

拡大的写像と特異葉層構造

稲葉尚志 (千葉大教養)

松元重則 (日大理工)

1. 1986年、平出耕一氏 ([1]) は、次の注目のべき事実を示した。

定理 (平出) 閉曲面上のあらゆる拡大的写像は、(擬) Anosov 同相に位相共役であり、従って、特に S^2 上には存在しない。

距離空間 X 上の同相写像 f が "拡大的" であるとは、条件

$$\exists \varepsilon > 0 ; d(f^n x, f^n y) < \varepsilon \quad (\forall n) \implies x = y$$

を満たすことである。いま、

$$W_\varepsilon^s(x) = \{ y \in X \mid d(f^n x, f^n y) < \varepsilon, \forall n \geq 0 \}$$

$$W_\varepsilon^u(x) = \{ \dots \dots \dots \forall n \leq 0 \}$$

とおくならば、拡大的であることは次と同値である。

$$\exists \varepsilon > 0 ; \text{Card } W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y) \leq 1, \quad (\forall x, y)$$

平出氏の手法は、この条件のもとで、 $W_\varepsilon^\sigma(x)$ 達の位相構造を調べることにある。

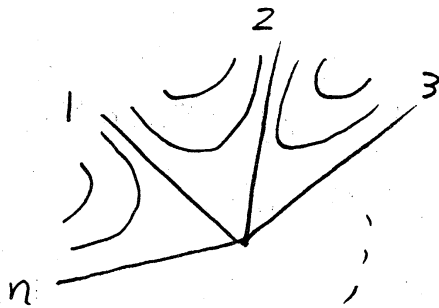
以下、 X を閉曲面としたとき、これについての彼の結論は次のとおりである。

$\exists \gamma^s, \gamma^u$: n -prong 型特異点 ($n \geq 3$) を許す

C^0 級葉層構造

s.t. (1) $W_\varepsilon^\sigma(x)$ は、 γ^σ の拡大された意味での葉における x の連結近傍 ($\sigma = s, u$)

(2) γ^s と γ^u は横断的



n -prong 型特異点

(1) より γ^σ が、 $\mathcal{F}$ に 2 不変なことがわかる。

このことから、 $\mathcal{F}$ が (擬) Anosov 同相 γ 、位相変換であることを示すのは容易である。また、prong 型特異点の指数は負であり、Poincaré-Lefschetz 公式より、 X の Euler 数は非正であること

がわかり 従って $X \neq S^2$ である。

2. 本講演において扱うのは 閉有向3-多様体 M の上の、(非特異)拡大的流れである。目標は、ある種の 3-多様体上の非存在定理である。

主定理 球面状3-多様体 M の上には、拡大的流れは存在しない。

M 上の非特異流れ φ_t が拡大的であるとは、条件 $\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0$ s.t.

$$d(\varphi_t(x), \varphi_{h(t)}(y)) < \varepsilon \quad (\forall t) \quad \exists h \in \text{Homeo}^+(\mathbb{R}, 0)$$

$$\Rightarrow y = \varphi_\tau(x), \quad |\tau| < \delta$$

をみたすことである。

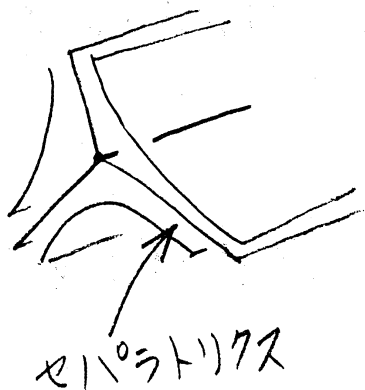
また M が球面状であるとは、 $\pi_3(M) \neq \{1\}$ か または、 $\pi_0(M) \neq \{1\}$ のことである。言い換えれば、

$$M: \text{球面状} \iff \begin{array}{l} 1) \pi_1(M) \text{ が有限群} \\ \text{または} \\ 2) M = M_1 \# M_2 \text{ (非自明に)} \\ \text{または,} \\ 3) M = S^2 \times S^1 \end{array}$$

3. 証明の文略は次の通りである。

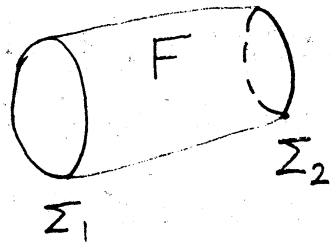
まず、 φ_t が与えられたとき、その局所切断面の族 $\{D_t\}$ を十分小さくさんとしておく。これに対する初帰写像 (1st return map) f を考える。 f は、連続写像では無いが、 f^{-1} も存在し、**1** が述べた拡大的なる条件を満たすことがすぐわかる。

この f に 平出氏の方法を適用するのは、鬼いの外、面倒な議論になるのであるが、岡正俊氏が ([2]) にて、成功を収めている。従って、切断面上に、 m -prong 型 ($m \geq 3$) 特異点の葉層構造 $\mathcal{G}^S$ が得られるわけである。 $\mathcal{G}^S$ は初帰写像 f にて不変であるから、流れ φ_t により流すことができて、 M^3 上の余次元 1 葉層構造 $\mathcal{G}^S$ が得られる。 $\mathcal{G}^S$ の特異点は下図のような構造をしている。

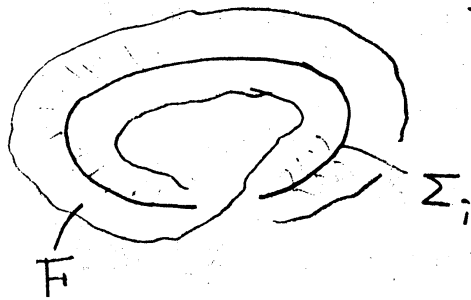


特異点の集合は、有限個の埋め込まれた円の和をなす。 $\gamma = 2$ のような特異点のことを、円 prong 型 という。

また、特異点から出る葉のことを、セパラトリクスという。



左図のような、特異点集合 Σ_1 から Σ_2 に行く葉 F のことを、特異点接続葉という。 F は、 Σ_1 のまわりで下図のようにねじれていてもよい。



すぐにわかる G^S の性質を列挙すると、

- (1) セパラトリックスは、開円筒と同相。
- (2) 特異点接続葉はない。

よって

- (3) コンパクト葉はない。

4. 証明の最終段は、次の Novikov コンパクト葉定理の拡張である。

定理 (Novikov) 球面状多様体上の葉層構造は、コンパクト葉を持つ。

この拡張として,

定理 n -円 prong 型特異集合 ($n \geq 3$) を持つ葉層構造が **3** の条件 (1), (2) をみたせば, コンパクト葉が存在する。

証明は, もとからの Novikov の定理の証明を, 変えることになるが, 気をつけなくてはならないのは C_f^s は横断的に向うづけられてはいないということである。また有限被覆になってもこれは解消されないということである。(奇数円-prong がある場合) 従って, Poincaré-Bendixson の定理は, もはや成り立たず (Rosenberg の Labyrinth の例) これに基づく議論は回避せねばならない。

注意として, 1-円 prong 型特異点の存在を許せば上の定理は, もはや成り立たない。
(指数を単に考えるだけなら, よさうにみえるが。)
くわしくは [3] を参照していただきたい。

参考文献

1. K. Hiraide, Expansive homeomorphisms on compact surfaces, Preprint
2. M. Oka, Expansive flows on 3-manifolds have Markov families, In Preparation,
3. T. Inaba-S. Matsumoto, Nonsingular expansive flows and foliations with circle prong singularities, Preprint