

量子化に関する Kaup の論文について

東 教 丸 理 物 理 小 寺 武 康

D. J. Kaup は "Exact Quantization of the Non-linear Schrödinger Equation" という表題の論文を書いているが、先づその論文の概要を述べ、その意味するところをしらべて見る。

D. J. Kaup の論文の概要

1 次元の nonlinear Schrödinger 方程式

$$i\hbar \psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi_{xx} - \epsilon^2 (\psi^* \psi) \psi$$

は

$$v_{1x} + i\epsilon v_1 = \frac{\epsilon}{\hbar} m^{1/2} \psi v_2$$

$$v_{2x} - i\epsilon v_2 = -\frac{\epsilon}{\hbar} m^{1/2} \psi^* v_1$$

の散乱問題の逆の問題で解かれる。なお "Scattering data" の時間変化は

$$i\psi_{1t} = \left(\frac{\hbar}{m}\zeta^2 - \frac{\epsilon^2}{2\hbar}\psi^*\psi\right)\psi_1 + \epsilon m^{-\frac{1}{2}}(i\zeta\psi - \frac{1}{2}\psi_x)\psi_2$$

$$i\psi_{2t} = -\epsilon m^{-\frac{1}{2}}(i\zeta\psi^* + \frac{1}{2}\psi_x^*)\psi_1 - \left(\frac{\hbar}{m}\zeta^2 - \frac{\epsilon^2}{2\hbar}\psi^*\psi\right)\psi_2$$

から導かれる。"Scattering data"

$$S_+ = \left\{ [\zeta_j, p_j]_{j=1}^J ; p(\zeta) (\zeta = \text{real}) \right\}$$

は次の様に定義される。すなわち散乱問題の解として

$$\phi \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i\zeta x} \quad \text{as } x \rightarrow -\infty, \operatorname{Im} \zeta > 0$$

$$\phi \rightarrow \begin{bmatrix} a(\zeta) e^{-i\zeta x} \\ b(\zeta) e^{i\zeta x} \end{bmatrix} \quad \text{as } x \rightarrow +\infty$$

の極限漸近の振舞をするものを取り出す時

$$\bar{a}(\zeta) a(\zeta) + \bar{b}(\zeta) b(\zeta) = 1$$

を満たす。但し $\psi(x)$ は compact support の上にあると

$$\bar{a}(\zeta) \equiv [a(\zeta^*)]^*, \quad \bar{b}(\zeta) \equiv [b(\zeta^*)]^*$$

より $a(\zeta), b(\zeta)$ を使う

$$\rho(\xi) = \frac{b(\xi)}{a(\xi)} \quad (\xi = \text{real})$$

又 $a(\xi)$ の上半面の zero 点を ξ_j で表わし、その点での $\rho(\xi)$ の留数を ρ_j で表わす。

"Scattering data" の時間変化は

$$i\hbar(\xi_j)_t = 0, \quad i\hbar(\rho_j)_t = -\frac{\hbar^2}{2m}(2\xi_j)^2 \rho_j,$$

$$i\hbar a(\xi)_t = 0 \quad (\text{Im} \xi \geq 0),$$

$$i\hbar \rho(\xi)_t = -\frac{\hbar^2}{2m}(2\xi)^2 \rho(\xi) \quad (\xi = \text{real})$$

と言け。非常に簡単になる事から Fourier 変換との類似を強調している。 $\ln a(\xi)$ の ξ の逆べき展開

$$\ln a(\xi) \simeq -i \frac{\epsilon^2 m}{2\xi \hbar^2} \left\{ \mathcal{N} - \frac{1}{2\xi \hbar} \mathcal{P} + \frac{m}{2\xi^2 \hbar^2} \mathcal{E} + O(\xi^{-3}) \right\}$$

から

$$\mathcal{N} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi \, dx$$

$$\mathcal{P} \equiv -\frac{1}{2} i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} (\psi^* \psi_x - \psi_x^* \psi) \, dx$$

$$\mathcal{E} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\hbar^2}{2m} \psi_x^* \psi_x - \frac{1}{2} \epsilon^2 (\psi^* \psi)^2 \right] dx$$

は保存量である事が知られ、そしてそれは "Scattering data" によつて

$$\mathcal{N} = \frac{2\hbar^2}{m\epsilon^2} \left[i \sum_{j=1}^J (\zeta_j^* - \zeta_j) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \ln(1 + \bar{P}P) \right]$$

$$\mathcal{P} = \frac{2\hbar^3}{m\epsilon^2} \left[-i \sum_{j=1}^J (\zeta_j^{*2} - \zeta_j^2) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \zeta \ln(1 + \bar{P}P) \right]$$

$$\mathcal{E} = \frac{4\hbar^4}{m^2\epsilon^2} \left[\frac{i}{3} \sum_{j=1}^J (\zeta_j^{*3} - \zeta_j^3) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \zeta^2 \ln(1 + \bar{P}P) \right]$$

と表わされる。ここに表示された $\mathcal{E}$ は ψ に共軛な運動量 π を

$$\pi \equiv i\hbar \psi^*$$

と定義すると、始めに与へた古典場の nonlinear Schrödinger 方程式の Hamiltonian である事が分る。又 simplicial form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\psi \wedge \delta\pi \, dx$$

を計算する事により ψ, π から S_+ への変換は正準変換で共軛な運動量として

$$A_j \equiv \frac{4\hbar^3}{m\epsilon^2} \eta_j$$

$$p_j \equiv -2\hbar \zeta_j$$

$$\rho(\xi) = \frac{\hbar^3}{\pi m c^2} \ln [1 + \bar{\rho}(\xi) \rho(\xi)] \quad (\xi = \text{real})$$

を α 座標 とし

$$B_j = \text{Arg}(b_j)$$

$$g_j = \frac{\hbar^2}{m c^2} \ln(b_j^* b_j)$$

$$g(\xi) = \text{Arg}(b(\xi)) \quad (\xi = \text{real})$$

と選べる事が分る。但し $i = \pm i$

$$b_j = \rho_j \left(\frac{\partial a}{\partial \xi} \right)_{\xi = \xi_j}, \quad \xi_j = \xi_j + i \eta_j \quad (\eta_j > 0),$$

である。

この段階で量子化をするのであるが p_j, q_j を除いて非
ホドノームな束縛条件がついてゐるため量子化に不適当であ
る。で、束縛条件が自動的に満たされる様に変数変換を行つて
おく。すなわち

$$\text{Arg}(P_j + i Q_j) = \text{Arg}(b_j)$$

$$P_j^2 + Q_j^2 = \frac{8 \hbar^3}{m c^2} \eta_j$$

を α

$$\phi(\xi) = (P(\xi) + iQ(\xi)) \tilde{R}(P^2(\xi) + Q^2(\xi))$$

但し

$$\tilde{R}(z) \equiv [z^{-1} \exp(-\frac{m\pi\epsilon^2}{2\hbar^3} z) + z^{-1}]^{\frac{1}{2}}$$

2n 変数の組 (P_j, Q_j) $(P(\xi), Q(\xi))$ は (p_j, q_j) と共に束縛のない共軌な運動量, 座標の組で, これらを演算子でおきかえる事により直ちに量子化される。

$$\frac{1}{2\hbar} (P_j^2 + Q_j^2) \rightarrow a_j^+ a_j + \frac{1}{2} \rightarrow N_j + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\hbar} [P^2(\xi) + Q^2(\xi)] \rightarrow a^+(\xi) a(\xi) + \frac{1}{2} \rightarrow N(\xi) + \frac{1}{2}$$

のおきかえにより $\mathcal{H}$ $\mathcal{P}$ $\mathcal{E}$ は

$$\mathcal{H}_{op} = \sum_{j=1}^J (N_j + \frac{1}{2}) + \int_{-\infty}^{\infty} d\xi [N(\xi) + \frac{1}{2}]$$

$$\mathcal{P}_{op} = \sum_{j=1}^J (N_j + \frac{1}{2}) (p_j)_{op} + \int_{-\infty}^{\infty} d\xi [N(\xi) + \frac{1}{2}] P(\xi)$$

$$\begin{aligned} H = \mathcal{E}_{op} &= \sum_{j=1}^J (N_j + \frac{1}{2}) \frac{1}{2m} (p_j)_{op}^2 - \frac{m\epsilon^4}{24\hbar^2} \sum_{j=1}^J (N_j + \frac{1}{2})^3 \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} d\xi [N(\xi) + \frac{1}{2}] \frac{1}{2m} P^2(\xi) \end{aligned}$$

ニニで

$$p(x) = -2\hbar x$$

である。この様に位置演算子、運動量演算子、エネルギー (Hamiltonian) 演算子が書かれる

以上が Kaup の論文の概要である。

Kaup の論文について

古典論と量子論の対応の多義性のためにどれが正準変数の所で量子化すべきであるかは決まらな。その意味では Kaup の量子化も一つの場の量子化である事はまちがひなく、一種のボース量子化に対応するが、通常の場の量子化と異なり、最初に“ソリトン”の位置を与えねばならな。通常は量子化された場の方程式は古典場の解に対応するものをすべて持つはずである。したがって、この様な量子化は“ソリトン”位置について“Fock space”を作る必要があるのかもしれないが、その様に考えるよりもむしろ (Kaup の formalism は必ずしもそうなつてはいないが) 古典場の解への量子論的補正と見た方が良いかもしれない。

更に困難は Kaup も云つてゐる様に $a^+ a$ がボース演算子であるから、 $\epsilon^2 > 0$ に対してエネルギーが、下に

unbounded である事である。($E^2 < 0$ なら “ソリトン” はない) これは物理的には非常に理解しにくい事である。そしてこの量子化が正しいとすると $E^2 > 0$ の 1次元 non-linear Schrödinger 方程式で記述出来る量子場に対応する現象は存在しない事になる心配がある。この量子化が正しいのかは結局は実験との比較による以外にはないのであるから、対応する物理現象がないのであれば、Kaup のは数学的モデルとして、古典場から離散的な粒子数を導くと言う意味での “量子化” として完結して見ても良いかもしれない。

Kaup の主張の按に Fourier 変換との類似で “Scattering data” での量子化を考えると、“ソリトン” に対応する Fourier 変換が分らなくなったり、Fourier 変換が完全でない按に見えて奇妙な事になる。

N. H. Christ, T. D. Lee の按に古典場が bound state (ソリトン) の解を持つ時は、自由場からの摂動展開 (Fourier 変換) は困難であると考え、古典解から展開するのだと考え、多分 Kaup のは “ソリトン” 数を一定にした zero 場からの展開と考える事が出来る。

“ソリトン” の量子化は多分、将来素粒子物理の分野でも重要になって来ると思われるので Kaup のパイオニア的な仕事に敬意を払いたい。

なお、こゝで取上げた Kaup の論文はプレプリントで出版先は不明である。又 Christ, Lee の論文はプレプリントで連名のは出版先は不明であるが個別のは "Extended Systems in Field Theory" June 1975, Paris の Conference の proceeding に出版される予定

最後に量子化の事について色々お教へ頂きました沢田克郎氏、および尾瀬通氏に感謝致します。