mathcal{Q}$ 上の Schwartz 空間 $\mathcal{S}(\mathcal{Q})$ への全射線型写像となる。

定理 $\mathcal{S}(\mathcal{Q})$ の代数的双対空間 $\mathcal{S}(\mathcal{Q})^*$ の元 α と $(\lambda_i) \in \mathbb{C}^{10}$ に対して $\alpha \circ \mathcal{L} + \sum_i \lambda_i c_i$ を対応させることにより $\mathcal{S}(\mathcal{Q})^* \oplus \mathbb{C}^{10}$ から G 上の不変超関数全体のなす空間への線型同型が得られる。

[1] P.J. Sally, Jr. and J.A. Shalika, The Fourier transform on SL_2 over a non-archimedean local field, (preprint)