

## ベイリンソンの結果のドリinfeldt 加群を用いた類似について<sup>1</sup>

近藤 智 (SATOSHI KONDO) 東京大学数物連携宇宙研究機構 (IPMU)

### 目次

1. はじめに
2. ベイリンソン予想について
3. ベイリンソンと加藤の計算
4. ドリinfeldt 加群について
5. オイラー系
6. ベイリンソンと加藤の計算の関数体類似に出てくる積分の計算

### 1. はじめに

先の研究集会では、ベイリンソン予想とドリinfeldt 加群に関する概説講演の他に、安田正大氏（京都大学数理解析研究所）との共同研究である「ベイリンソンの結果のドリinfeldt 加群のモジュライを用いた類似について」の話をした。保型関数論の研究集会ということで、共同研究の中でも特に保型関数の登場する計算の説明に重点をおいた。

ベイリンソンはベイリンソン予想について楕円曲線のモジュライの場合に結果を得ている。その際に、モジュラー曲線（ドリinfeldt 加群のモジュライと区別するために楕円モジュラー曲線と呼ぶことにする）上の積分が現れ、ランキン・セルバーグの方法を用いることにより計算がなされた。ベイリンソンの結果の、ドリinfeldt 加群のモジュライを用いた類似を考えると、ドリinfeldt 加群のモジュライ上の積分が現れる。ドリinfeldt 加群のモジュライの次元はドリinfeldt 加群の階数によるのだが、階数が 2 のときは次元は 1 となっていて楕円モジュラー曲線ととてもよく似ている。このように次元が 1 の場合には、ベイリンソンの手法と同様に、ランキン・セルバーグの方法を用いることができるのだが、次元が高くなるとそれではうまく計算ができないように思えた。（ランキン・セルバーグの方法はなにも  $GL_2$  に限ったものではなく、 $GL_d$  ( $d \geq 1$ ) の場合にもあるのだが、計算したい積分とは形が似ていないように思う。）

その積分の計算のために、オイラー系の性質を用いることになった。そもそもオイラー系とは岩澤理論に登場した道具である。関数体上の類似を筆者が考える際には、岩澤理論の類似を考えているわけではない。オイラー系の性質を利用すると、積分と L 関数を結び付けやすい、というのが用いる理由である。このような手法は、概均質ベクトル空間のゼータ関数の計算をする際にも使われていたようである。

本稿では、ベイリンソンの結果、そのドリinfeldt 加群を用いた類似、オイラー系を用いた計算、などについて紹介する。講演のときと同様に、ベイリンソン予想やドリinfeldt 加群については概説にとどめ、オイラー系について詳しく書く。

---

1) 21 世紀 COE 京都数学フェローとして行われた研究。

## 2. ベイリンソン予想について

ベイリンソン予想を簡単に振り返ってみよう. ベイリンソン予想は20年以上も前に提出された予想であり, しかも最近数年で目立った動きがあるとはいえない. ここで改めて予想について書いても新しいことは筆者には何もいえないので, 概要を述べるにとどめる. 参考文献としてはベイリンソンによる原論文 [Be1], [Be2], [Be3] の他, スーレ [So], ネコバー [Ne], シュナイダー [Sch] による概説記事がある. また, 原論文を噛み砕いた本として [RSS] がありとても便利だ. 日本語で書かれたものとしては「数学のたのしみ」に齋藤秀司氏による記事 [齋藤] がある. 筆者は困るとその記事をよく眺めていた. そのレファレンスをたどると良いと思う.

**2.1. 代数体 (有理数体) 上の (射影非特異) 多様体を与えられたとする.** それに対し, ハッセ・ヴェイユ L 関数が定義される. その整数点での値 (leading term) の値 (L 関数の特殊値という) を有理数倍を除いて決定する, というのがベイリンソン予想 (の一部) である. 「決定する」というのはつまり, モチビックコホモロジーとドリーニュコホモロジー, それからそれらを結びつけるレギュレーター写像というもので表す, ということである. 関連して, 生じる有理数倍のあいまいさを記述するのにブロック・加藤予想がある.

ハッセ・ヴェイユ L 関数を定義しよう. 有理数体  $\mathbb{Q}$  上定義された非特異射影的スキーム  $X$  に対し,  $j \geq 0$  を整数とする. ハッセ・ヴェイユ L 関数は

$$L(h^j(X), s) = \prod_p L_p(h^j(X), s)$$

で定義される. ここで,  $s$  は複素数,  $p$  は素数全体をはしる. 右辺の因子は

$$L_p(h^j(X), s) = \det(1 - \text{Frob}_p | H_{\text{ét}}^j(X \otimes_{\mathbb{Q}} \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_l)^{I_p})$$

で定義される. ここで  $l \neq p$  は素数,  $H_{\text{ét}}^*$  はエタールコホモロジー,  $\text{Frob}_p$  はフロベニウス元,  $I_p \subset \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  は惰性群を表す. ベイリンソン予想を述べる際には, 各因子は素数  $l$  の取り方によらないことや全複素平面に解析接続可能であることを (少なくとも) 仮定している.

**2.2. ドリーニュコホモロジー.** ドリーニュコホモロジーは下に述べるように, とある複体のハイパーコホモロジーとして定義される. より conceptual な見方は, (次数に制限がつくが) 混合ホッジ構造の圏における拡大群を計算している, という点である.

**2.2.1.** ドリーニュコホモロジーは実数体上の代数多様体に対して定義される. まず  $X$  を複素数体上の代数多様体とし,  $p \geq 0, i \geq 0$  を整数とする. 複素数体上のスキームに対するドリーニュコホモロジー  $H_{\mathcal{D}}^i(X/\mathbb{C}, \mathbb{R}(p))$  は複体  $\mathbb{R}(p)$

$$(2\pi\sqrt{-1})^p \mathbb{R} \subset \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_X^2 \rightarrow \cdots \rightarrow \Omega_X^p \rightarrow 0$$

の  $i$  番目のハイパーコホモロジーとして定義する.

$X$  を実数体上の代数多様体とし,  $p \geq 0, i \geq 0$  を整数とする. ドリーニュコホモロジー  $H_{\mathcal{D}}^i(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(p))$  は  $H_{\mathcal{D}}^i(X \otimes \mathbb{C}/\mathbb{C}, \mathbb{R}(p))$  への複素共役作用の不変部分として定義する.

**2.2.2.** 定義からドリーニュコホモロジー群は実ベクトル空間である. この次元が L 関数の極の位数と次のように関係している点が重要だ. ハッセ・ヴェイユ L 関数が関数等式をみたしていると仮定しよう.  $0 \leq i \leq 2 \dim X$  とし,  $m < i/2$  となる整数  $m$  をとる. このとき,  $\dim_{\mathbb{R}} H_{\mathcal{D}}^{i+1}(X/\mathbb{R}, \mathbb{R}(n)_{\mathcal{D}}) = \text{ord}_{s=m} L(h^i(X), s)$  が成立する [Sch, p.9, Proposition]. この命題とベイリンソン予想の同型を認めると, L 関数の零点の位数はモチビックコホモロジーの大きさを表していることになる.

**2.2.3. 関数体上の類似を考える際には複素数体上の多様体は現れないためドリーニュコホモロジーが出てこない.** 正標数の局所体上の多様体のコホモロジーでドリーニュコホモロジーのようなふるまいをもつものが定義できるか, という問題になるのだが, 筆者が扱う場合はドリーニュコホモロジーがベッチコホモロジーと同型となるような場合の正標数における類似であり, ドリーニュコホモロジーの代わりにエタールコホモロジー (の一部と同型に近いと考えられるもの) を利用することで避けてしまっている.

**2.3. モチビックコホモロジー.** 代数多様体の (コ) ホモロジー論の一般論がどうあるべきか, という問題を考えた際にモチビックコホモロジーが提案され, しばらくは予想であったが, 近年きちんとした定義がなされた. このような場で書くのにふさわしい内容だと思うのだが, 筆者が不案内のためできない. 少々古く (ヴォエヴォドスキーの一連の仕事以前) になってしまうが, ネコバーのサーベイ [Ne] にはこのような面からの解説が書いてあるので参照されたい.

ここではベイリンソンの用いた定義 [Be3, 2.2.1, p.2048] のあらすじを少しだけ書いておく. 定義そのものはとても複雑であるし, また, その定義に立ち返っていろいろなことを考えるよりも, そのコホモロジー論としての性質を用いるのみの場合が多く, 定義は重要なのだがお目にかかることがあまりない.

ベイリンソンはモチビックコホモロジー (有理数体をテンソルしたもの) をキレンの代数的K群の部分商として定義した. 代数的K群に有理数体をテンソルしたものには自然にアダムス作用素が作用し, その固有分解の直和因子である.

**2.3.1. 代数的K群とは,** (少し条件のついた) スキーム  $X$  と整数  $i \geq 0$  に対して定まるアーベル群  $K_i(X)$  である. いろいろな定義が今はあるがもともとのキレンによる定義 [Qu, p.116, §7.1] のあらすじは次のようになっている. まず, スキーム  $X$  上のベクトル束のなす完全圏を考える. (あるいは連接層のなすアーベル圏を考えてもよい.) その圏に対し,  $Q$ -construction と呼ばれる操作を行うことで, (普通の意味での) 圏を得る. そして, その圏の分類空間 (これは普通の意味での位相空間になっている.) の  $i+1$  番目のホモトピー群として  $K_i(X)$  を定義するのである. 一般に位相空間のホモトピー群は計算が困難であり, したがって代数的K群も計算が困難である (とされていると思う.).

他にも代数的K群の定義がある. より大きな枠組みの中で捕らえることで, K理論と他との interaction が大きくなるのが利点といえるだろう. 有名なのは, ワルドハウゼンK理論 [Wa] を用いるトマソン・トロボーK理論 [Th-Tr] である. また, ヴォエヴォドスキーのモチビックホモトピー論 [MV] を用いても代数的K理論は定義できる. K理論では, スキームを与えてそのK群を計算するという具体的な問題よりも, 定義を新たにするというような問題が考えられているように (筆者には) 思われる.

代数的K理論についてはウェイベルによるオンラインの本 [We] が参考文献としてよいと思うが, 書きかけであって出版物ではない. キレンの論文 [Qu] を噛み砕いた本として [Sr] があってよい本だと思うのだが, 著者は内容が古くなってしまったと言っていた. 他に, [FG] は眺めると楽しい.

**2.3.2. モチビックコホモロジーに有理数体をテンソルしたもの** (当時としてはその候補) をベイリンソンは代数的K理論を用いて定義した.  $X$  を体上準射影的スキーム,  $i, j \geq 0$  を  $2j-i \geq 0$  となるような整数とする. このときモチビックコホモロジーを

$$H_{\mathcal{M}}^i(X, \mathbb{Q}(j)) = K_{2j-i}^{(i)}(X)_{\mathbb{Q}}$$

と定義する. ここで,  $-\mathbb{Q} = - \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ,  $(i)$  はアダムス作用素による固有空間を表す. アダムス作用素については [Sch, p.11], [Se] の他, ホモトピー論を用いたものとして [Ri] を参照.

モチビクコホモロジーの定義もいろいろとある。ブロック [Bl], レビーン [Le], 花村, ヴォエヴォドスキー [Vo-Su-Fr] はそれぞれモチビクコホモロジーを定義している。ブロックの高次チャウ群としての定義が与えた影響はとて大きいと思う。

**2.4. レギュレーター写像.** レギュレーター写像とはモチビクコホモロジーからドリーニュコホモロジーへの写像 (群準同型) である。背景には, モチーフのホッジ実現, という考え方がある ([Ne, 2.6.1] を参照)。実際の定義にはチャーン類の一般論を用いる。

**2.4.1.**  $X$  を有理数体上の非特異射影的スキームとする。  $i, j \geq 0$  を整数とする。レギュレーター写像は

$$r_j^i : H_{\mathcal{M}}^i(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}} \rightarrow H_{\mathcal{D}}^i(X \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}/\mathbb{R}, \mathbb{R}(j))$$

という準同型である。ここで, 左側の  $H_{\mathcal{M}}^i(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}}$  は  $X$  の  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  上のモデルに関する条件を課した,  $H_{\mathcal{M}}^i(X, \mathbb{Q}(j))$  の部分群である。

当初は左辺は  $H_{\mathcal{M}}^i(X, \mathbb{Q}(j))$  として予想が提出されていたがブロックとグレイソンによる計算機による計算により,  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  上のモデルに関する条件が課されるようになった ([De-Wi, p.270] 参照)。これは, ある特殊ファイバーの  $G$  群 (に有理数体をテンソルしたもの) がゼロではないことと関係している。このような事実は, 筆者が関数体上の類似を考える際に影響があった。特殊ファイバーの  $G$  群への境界写像をレギュレーターの代わりとみなすことができるのではないかと考えられるようになったからである。

**2.5. ベイリンソン予想.** これでベイリンソン予想 (の一部) を述べるのに必要な登場人物がそろった。ベイリンソン予想はコホモロジーを定義する際に使った整数  $i, j$  の値により定式化が異なる。ここでは (後で使うことになる部分でもある) よりシンプルな場合を述べるにとどめる。

簡単にいうと, 上記レギュレーター写像が, 左側に  $\mathbb{R}$  をテンソルすると同型であることを予想は主張している。そして, ドリーニュコホモロジーの最高次外べきには自然な  $\mathbb{Q}$  構造が入るが, それと  $\mathbb{Q}$  係数モチビクコホモロジーがレギュレーター写像を通して与える  $\mathbb{Q}$  構造との「差」が  $L$  関数の整数点での leading term と有理数倍を除いて一致する, というものである。

**2.5.1.** ベイリンソン予想の一部は次の通り。

**予想 2.1.**  $2j - i + 1 > 2$  のとき  $r_j^i$  より誘導される写像

$$r_j^i : H_{\mathcal{M}}^i(X, \mathbb{Q}(j))_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R} \rightarrow H_{\mathcal{D}}^i(X \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}/\mathbb{R}, \mathbb{R}(j))$$

は同型。

$2j - i + 1 \leq 2$  の場合には定式化が異なり, 代数的サイクルのコホモロジー同値類のなす群やドリーニュの周期が登場するのだが触れない。

$L$  関数の特殊値に関する予想はここでは述べない。触れない理由のひとつは, 筆者は関数体上でベイリンソン予想の類似を考えるのだが, その場合には, 本質的に有限体上のスキームの合同ゼータ関数を扱っていることになるので,  $L$  関数の特殊値を有理数倍のあいまいさを除いて決定することに意味がなくなっているからである。

**2.5.2.**  $X$  が代数体のスペックの場合にはボレルが完全に解いている。この結果については、本[Bur]を参照するとよいだろう。ボレル[Bo2] はリー代数を用いたレギュレーター写像を用いて、それとベイリンソンの定義したレギュレーターが一致するかどうかという問題があったが、本ではそれを検証している。

しかし、代数体以外の場合には部分的な結果がときどき存在するだけである。まずそもそも  $K$  群やモチビクコホモロジーの有限生成性はバス予想という難しい問題であるため、レギュレーターの単射性がわからない。したがって、他にベイリンソン予想について知られている結果というのは、主にレギュレーター写像の全射性についてである。やり方としては、モチビクコホモロジーの部分群を構成し、レギュレーター写像によって、ドリーニュコホモロジーへの全射があることを確認する、というものである。さらに、その際に得られたモチビクコホモロジーの部分群をあたかもモチビクコホモロジー全体であるとみなして、 $L$  関数の特殊値に関する予想を示す、といったことがなされている。([Ne, (6.6) Weak conjecture] 参照)

**2.5.3.** スキーム  $X$  が円分体のスペックであるとしよう。さらに  $i = j = 1$  のときには、ボレルの方法とは別に具体的な方法があるのでそれを紹介しよう。加藤の計算 ( $X$  が楕円曲線のモジュライで  $i = j = 2$  のとき) はこの一般化とみなすのが自然であるように思う。また、ドリinfeldt 加群を用いた類似を考える場合にもこれがモデルケースになっているといえる。

整数  $N \geq 3$  に対して  $X = \text{Spec } \mathbb{Q}(\zeta_N)$  としよう。このとき、 $H_{\mathcal{M}}^1(X, \mathbb{Q}(1)) \otimes \mathbb{R} \rightarrow H_{\mathcal{D}}^1(X_{\mathbb{R}}/\mathbb{R}, \mathbb{R}(1))$  が全射であることを示すのに次の命題を使う。

**補題 2.2.**  $\chi$  を導手  $N$  のディリクレ指標であって  $\chi(-1) = -1$  であるものとする。このとき

$$\sum_{a \in (\mathbb{Z}/N)^{\times}} -\chi(a) \log |1 - \zeta_N| = \left. \frac{\partial}{\partial s} L(\chi, s) \right|_{s=0}$$

が成立。

補題の証明には関数等式を用いて、対数関数の展開を見ればよい。

さて、体の  $K_1$  はその体の乗法群と同型であることが知られている。 $1 - \zeta_N$  はしたがって  $K_1(\mathbb{Q}(\zeta_N)) \cong \mathbb{Q}(\zeta_N)^{\times}$  の元を定めている。上の状況ではレギュレーター写像が具体的に計算されていて、ちょうど絶対値の対数関数になっていることがわかっている。よって補題 2.2 は、 $1 - \zeta_N$  というモチビクコホモロジーの元がレギュレーターにより  $L$  関数と関係した値に送られている、と読むことができる。右辺がゼロでないこと、 $1 - \zeta_N$  は  $N$  が素数のべきでないときには単数であること、などを利用すると、ベイリンソン予想の全射性にあたる部分が示されるという仕組みである。

### 3. ベイリンソンと加藤の計算

本節ではベイリンソンの計算をより具体的 (explicit) にした加藤の結果について述べる。第 2.5.3 節では円分体の例を見た。そこでは円単数が自然に  $K$  群の元を定めており、そのレギュレーターによる像が具体的に記述されていた。このような記述は予想の解決に必要ということはないのだが、この記述を利用することでもベイリンソン予想の一部 (全射性) が導けるのだった。

ベイリンソンによる楕円曲線のモジュライ (以下、ドリinfeldt 加群のモジュライ (ドリinfeldt モジュラー曲線) と区別するために楕円モジュラー曲線という) に関する計算を、補題 2.2 上と似た意味で具体的にしたのが加藤の計算である。ベイリンソンは楕円モジュラー曲線の単数群の直積の元 (ベイリンソン元と呼ばれる) のレギュレーターによる像を計算した。加藤はその単数を円単数のときと似たように具体的に与え、それらから作られるシンボルのレギュレーターによる像を具体的に記述

した. この結果は加藤の論文の第一章にある. 概説記事はショルによるもの [Sc] があるので参照してほしい.

3.1. 加藤の論文 [Ka] の第一章には (少なくとも) 次の事柄が書いてある.

- (1) テータ関数とジーゲル単数の (代数的な) 特徴づけ
- (2) (1) を受けて楕円モジュラー曲線の  $K_2$  に元の構成
- (3)  $K_2$  の元の族のオイラー系関係式の証明
- (4) 曲線のレギュレーター写像の定義 (の復習)
- (5) レギュレーターの像の計算,  $L$  関数と結びつくこと.

本稿では (1), (2), (5) について, 解析的に説明する. 解析的に扱うことにしてしまつて, レギュレーターの定義もしないとすると, これはただの保型関数の積分計算となつてしまい, わざわざここに記すこともないように思えてくるのだが, 後で類似をたどる箇所なので書くことにした.

3.1.1.  $c$  を 6 と互いに素な正整数とする. スキーム  $S$  と  $S$  上の楕円曲線  $E$  に対し, テータ関数  ${}_c\theta \in \mathcal{O}(E \setminus E[c])^\times$  が定まる ([Ka, p.121, Proposition 1.3]).  $E[c]$  は  $c$  等分点のなす部分スキームとした.

$N \geq 3$  を整数とし,  $Y(N)$  を (カスプなしの) 楕円モジュラー曲線とする.  $E_{Y(N)}$  を普遍楕円曲線とすると, テータ関数  ${}_c\theta_{E_{Y(N)}}$  が定義されている. この解析的な表示を与えよう.  $\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C} | \text{Im}\tau > 0\}$  を上半平面とする.  $Y(N)(\mathbb{C}) \cong \coprod_{(\mathbb{Z}/N)^\times} \mathcal{H}$  である. 写像  $\nu: \mathcal{H} \rightarrow Y(N)(\mathbb{C})$  を,  $\nu(\tau) = (\mathbb{C}/\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}, \tau/N, 1/N)$  と定義する. ここに,  $(\mathbb{C}/\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}, \tau/N, 1/N)$  はレベル構造  $\varphi: (\frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^{\oplus 2} \rightarrow E_{Y(N)}[N], \varphi(1, 0) = \tau/N, \varphi(0, 1) = 1/N$  を持った楕円曲線  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$  を意味する. テータ関数の  $\nu$  の像の上の楕円曲線における表示は以下の通りである.  $\tau \in \mathcal{H} \subset Y(N)(\mathbb{C})$  をとる.  $z \in \mathbb{C} \setminus c^{-1}(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z})$  とすると,

$${}_c\theta(\tau, z) = q^{\frac{1}{12}(c^2-1)}(-t)^{\frac{1}{2}(c-c^2)}\gamma_q(t)^{c^2}\gamma_q(t^c)^{-1}$$

となる. ここで,  $q = e^{2\pi i\tau}, t = e^{2\pi iz}, \gamma_q(t) = \prod_{n \geq 0} (1 - q^n t) \prod_{n \geq 1} (1 - q^n t^{-1})$  である.

3.1.2.  $(\alpha, \beta) \in (\frac{1}{N}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})^2 \setminus \{(0, 0)\}$  に対し,  ${}_cg_{\alpha, \beta} = \iota_{\alpha, \beta}^*({}_c\theta_E) \in \mathcal{O}(Y(N))^\times$  と定義する. ここで,  $\iota_{\alpha, \beta}: Y(N) \rightarrow E_{Y(N)}[N]$  はレベル構造から定まる射である. ジーゲル単数と呼ばれる.

ジーゲル単数  ${}_cg_{\alpha, \beta}$  の  $\nu$  による引き戻しの解析的表示は

$$q^\omega \prod_{n \geq 0} (1 - q^n q^{a/N} \zeta_N^b) \prod_{n > 0} (1 - q^n q^{-a/N} \zeta_N^{-b})$$

となっている. ここに  $\omega = \frac{1}{12} - \frac{a}{2N} + \frac{1}{2} \frac{a}{N^2}$ , そして  $\alpha \in \mathbb{Q}$  に対し  $q^\alpha = e^{2\pi i\alpha\tau}$  である.

3.1.3. ベイリンソンの結果は楕円曲線のモジュライに関する  $i = j = 2$  の場合のベイリンソン予想についてである. 扱うモチビックコホモロジーは  $H_{\mathcal{M}}^2(Y(N), \mathbb{Q}(2))$  であり ( $Y(N)$  の代わりにカスプをつけた  $X(N)$  であつたり,  $\mathbb{Z}$  上のモデルをとったりすることもあるが, 立ち入らない),  $K$  群でいうと  $K_2(Y(N))$  である.  $K$  群の元の構成方法というのはそもそもあまり知られていないと思う. ここでは  $\mathcal{O}(Y(N))^\times \otimes \mathcal{O}(Y(N))^\times \rightarrow K_2(Y(N))$  というシンボル写像と呼ばれる写像を用いる.  $\kappa_{c, N} = \{{}_cg_{1/N, 0}, {}_cg_{0, 1/N}\} \in K_2(Y(N))$  とおこう. ここで,  $\{x, y\}$  はシンボル写像による  $x \otimes y$  の像を表す.

ベイリンソンは上のシンボル写像の像全体を考え, ときにはさらにノルム写像  $K_2(Y(M)) \rightarrow K_2(Y(N))$  ( $M, N$  は適当な整数) によるシンボル写像の像の像を考えたので, このような形の元はベイリンソン元と呼ばれている. 加藤の工夫は, ベイリンソン元の中から, オイラー系をなす族を具体的に与えた点である.

**3.1.4.** 第2.5.3節では円分体のスペックでさらに  $i = j = 1$  の場合のレギュレーターの記述を与えた。そこでは任意のモチビックコホモロジーの元についての記述は得られておらず、円単数（に類するもの）に限っては  $L$  関数の特殊値を用いて記述がなされていたのだった。さて、楕円曲線のモジュライでさらに  $i = j = 2$  の場合に、円分体の場合と似た表示を加藤は得ている。円単数の代わりにはジーゲル単数を用いて構成した  $K_2$  の元を使い、ディリクレ指標（これは  $GL_{1,\mathbb{Q}}$  の保型関数である）の代わりに保型形式を使う。詳しくは説明できないが類似がわかりやすくなるので、その公式を [Ka, p.168, Proposition 7.12(2)] からコピーしておこう。記号などは説明する余裕が全くない。

**補題 3.1.**  $\chi: (\mathbb{Z}/m)^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  を指標とする。  $Z_{1,N}(2, \chi, s) = \sum_{n \geq 1} \chi(n) T'(n) n^{-s}$  を  $H^1(Y_1(N)(\mathbb{C}), \mathbb{C})$  への作用素に値を持つ関数とする。  $T'(n)$  は双対ヘッケ作用素である。このとき次が成立。

$$\sum_{a \in (\mathbb{Z}/m)^\times} \chi(a) \text{reg}_{1,N} \left( \prod_{b \in \mathbb{Z}/m} \{g_{a/m, b/m}, g_{0,1/N}\} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} Z_{1,N}(2, \chi, s) 2\pi i \delta_{1,N}(2, 1)$$

ここで  $\delta_{1,N}(2, 1)$  はカuspからカuspへのパスのなす（相対）ホモロジー類から作られるある  $H^1(Y_1(N)(\mathbb{C}), \mathbb{C})$  の元。  $\text{reg}_{1,N}: K_2(Y_1(N))_{\mathbb{Q}} \rightarrow H^1(Y_1(N)(\mathbb{C}), \mathbb{C})$  はレギュレーター写像である。

この補題の証明にまず必要なのは曲線のレギュレーターの具体的な記述である。レギュレーターはチャーン類を用いて定義されるのでその具体的な記述ということになる。その記述をみてクロネッカーの極限公式を用いると、証明はランキン・セルバーク型の積分の計算に帰着される。その最後の部分の計算 ([Ka, p.164, Proposition 7.1], [Sh] を参照) を本稿ではテーマとしており、その関数体類似となる命題が定理 6.1 というつもりである。見比べるには、上の補題の両辺とヘッケ固有関数とのペアリングをとるとよい。補題の右辺は本質的に  $L$  関数とメルン変換の積になっていることがわかる。「レギュレーターの像と  $(GL_{1,\mathbb{Q}}, GL_{2,\mathbb{Q}}, \text{あるいは } GL_{d,F})$  の保型関数とのペアリングが  $L$  関数と周期の積で表される」と言うことができると思う。

#### 4. ドリinfeld加群について

関数体と代数体は似ているから、代数体上で行っている事柄を関数体上でも考えてみよう、というのが関数体類似の意味である。関数体というのはここでは有限体上の曲線の関数体を意味する。代数体と似ているというのは、射影的曲線から複数の閉点を抜いた多様体の座標環も、代数体の整数環もどちらも剰余体が有限体であるデデキンド環になっている、ということがひとつ理由として挙げられるだろう。例えばヴェイユの本ではどちらも  $A$ -field と呼んで ([Weil, Ch.III §1 DEFINITION 1]) あまり区別せずに扱っている。

そもそもドリinfeld加群はラングランズ予想の解決のためにドリinfeldにより発明されたものである。ラングランズ予想は標数を問わず、大域体上で定式化されている。関数体上では扱いが代数体上に比べて簡単であるため、代数体上では未解決であるが、ラフォールグは関数体上の予想を解決したのであった。関数体上のラングランズ予想は  $GL_2$  についてはドリinfeldがすでに 1970年代に解決していた。ドリinfeldはこのためにいろいろな道具を発明した。ドリinfeld加群 (elliptic module と本人は名づけた)、楕円層 (elliptic sheaf)、シュトゥーカ (shtuka) などである。どの場合にも、レベル構造をつけたこれらの対象のモジュライのコホモロジーを考えると、そこにはガロア群とアデル群が作用していて、それがラングランズ対応を与える、というのがおおまかなあらすじの一部である。

ここではドリinfeld加群を用いる。その理由は、ドリinfeld加群はより単純なモジュライ空間を持っていて、そのために全てのラングランズ対応を実現する

には不十分であるのだが、次元などが楕円曲線のモジュライと（特別な場合には）一致しており、ベイリンソンの結果の類似を考えるのが楽だから（例えば、 $K$ 群の次数と次元が合う、といった点）である。

本節ではドリinfeld加群の紹介をするが、第3節で述べた内容の関数体上での類似を考える際に必要となる部分に重点をおいた。本当は、関数体上のベイリンソン予想の類似の定式化を行い、その特別な場合の計算として6.1の積分が現れる、ということといえばベイリンソンの仕事の類似であることがより明確になって説得力が増すのだが、それにはレギュレーターの記述を行わなければならないので割愛となった。

**4.1. ドリinfeld加群.** ドリinfeld加群についての文献としては、ドリinfeldの原論文 [Dr1], [Dr2] (elliptic module と本人は名づけた) はもちろんだが、いろいろなことが書いてあるローモンによる本 [La1] [La2] がある。初等的な扱い方をしているのはゴスの本 [Go] で、ドリinfeld加群のモジュライが曲線になる場合にはゲケラーの本 [Ge] が楕円曲線のモジュライの類似をたどっていてわかりやすいと思う。筆者がよく参考にするのはドリーニュとヒューズモラーによる概説 [De-Hu] である。そこでは本節で触れる事柄の  $GL_2$  の場合の細かいことが書いてある。

**4.1.1.** まず関数体の定義をしよう。  $\mathbb{F}_q$  を  $q$  元体とする。  $C$  を  $\mathbb{F}_q$  上定義された連結非特異射影曲線であって、定数体が  $\mathbb{F}_q$  であるものとする。  $C$  の関数体  $F$  のことを「関数体」と呼んでいる。これが代数体と似ていると思っているわけだ。

ドリinfeld加群の導入のためには、ひとつ閉点  $\infty$  を固定する。  $A = H^0(\mathcal{O}_C, C \setminus \{\infty\})$  を  $C$  から  $\infty$  を抜いた（アフィン）曲線の座標環とする。  $A_\infty$  で素点  $\infty$  ( $C$  の閉点と  $F$  の素点を同一視する。) での  $A$  の完備化、  $F_\infty$  で  $A_\infty$  の商体を表す。例を挙げよう。  $C$  を射影直線としてその座標を  $t$  とする。  $\infty = \{t = \infty\}$  を無限遠点とすれば、  $A = \mathbb{F}_q[t]$ ,  $F_\infty = \mathbb{F}_q((1/t))$  となる。さらに  $C_\infty = \overline{F_\infty}$  ( $F_\infty$  の代数閉包の完備化) とおこう。代数体との類似では、  $F, A, F_\infty, C_\infty$  はそれぞれ  $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  に対応している。

**4.1.2.**  $A$  スキーム  $S$  に対して、  $S$  上のドリinfeld加群というものが定義される。しかしここでは  $C_\infty$  上のドリinfeld加群の定義をするにとどめる。（一般の）定義は [Dr1] [La1] [Go] を参照。

$d \geq 1$  を整数とする。  $C_\infty$  上の階数  $d$  のドリinfeld加群とは、階数  $d$  の射影的  $A$  加群  $\Lambda$  と単射  $\Lambda \subset C_\infty$  の組のことである。例として、前節の例のときと同じように  $A = \mathbb{F}_q[t]$  とし、  $\Lambda$  が階数 2 の射影（自由）  $A$  加群とすると、  $A^{\oplus 2} \subset C_\infty$  という部分格子がドリinfeld加群であるといっていることになる。上でみた代数体との類似をたどると、  $\mathbb{Z}^{\oplus 2} \subset \mathbb{C}$  に対応しており、階数 2 のドリinfeld加群は楕円曲線の類似になっているといえる。

楕円曲線のときと異なるのは、任意階数のドリinfeld加群が定義されることである。（  $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$  であるのに対して、  $[C_\infty : F_\infty]$  が有限でないから、というのはあまり良い説明ではないかもしれないが、そういったことである）このため、楕円曲線のモジュライに関する結果を関数体上で考えようと思うと、モジュライの次元は階数に応じて増えるため、自然に高次元化を考えることができるようになっているのである。

**4.1.3.**  $d \geq 1$  を整数、  $I \subset A$  をゼロでないイデアルであって、  $\text{Spec } A/I$  は二つ以上の閉点を持つとする。  $\Lambda \subset C_\infty$  を  $C_\infty$  上のドリinfeld加群としよう。レベル構造は楕円曲線の場合と同様に  $\phi : (A/I)^d \cong \Lambda/\Lambda I$  をレベル  $I$  構造という。

レベル  $I$  階数  $d$  のドリinfeld加群のモジュライは非特異アフィンスキームにより表現可能で、次元は ( $F$  上)  $d-1$  となる。（イデアルの閉点の個数に関する条件

がないときにはモジュライはスタックとしては表現可能) 論文 [Dr1] ではドリinfeldトレベル構造を用いて  $A$  上のモジュライを考えている. 本 [La1] では悪い素点を除いている. 例えば, 階数 2 のドリinfeld加群のモジュライは, 楕円曲線のモジュライと同じように非特異アフィン曲線になっている.

**4.2. モジュライのアデル表示.** 楕円曲線のモジュライの  $\mathbb{C}$  値点は  $Y(N)(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty) \times \mathcal{H} / \mathbb{K}_N$  というアデル表示を持っている. ここで  $\mathbb{A}^\infty$  は  $\mathbb{Q}$  の有限アデル環,  $\mathcal{H}$  は上半平面,  $\mathbb{K}_N \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}^\infty)$  はある開コンパクト部分群である. ここではドリinfeld加群のモジュライも同様の表示を持っていることについて述べよう.

アデル表示をみると, 関数体上で  $\mathrm{GL}_{d,F}$  に対応する「志村多様体」があるとするなら, (階数  $d$  の) ドリinfeld加群のモジュライが適任だと考えられるようになると思う. すると, 関数体上では任意の  $d$  に関して  $\mathrm{GL}_d$  に対応する志村多様体が存在することになっていて, これは有理数体上では  $\mathrm{GL}_{d,\mathbb{Q}}$  ( $d \geq 3$ ) に対応する志村多様体が存在しないことに比べて有利な点だといえる.

ドリinfeld加群のモジュライを  $F$  のアデル環  $\mathbb{A} = \mathbb{A}_F$  を用いて記述するにあたり, 楕円曲線のモジュライのときと同様, 無限素点  $\infty$  における「上半平面」を定義する必要がある. ドリinfeld加群の場合にはふたつの空間がその類似となっている. ひとつはドリinfeld対称空間と呼ばれる  $F_\infty$  上のリジッド解析空間であり, もうひとつはブリュア・ティッツビルディングと呼ばれる単体複体である.

**4.2.1.** ドリinfeld対称空間は,  $F_\infty$  上の (テートの意味での) リジッド解析空間である. 整数  $d \geq 1$  に対し,  $X^d = \mathbb{P}^{d-1}(C_\infty) \setminus \bigcup_H H(F_\infty)$  とおく. ここで  $H$  は  $F_\infty$  上定義された  $\mathbb{P}^{d-1}$  の超平面全体をはしる. この集合にはある  $F_\infty$  上のリジッド解析空間の  $C_\infty$  値点の集合としての構造が入る.  $d = 2$  のときは  $X^2 = \mathbb{P}^1(C_\infty) \setminus \mathbb{P}^1(F_\infty)$  となっていて, 複素上下半平面  $\mathcal{H}^\pm = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  の類似であることが見てとれる.

これを用いると, モジュライのアデル表示ができるようになる.  $M_I^d$  でレベル  $I$  階数  $d$  のドリinfeld加群のモジュライを表そう. 有限アデル環  $\mathbb{A}^\infty$  を  $\prod'_{p \neq \infty} \mathbb{A}_p$  で定義する. ここで,  $p$  は  $\infty$  と異なる素点をはしり,  $\prod'$  は制限直積を表す. このとき

$$M_I^d(C_\infty) = \mathrm{GL}_d(F) \backslash (X^d \times \mathrm{GL}_d(\mathbb{A}^\infty)) / \mathbb{K}_I$$

となる. ここで  $\mathbb{K}_I$  はレベル  $I$  構造に付随する開コンパクト部分群である. (あとでこれに似たものを用いるときには定義をする.)

**4.2.2.  $BT_\bullet$ .** で  $\mathrm{PGL}_d(F_\infty)$  に付随するブリュア・ティッツビルディングを表す. これは, 次元が  $d - 1$  の単体複体である. その  $0$  次単体の集合は自然に  $\mathrm{GL}_d(F_\infty) / Z(F_\infty) \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_\infty)$  と同型であり,  $d - 1$  次単体の集合は  $\mathrm{GL}_d(F_\infty) / \mathcal{I}$  と同型になっている. ここで,  $\mathcal{O}_\infty$  は  $F_\infty$  の整数環,  $\mathcal{I}$  は  $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_\infty)$  の岩堀部分群である.  $d = 2$  のときには  $BT_\bullet$  はグラフであり, 樹木 (tree) になっている. 頂点の集合は  $\mathrm{GL}_2(F_\infty) / Z(F_\infty) \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\infty)$  となっていて, これは上半平面のもうひとつの表示  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$  の類似とみなすことができる. 有限体の位数が 2 のときの絵は任意のビルディングの本 (例えば [Ser]) にでているだろう.

**4.2.3.** ブリュア・ティッツビルディングを使って, 次のような単体複体  $X_{I,\bullet}^d = \mathrm{GL}_d(F) \backslash (BT_\bullet \times \mathrm{GL}_d(\mathbb{A}^\infty)) / \mathbb{K}_I$  を考える. この次数  $d - 1$  のボレル・ムーアホモロジー群  $H_{d-1}^{\mathrm{BM}}(X_{I,\bullet}^d, \mathbb{C})$  は  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_d(F_\infty)}(\mathrm{St}_d, \mathrm{Map}(\mathrm{GL}_d(F) \backslash \mathrm{GL}_d(\mathbb{A}) / \mathbb{K}_I, \mathbb{C}))$  と同型であることがわかっている. ここに,  $\mathrm{St}_d$  はスタインバーグ表現を表す. この同型は, 双対性によりボレル・ムーアホモロジー群は標準的にコンパクト台コホモロジーの双対と同型であることと, ボレルの計算 [Bo1, Section 6] によりビルディングのコンパクト台コホモロジーがスタインバーグ表現と同型であることより従う. アイヒラー・

志村同型で微分形式の群とモジュライのベッチコホモロジーが関係づけられているように、ビルディングのボレル・ムーア ホモロジー群はモジュライのエタールコホモロジーと関係している。上の同型は、保型表現であって素点  $\infty$  においてはスタインバーク表現を持つようなものが、ドリinfeldt 加群のモジュライのコホモロジーに現れる、と読むことができる。この点が、ドリinfeldt 加群ではラングランズ予想の解決には不十分であること（素点  $\infty$  では条件が課されてしまうこと）を意味している。

**4.2.4.** リジッド解析空間にはその形式モデルと呼ばれる形式スキームが（標準的ではないけれど）対応している。ドリinfeldt 対称空間の場合には、その形式モデルとして、ブリューア・ティッツ ビルディングを双対複体とする形式スキームがとれる。リジッド解析空間は特殊ファイバーの管状近傍である、という見方があり、そのためビルディングのホモロジーとモジュライの（コ）ホモロジーが関係する、という見方ができる。ラングランズ予想のためのモジュライのエタールコホモロジーの計算の際に、ビルディングの（ボレル・ムーア）ホモロジーが出てくるのはそのためである。（曲線の場合は [Dr1] [De-Hu] 参照。）

## 5. オイラー系

**5.1. もともとのオイラー系の定義.** 本節ではオイラー系の定義をルービンの本 [Ru1, p.33, 2.1] から引用する。定義を引用するのは、第5.2節で少々異なるオイラー系を定義をし、それとの対比をみるためだけである。オイラー系はそもそも岩澤理論のための道具で、 $p$  進表現のガロアコホモロジー群を統制するのに力を発揮し、関連キーワードとしては、セルマー群、テート・シャファレヴィッチ群などが挙げられるが、関数体における類似では筆者はそれらを扱っていないため、これ以上立ち入らない。

**5.1.1.** 素数  $p$  をひとつ固定しておく。ガロア群  $G_Q = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  の  $p$  進表現とは、有限階数自由  $\mathbb{Z}_p$  加群  $T$  であって、 $G_Q$  の線型作用を持つものをいう。さらに、 $T$  は有限個の素点を除いて不分岐であると仮定する。例えば  $\rho: G_Q \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$  を連続指標とし、 $T$  を階数 1 の自由  $\mathbb{Z}_p$  加群であって、 $G_Q$  が  $\rho$  を通じて作用しているものとする。これは  $p$  進表現である。  $\rho$  を円分指標とするならば、 $T = \mathbb{Z}_p(1) = \varprojlim_n \mu_{p^n}$  である。

**5.1.2.**  $T$  を  $G_Q$  の  $p$  進表現とする。  $T$  が分岐する素数と  $p$  で割り切れる正整数  $N$  をとる。  $T$  で不分岐であるような素数  $q$  に対し、  $\text{Frob}_q$  で  $G_Q$  における  $q$  のフロベニウス元を表すことにする。  $P_q(x) = \det(1 - \text{Frob}_q^{-1} x | T^*) \in \mathbb{Z}_p[x]$  を特性多項式とする。 ( $T^*$  は  $T$  の双対を表す。)  $q$  において不分岐なので  $P_q$  はフロベニウス元  $\text{Frob}_q$  の取り方によらない。コホモロジーの元の族  $(c_m \in H^1(\mathbb{Q}(\mu_m), T))_m$  がオイラー系であるとは、もし、  $m|n$  とするならば、

$$\text{Cor}_{\mathbb{Q}(\mu_m)/\mathbb{Q}(\mu_n)} c_m = \prod_{q|m, q \nmid n} P_q(\text{Frob}_q^{-1}) c_n,$$

となるものをいう。

**5.1.3.** 以下はだいたいルービンの本 [Ru1, 3.2, p.48] の和訳である。先ほど挙げた  $T = \mathbb{Z}_p(1)$  の例をみてみよう。  $F$  を  $\mathbb{Q}$  の拡大体とすると

$$H^1(F, \mathbb{Z}_p(1)) = \varprojlim_n H^1(F, \mu_{p^n}) = \varprojlim_n F^\times / (F^\times)^{p^n} = (F^\times)^\wedge.$$

ここで、 $\wedge$  は  $p$  進完備化を表す。  $\{\zeta_m | m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$  を  $\zeta_m^n = \zeta_m(m, n \geq 1)$  となるように固定しておく。次のような関係式が成立する。

$$\text{Norm}_{\mathbb{Q}(\mu_{ml})/\mathbb{Q}(\mu_m)}(\zeta_{ml} - 1) = \begin{cases} (\zeta_m - 1) & \text{if } l|m \\ (\zeta_m - 1)^{1 - \text{Frob}_l^{-1}} & \text{if } l \nmid m > 1. \end{cases}$$

そこで  $c_m = \text{Norm}_{\mathbb{Q}(\mu_{mp})/\mathbb{Q}(\mu_m)}(\zeta_{mp} - 1) \in \mathbb{Q}(\mu_m)^\times \subset H^1(\mathbb{Q}(\mu_m), \mathbb{Z}_p(1))$  とおく.  
 $\det(1 - \text{Frob}_l^{-1} x | \mathbb{Z}_p(1)^*) = \det(1 - \text{Frob}_l^{-1} x | \mathbb{Z}_p) = 1 - x$  であることと, 上の関係式より  $(c_m)$  はオイラー系をなすことがわかる.

**5.2.  $\text{GL}_d$  のオイラー系.** ここではオイラー系の少し違う定義について述べる. 第5.1節で述べたように, オイラー系とはガロアコホモロジーの元の系であって, 定義にはガロア群が当然出てきたのだが, ここではヘッケ環を用いて定義する. 主な相違点は, ハッセ・ヴェイユL関数のL因子を使っていた部分がヘッケ作用素の多項式になっていることである.

**5.2.1.  $F$  を大域体とする.** 正標数の場合には第4.1.1節のように (無限) 素点  $\infty$  をひとつ固定する.  $A$  は  $F$  のアデール環を表し,  $A^\infty$  で有限アデール環を表すことにする. 正標数のときには有限アデール環の定義は第4.2.1節で与えた.  $A$  を  $F$  の整数環とすると,  $\hat{A} \otimes_A F = A^\infty$  となる. ここで,  $\hat{A} = \varprojlim_I A/I$  は副有限完備化を表す. 記号はドリinfeld加群を扱う場合のもの ( $A, F$  など) に近いのだが, 以下,  $F = \mathbb{Q}, A = \mathbb{Z}$  と読み替えてもよい.

**5.2.2.  $d \geq 1$  を固定する.**  $0 \leq m \leq d$  をとる.  $I, J$  を  $A$  のゼロでないイデアルとし,

$$\mathbb{K}_{I,m,J}^\infty = \left\{ (x_{ij}) \in \text{GL}_d(\hat{A}) \mid \begin{array}{l} (x_{ij})_{1 \leq j \leq m} \equiv (\delta_{ij})_{1 \leq j \leq m} \pmod{I} \\ (x_{ij})_{m+1 \leq j \leq d} \equiv (\delta_{ij})_{m+1 \leq j \leq d} \pmod{J} \end{array} \right\}$$

とおく. これは  $\text{GL}_d(A^\infty)$  の開コンパクト部分群である.

$\wp$  をゼロでない素イデアルとする. 整数  $e_{\wp,m}$  を次のように定義する.

$$e_{\wp,m} = \begin{cases} 0 & \text{if } \wp | I, \quad \wp | J, \\ m & \text{if } \wp | I, \quad \wp \nmid J, \\ d - m & \text{if } \wp \nmid I, \quad \wp | J, \\ d & \text{if } \wp \nmid I, \quad \wp \nmid J. \end{cases}$$

**5.2.3.  $\text{diag}(a_1, \dots, a_d)$  で  $d$  次の対角行列であって, 左上から順に成分が  $a_1, a_2, \dots$  となっているものを表すことにする.**  $\wp$  成分が素元, 他の成分がすべて1であるような  $A^\infty$  の元を  $\varpi_\wp$  で表す.  $r = 0, \dots, e_{\wp,m}$  に対し, ヘッケ作用素  $T_{\wp,r}$  を次のように定義する.  $\wp \nmid I$  のときは

$$\mathbb{K}_{I,m,J}^\infty \text{diag}(\varpi_\wp, \dots, \varpi_\wp, 1, \dots, 1) \mathbb{K}_{I,m,J}^\infty$$

に対応するヘッケ作用素を  $T_{\wp,r}$  で表す. ここに,  $\varpi_\wp$  は  $r$  個, 1 は  $d - r$  個あるとする.  $\wp | I$  かつ  $\wp \nmid J$  のときは,  $T_{\wp,r}$  を両側剰余類

$$\mathbb{K}_{I,m,J}^\infty \text{diag}(1, \dots, 1, \varpi_\wp, \dots, \varpi_\wp) \mathbb{K}_{I,m,J}^\infty$$

に対応するヘッケ作用素とする.

双対ヘッケ作用素  $T_{\wp,r}^*$  を上ですべての  $\varpi_\wp$  を  $\varpi_\wp^{-1}$  で置き換えたものとして同じように定義する.

**5.2.4. 少し異なるオイラー系の定義をしよう.** [Gri, Definition 1.4.1, p.20] にもある.  $V$  を  $\text{GL}_d(A^\infty)$  加群とする.  $0 \leq m \leq d$  を固定する.  $A$  の二つのイデアル  $I, J$  で添え字付けされた, 元  $c_{I,J} \in V^{\mathbb{K}_{I,m,J}^\infty}$  の族  $(c_{I,J})_{I,J}$  がオイラー系である次の関係式が成立することをいう.  $I' \subset I, J' \subset J$  をゼロでない  $A$  のイデアルとする.  $\wp$  をゼロでない  $A$  の素イデアルとし,  $\text{Supp}(A/I) \cup \{\wp\} \supset \text{Supp}(A/I')$  かつ  $\text{Supp}(A/J) \cup \{\wp\} \supset \text{Supp}(A/J')$  であると仮定する. イデアル  $I' \subset I, J' \subset J$  に対し,

$$\text{Trace}_{I',J'}^{I,J} c_{I',J'} = \sum_{i=0}^{e_{\wp,m}} (-1)^i q^{\frac{i(i-1)}{2}} T_{\wp,r}^* c_{I,J}$$

が成立. ここで,  $\text{Trace}_{I,J}^{I',J'} : V^{\mathbb{K}_{I',m,J'}} \rightarrow V^{\mathbb{K}_{I,m,J}}$  はトレース写像である.

右辺のヘッケ作用素の和が定義として妥当そうである理由については第6.1.3節を参照.

**5.3. ディストリビューションのオイラー系.** ここでは「ディストリビューション (の積) はオイラー系になる」というスローガンを掲げ, それを説明するのが目的である. 第5.2節ではオイラー系の本来とは少々異なる定義を与えた. 本節では, ディストリビューションは自動的にオイラー系になっている (定理5.1) ことをみる.

宣伝を兼ねて, 上記定義および定理5.1の一般性について注意をしておこう. プレプリント [KoYa] では定理5.1より一般的な定理を示している. そのような一般性が必要になるのは, 例えば, 加藤の  $K_2$  におけるオイラー系の関係式を示す際である. 加藤によるベイリンソン元のオイラー系もまたディストリビューションから作られたものであるが, 定理5.1の直接の応用としてはオイラー系であることを示すことができない. それは  $K$  群のノルム写像 (上でいうトレース写像にあたる) は複雑になっているためである.

プレプリント [KoYa] では, 射影公式を満たすようなノルム (あるいはトレース) 写像についてディストリビューションはオイラー系をなす, ということを示してある. それならば  $K$  群のノルム写像にも対応できるので, 加藤の  $K$  群でのオイラー系の関係式を示すことができる. 筆者はドリンフェルト加群のモジュライの  $K$  群の元のなすオイラー系の関係式を示したかったので, プレプリントでの抽象的な扱いを必要とした. もっとも, 加藤のときとは異なり,  $K$  群の段階でオイラー系をなしていることへの応用は見つけていない. (他のコホモロジー理論へレギュレーターを作ってみてはどうだろうか.)

**5.3.1.** 本節の内容についてはグリゴロフ [Gri, 1.1, p.4] を参考にした. ディストリビューションとはここでは分配法則を満たすような関数の族を指す. 後では使わないので厳密な定義ではなく例を挙げる.  $k$  を正整数とする. 関数  $\phi : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^k \rightarrow \mathbb{C}$  であって整数  $N$  と  $y \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^k$  に対し,

$$\sum_{Nx=y} \phi(x) = \phi(y)$$

が成立するものをディストリビューションと呼ぼう. 後で使うものは, 定義域が  $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^k \setminus \{0\}$  である場合も考える. また, 上の等式の代わりに何かある数  $r$  に対して  $\sum_{Nx=y} \phi(x) = N^r \phi(y)$  が成立するような関数を考えることもある. 例としては次のような関数がある. 1の原始  $N$  乗根  $\zeta_N \in \bar{\mathbb{Q}}^\times$  を  $\zeta_{mn}^n = \zeta_m$  となるように決めておく. 関数  $\phi$  を  $a/N \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  に対し  $\phi(\frac{a}{N}) = 1 - \zeta_N^a$  と定義するとこれはディストリビューションになっている.

$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\infty$  で  $\mathbb{Q}$  の有限アデル環を表す.  $S(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\infty)$  で  $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\infty$  上の  $\mathbb{Q}$  値シュワルツ・ブリューア関数のなす群を表す. シュワルツ・ブリューア関数とは, 局所的に定数で台がコンパクトである関数のこととする. 正整数  $k$  をとる. アーベル群  $B$  と  $\text{Hom}(S(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^\infty)^{\oplus k}, B)$  の元  $\theta$  に対し, 関数  $G_\theta : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\oplus k} \rightarrow B$  を  $G_\theta(x) = \theta(\text{char}(x + \hat{\mathbb{Z}}^k))$  として定義すると, 上でいう ( $B$  値) ディストリビューションであることがわかる. 簡単のため  $\mathbb{Q}$  を用いたが, 同様のことが任意の大域体で成り立つ. 以下では  $S(\mathbb{A}^\infty)$  (の直和) の元を扱う.

**5.3.2.** 次のような  $\text{GL}_d(\mathbb{A}^\infty)$  加群を考えよう.  $d \geq 1$  を整数とする.  $R$  を環とすると,  $\text{Mat}_d(R)$  で  $R$  係数の  $d \times d$  行列の集合を表すことにする.  $S(\text{Mat}(\mathbb{A}^\infty))$  で局所定数であり台がコンパクトであるような,  $\text{Mat}_d(\mathbb{A}^\infty)$  上の  $\mathbb{Q}$  値関数全体を表すことにする. ブリューア・シュワルツ関数のことである.  $\mathbb{A}^{\infty \oplus d}$  を縦ベクトル

とみなし,  $GL_d(\mathbb{A}^\infty)$  の左からの掛け算での左作用を考える.  $Mat_d(\mathbb{A}^\infty)$  にも左からの掛け算での左作用を考える.  $\varphi: S(\mathbb{A}^{\infty \oplus d})^{\otimes d} \rightarrow S(Mat_d(\mathbb{A}^\infty))$  という写像を  $\varphi(f_1 \otimes \cdots \otimes f_d)((x_{ij})) = f_1((x_{1j})) \cdots f_d((x_{dj}))$  とおくことで定義する. ここで,  $f_i$  は  $S(\mathbb{A}^{\infty \oplus d})$  の元であり,  $(x_{ij})$  は  $Mat_d(\mathbb{A}^\infty)$  の元である. これは  $GL_d(\mathbb{A}^\infty)$  加群の同型である.

ゼロでない  $A$  のイデアル  $I, J$  と整数  $0 \leq m \leq d$  に対し,

$$Y_{I,m,J} = \left\{ (x_{ij}) \in Mat_d(\hat{A}) \mid \begin{array}{l} (x_{ij})_{1 \leq j \leq m} \equiv (\delta_{ij})_{1 \leq j \leq m} \pmod{I} \\ (x_{ij})_{m+1 \leq j \leq d} \equiv (\delta_{ij})_{m+1 \leq j \leq d} \pmod{J} \end{array} \right\}$$

とおく.  $\hat{A} \subset \mathbb{A}^\infty$  により,  $Mat_d(\mathbb{A}^\infty)$  の部分集合とみなす.  $\text{char} Y_{I,m,J}$  で  $Y_{I,m,J}$  の特性関数を表す. すると,  $\text{char} Y_{I,m,J} \in \text{Hom}(S(Mat_d(\mathbb{A}^\infty)), \mathbb{Z})^{K_{I,m,J}^\infty}$  である.

**5.3.3.**  $0 \leq m \leq d$  を固定する.  $I' \subset I, J' \subset J$  をゼロでない  $A$  のイデアルとする. トレース写像  $\text{Trace}_{I',J'}^{I,J}: S(Mat_d(\mathbb{A}^\infty))^{K_{I',r,J'}^\infty} \rightarrow S(Mat_d(\mathbb{A}^\infty))^{K_{I,r,J}^\infty}$  が自然に定義される.

**定理 5.1.** 記号を上の通りとする. 族  $(\text{char} Y_{I,r,J})_{I,J}$  はオイラー系をなす. すなわち次の関係式をみたす.  $I' \subset I, J' \subset J$  をゼロでない  $A$  のイデアルとする.  $\wp$  をゼロでない  $A$  の素イデアルとし,  $\text{Supp}(A/I) \cup \{\wp\} \supset \text{Supp}(A/I')$  かつ  $\text{Supp}(A/J) \cup \{\wp\} \supset \text{Supp}(A/J')$  であると仮定する. このとき,

$$\text{Trace}_{I',J'}^{I,J}(\text{char} Y_{I',m,J'}) = \left( \sum_{j=0}^{e_{\wp,m}} (-1)^j q_{\wp}^{\frac{j(j-1)}{2}} T_{j,\wp}^*(\text{char} Y_{I,m,J}) \right)$$

が成立する.

この定理の証明は第 5.5 節で与える. 次の系が実用的である.

$S'(\mathbb{A}^{\infty \oplus d})$  で  $S(\mathbb{A}^{\infty \oplus d})$  の元であって  ${}^t(0, \dots, 0)$  の値がゼロであるもののなす部分  $GL_d(\mathbb{A}^\infty)$  加群を表す. また,  $S'(Mat_d(\mathbb{A}^\infty)) = \varphi(S'(\mathbb{A}^{\infty \oplus d})^{\otimes d})$  とおく.

**系 5.2.**  $V$  を  $GL_d(\mathbb{A}^\infty)$  加群とする.  $GL_d(\mathbb{A}^\infty)$  加群の射  $\rho: S'(Mat_d(\mathbb{A}^\infty)) \rightarrow V$  が与えられているとする.  $v_{I,m,J} = \rho(c_{I,m,J})$  とおくと, 族  $(v_{I,m,J})_{I,J}$  はオイラー系をなす.

**証明.** 射  $\rho$  とヘッケ作用素が可換であることから従う. □

**5.4. L 因子が現れること.** 定理 5.1 の証明の前に, 簡単に原理を紹介しておこう. 「双対」になっているので誤解をしないようにしていただきたい. 命題はヘッケ作用素に関する計算なので, 局所的に行えばよい.  $\mathcal{O}$  を局所体,  $K$  をその商体,  $\wp$  を  $\mathcal{O}$  の極大イデアル,  $\pi$  を素元,  $q$  を剰余体の位数としよう. 本節では,  $GL_d(\mathcal{O})$  と  $Mat_d(\mathcal{O})$  の「差」として自然に L 因子が出てくる, ということを述べる.

**5.4.1.** まず佐武同型を述べておこう. ここでは [AZ, 3.2.3, p.117] にある具体的な記述を使う. 写像

$$\omega: GL_d(\mathcal{O}) \backslash GL_d(K) \rightarrow \mathbb{Q}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_d^{\pm 1}]$$

を次のように定義する. 剰余類の代表として

$$x = GL_d(K) \begin{bmatrix} \pi^{b_1} & * & * \\ \vdots & \ddots & * \\ 0 & \dots & \pi^{b_n} \end{bmatrix}$$

という形のものを取ってきたとき,  $\omega(x) = q^{-m} x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$  とすると, これはヘッケ環と  $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_d]^{S_d}$  の間の同型を与える. (ヘッケ環の定義をしていないが,  $\mathbb{Q}$  代数

であって  $GL_d(K)$  内の  $GL_d(\mathcal{O})$  両側剰余類で生成されるものとする.) ここに  $S_d$  は  $d$  次の対称群で, 文字  $x$  の添え字に作用するとした.

**5.4.2.**  $\mathbb{K} = GL_d(\mathcal{O})$  とおき,  $\mathcal{H}$  で  $\mathbb{K}$  両側剰余類からつくられるヘッケ環を表す. まず,  $GL_d(K)$  の部分集合であって, 両側  $\mathbb{K}$  不変なものを (無限和もゆるしてしまい)  $\mathcal{H}$  の元とみなしてしまおう.  $GL_d(\mathcal{O})$  は  $\mathbb{K}1\mathbb{K}$  であり,  $Mat_d(\mathcal{O}) \cap GL_d(K)$  は  $\sum_g \mathbb{K}g\mathbb{K}$  と書ける. さて, これらを  $\omega$  で送ると, それぞれ,  $1$  と  $\sum_{b_1, \dots, b_d \geq 0} q^{-b_1 - b_2 - \dots - b_d} x_1^{b_1} \dots x_d^{b_d}$  になっていることがわかる. ここでは佐武同型の行き先をヘッケ環の元の無限和をゆるしたのに応じて  $\mathbb{Q}[[x_1, \dots, x_d]]^{S_d}$  に拡張した.

環  $\mathbb{Q}[[x_1, \dots, x_d]]^{S_d}$  内の等式

$$(1 - q^{-1}x_1)(1 - q^{-1}x_2) \cdots (1 - q^{-1}x_d) \sum_{b_1, \dots, b_d \geq 0} q^{-b_1 - \dots - b_d} x_1^{b_1} \dots x_d^{b_d} = 1$$

をみよう. 佐武同型を通してみると, 右辺は  $GL_d(\mathcal{O})$  であり左辺のふたつめの因子は  $Mat_d(\mathcal{O}) \cap GL_d(K)$  であった. さて, [AZ, Lemma 2.21, p.118] より,  $\sigma_i$  を  $i$  次の基本対称多項式とすると  $\omega(T_r) = q^{-\frac{i(i+1)}{2}} \sigma_i$  となっている. したがって,

$$\omega\left(\sum_{r=0}^d (-1)^r q^{r(r-1)/2} T_r\right) = (1 - q^{-1}x_1)(1 - q^{-1}x_2) \cdots (1 - q^{-1}x_d)$$

を得る. よって上の等式は,  $Mat_d(\mathcal{O})(\cap GL_d(K))$  にヘッケ作用素の  $L$  因子を作用させると  $GL_d(\mathcal{O})$  が出てくる, と読むことができるのである.

$Mat_d(\mathcal{O})$  というのはオイラー系をなす元に対応していて,  $GL_d(\mathcal{O})$  というのはその元のトレース写像による像に対応している. 上の等式は, トレース写像による像が  $L$  因子と関係していることを言い表している. 次節でこれに関してきちんとした証明を与える. 注意する点は, ディストリビューションの元は「双対」とみなすべきなので, 上で普通のヘッケ作用素を用いた箇所をすべて双対ヘッケ作用素で置き換えるのが正しい.

**5.5. 定理 5.1 の証明.** 本節では定理 5.1 の証明を与える. 前節で原理を説明するときには佐武同型を用いたが, 次数の低い  $L$  因子 ( $e_{p,m} < d$  の場合) を扱うため, ここでは用いない. そのおかげで, 計算にはガウスの二項定理が出てくるだけであって,それほど難しい計算をしているわけではないということがわかりやすくなっていると思う. 計算のための舞台装置として,  $K^d$  内の  $\mathcal{O}$  格子の集合を考える.  $GL_d(K)/GL_d(\mathcal{O})$  あるいは  $GL_d(K)/\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K}$  はレベルをつかさどるコンパクト部分群) の具体的な記述方法のひとつにすぎないがこのような計算に向いていると思う. (安田さんから教わった.)

**5.5.1.**  $\mathcal{O}$  を局所体とし,  $K$  をその商体とする. 素元  $\pi \in \mathcal{O}$  をひとつ固定し,  $\kappa = \mathcal{O}/(\pi)$  を剰余体としよう.  $q$  で  $\kappa$  の位数を表すことにする.

$d \geq 1$  を正整数とする.  $\mathcal{L}$  で  $K^d$  内の  $\mathcal{O}$  格子 ( $K^d$  の自由  $\mathcal{O}$  部分加群であって階数が  $d$  であるもの) の集合を表す.  $K^d$  は縦ベクトルの集合とみなす. 整数  $0 \leq m \leq d$ ,  $n \geq 0$  をとる.  $\mathcal{L}_{m,n}$  で  $(\mathcal{L}, \iota)$  の集合を表す. ここに  $L \in \mathcal{L}$  は格子であり,  $\iota: L \rightarrow (\mathcal{O}/(\pi^n))^m$  は  $\mathcal{O}$  加群の全射準同型である.  $g \in GL_d(K)$  と  $(L, \iota) \in \mathcal{L}_{m,n}$  に対し,  $g(L, \iota) = (g^{-1}L, g^{-1}\iota \xrightarrow{g} \iota \xrightarrow{\iota} (\mathcal{O}/(\pi^n))^{\oplus m})$  とおくことで,  $GL_d(K)$  の  $\mathcal{L}_{m,n}$  への左作用を定める.

$L_{st} = \mathcal{O}^d \subset K^d$  とおく.  $0 \leq m \leq d, n \geq 0$  に対し,  $\iota_{st,m,n}: L_{st} = \mathcal{O}^d \rightarrow (\mathcal{O}/(\pi^n))^{\oplus d} \rightarrow (\mathcal{O}/(\pi^n))^{\oplus m}$  とおく. ここで, ひとつ目の写像は標準的な商写像, ふたつ目は  ${}^t(a_1, \dots, a_d) \in (\mathcal{O}/(\pi^n))^{\oplus d}$  を  ${}^t(a_{d-m+1}, \dots, a_d) \rightarrow$  送る写像である. このとき  $(L_{st}, \iota_{st,m,n})$  は  $\mathcal{L}_{m,n}$  の元を定める.  $GL_d(K)$  の作用に関する  $(L_{st}, \iota_{st,m,n})$  の固

定部分群を  $\mathbb{K}_{m,n}$  とおくことで、自然な同型  $GL_d(K)/\mathbb{K}_{m,n} \cong \mathcal{L}_{m,n}$  を得る。ここでは  $g\mathbb{K}_{m,n}$  に対し、 $g(L_{\text{st}}, \iota_{\text{st},m,n})$  が対応している。定義から

$\mathbb{K}_{m,n} = \{(g_{ij}) \in GL_d(\mathcal{O}) \mid (g_{ij})_{d-m+1 \leq j \leq d} \equiv (\delta_{ij})_{d-m+1 \leq j \leq d} \pmod{\pi^n} (1 \leq i \leq d)\}$   
である。ここで  $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタを表す。

**5.5.2.**  $0 \leq m \leq d$  に対し、 $0 \leq r \leq d-m$  をとる。  $T_r = T_{r,m,n}$  で両側剰余類  $\mathbb{K}_{m,n} \text{diag}(\pi, \dots, \pi, 1, \dots, 1) \mathbb{K}_{m,n}$  に対応するヘッケ作用素をあらわすことにする。上では  $\pi$  は  $r$  個、 $1$  は  $d-r$  個現れていて、 $\text{diag}(a, b, \dots)$  は対角行列であってその対角成分が左上から順に  $a, b, \dots$  となっているものとする。双対ヘッケ作用素を  $T_r^* = T_{r,m,n}^*$  を  $\mathbb{K}_{m,n} \text{diag}(\pi^{-1}, \dots, \pi^{-1}, 1, \dots, 1) \mathbb{K}_{m,n}$  に対応する作用素として定義する。

$0 \leq m \leq d$ ,  $0 \leq r \leq d-m$  とする。  $\mathcal{L}_{m,n} \cong GL_d(K)/\mathbb{K}_{m,n}$  なので  $T_r^* = T_{r,m,n}^*$  は  $\text{Map}(\mathcal{L}_{m,n}, \mathbb{Z})$  に作用する。具体的には次の通り。  $f \in \text{Map}(\mathcal{L}_{m,n}, \mathbb{Z})$ ,  $(L, \iota) \in \mathcal{L}_{m,n}$  とする。このとき

$$(T_r^* f)(L, \iota) = \sum_{(L', \iota')} f(L', \iota')$$

が成立。ここで、 $(L', \iota')$  は次の条件をみたす  $\mathcal{L}_{m,n}$  の元をはしる。

- (1)  $L \subset L' \subset \pi^{-1}L$ . 単射  $L \subset L'$  を  $i_{L'}$  で表す。
- (2)  $\iota' \circ i_{L'} = \iota$
- (3)  $\dim_{\kappa} L'/L = r$ .

**5.5.3.**  $0 \leq m \leq d, n \geq 0$  に対し、 $\mathcal{L}_{m,n}$  の元  $(L, \iota)$  であって、次の性質 (1)(2) を満たすものの全体のなす集合を  $I_{m,n}$  とおく。

- (1)  $L$  は  $L_{\text{st}}$  に含まれる。その単射を  $i_L$  で表す。
- (2)  $\iota_{\text{st},m,n} \circ i_L = \iota$  が成立。

$m = d$  のときには  $I_{m,n} = \{(L_{\text{st}}, \iota_{\text{st},m,n})\}$ ,  $m = 0$  のときには  $I_{0,n} = I_{0,0} = \{L \in cL \mid L \subset L_{\text{st}}\}$  となっている。  $0 \leq m \leq d, n \geq 0$  とする。  $\text{char} I_{m,n}$  で集合  $I_{m,n} \subset \mathcal{L}_{m,n}$  の特性関数を表すことにする。

$0 \leq x \leq x'$  を整数とする。  $\text{Gr}_{x,x'}$  で  $\mathbb{F}_q$  上  $x'$  次元ベクトル空間の中の  $x$  次元ベクトル部分空間全体の集合を表すことにする。

**補題 5.3.** 記号を上の通りとする。  $0 \leq r \leq d-m$  とする。  $(L, \iota) \in \mathcal{L}_{m,n}$  に対し次が成立。

$$T_{r,m,n}^*(\text{char} I_{m,n})(L, \iota) = \begin{cases} \#\text{Gr}_{r,d'-m} & (*) \text{ が成立するとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

ここで条件  $(*)$  とは、 $L \subset L_{\text{st}}$  かつ  $\iota = [L \subset L_{\text{st}} \xrightarrow{\iota_{\text{st},m,n}} (\mathcal{O}/(\pi^n)^{\oplus m})]$ . また、 $d' = \dim_{\kappa}((L_{\text{st}} \cap \pi^{-1}L) + L)/L$  とおき、 $\#\text{Gr}_{r,d'-m}$  は  $r > d' - m$  または  $d' - m < 0$  であるときにはゼロであるとする。

**証明.** ヘッケ作用の具体的な記述により、左辺は

$$\sum_{(L', \iota')} (\text{char} I_{m,n})(L', \iota')$$

に等しい。ここで、 $(L', \iota')$  は次の条件をみたすものをはしる。

- (1)  $L \subset^{i_{L'}} L' \subset \pi^{-1}L$
- (2)  $\iota' \circ i_{L'} = \iota$
- (3)  $L'/L \cong \kappa^r$ .

これは、 $\text{char} I_{m,n}$  の定義より、 $L' \in \mathcal{L}$  であって次の条件をみたすもののなす集合の濃度と等しい:

- (1)  $L \xrightarrow{i_{L'}} L' \subset \pi^{-1}L$
- (2)  $L' \xrightarrow{j_{L'}} L_{\text{st}}$
- (3)  $\iota_{\text{st},m,n} \circ j_{L'} \circ i_{L'} = \iota$
- (4)  $L'/L \cong \kappa^r$ .

特に,  $L \subset L_{\text{st}}$  でないときにはゼロになっている. また,  $\iota \neq [L \subset L_{\text{st}} \xrightarrow{\iota_{\text{st},m,n}} (\mathcal{O}/\pi^n)^{\oplus m}]$  のときにもゼロであることがわかる.

$\iota = [L \subset L_{\text{st}} \xrightarrow{\iota_{\text{st},m,n}} (\mathcal{O}/\pi^n)^{\oplus m}]$  のときには, 全てを  $\text{mod } L$  することで, 上の数は, 次の集合の濃度と等しいことがわかる: 有限次元  $\kappa$  ベクトル空間  $\bar{L}' \subset (\pi^{-1}L \cap L_{\text{st}}) + L/L$  であって, 次の条件をみたすもの.

- (1)  $\bar{L}' \rightarrow ((\pi^{-1} \cap L_{\text{st}}) + L)/L \rightarrow (\mathcal{O}/\pi)^{\oplus m}$  が全射. ここで二つ目の写像は  $\iota$  によって誘導されるもの.
- (2)  $\dim_{\kappa} \bar{L}' = r$ .

今,  $d' = \dim(\pi^{-1}L \cap L_{\text{st}}) + L/L$  とおけば, (1)(2) より, 上のような  $\bar{L}'$  は次元  $d' - m$  のベクトル空間の中の次元  $r$  部分空間と対応することがわかる. これにより命題は示された.  $\square$

系 5.4. 記号を上のとおりとする. 次が成立.

$$\sum_{r=0}^{d-m} (-1)^r q^{\frac{r(r-1)}{2}} (T_{r,m,n}^* \text{char } I_{m,n})(L, \iota) = \begin{cases} 1 & (*) \text{ が成立かつ } d' = m \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

ここに  $d' = \dim_{\kappa}((L_{\text{st}} \cap \pi^{-1}L) + L)/L$ .

証明. 少しだけ  $q$  解析の記号を使う. 整数  $0 \leq s, m \leq n$  に対し,  $[s] = (q^s - 1)/(q - 1)$ ,  $[s]! = [s][s-1] \cdots [1]$ ,  $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[m]![n-m]!}$  とおく. すると,  $q$  を  $\kappa$  の位数とすれば  $\text{Gr}_{x,x'}$  の位数が  $\begin{bmatrix} x' \\ x \end{bmatrix}$  であることが簡単にわかる.  $q$  整数に関するガウスの二項係数公式 ([Ka-Ch, (5.5), p.15]) とは次の命題.  $u \geq 1$  に対し

$$\sum_{j=0}^u (-1)^j q^{\frac{j(j-1)}{2}} \begin{bmatrix} u \\ j \end{bmatrix} = 0$$

が成立する.  $u = 0$  のときには左辺は 1 であることに注意して, この公式を用いれば系の主張は従う.  $\square$

定理 5.5.

$$\text{Trace}_{d,m}(\text{char } I_{d,n}) = \sum_{r=0}^{d-m} (-1)^r q^{\frac{r(r-1)}{2}} (T_{r,m,n}^* \text{char } I_{m,n})$$

証明. 上の系があるので右辺の計算は終わっている. 左辺を計算すればよい.  $(L, \iota) \in \mathcal{L}_{m,n}$  での値を計算しよう. 左辺の取りうる値は 0 か 1 のみであることに注意.

$(\text{Trace}_{d,m}(\text{char } I_{d,n}))(L, \iota) = 1$  とすると,  $L = L_{\text{st}}$  であり,  $\iota$  に関する条件から  $d' = \dim_{\kappa}(\pi^{-1} \cap L_{\text{st}}) + L/L = m$  が従う. 上の系より右辺も 1 になる.

逆に  $(*)$  が成立するとき, さらに  $d' = m$  ならば  $L = L_{\text{st}}$  が従う. よって  $(\text{Trace}_{d,m}(\text{char } I_{d,n}))(L, \iota) = 1$ . これにより定理は示された.  $\square$

5.6. アイゼンシュタイン級数の積のなすオイラー系. 本節ではアイゼンシュタイン級数の積のなすオイラー系 (つまり, アイゼンシュタイン級数の積の族であって, トレース写像によってオイラー系の関係式を満たすもの) を構成する. 系 5.2 をみると,  $S'(\text{Mat}_d(\mathbb{A}^{\infty}))$  から保型関数の空間への  $\text{GL}_d(\mathbb{A}^{\infty})$  加群としての写像を作れば保型関

数のオイラー系が構成されたことになる。この写像の構成のためにアイゼンシュタイン級数を定義しよう。

**5.6.1.** アイゼンシュタイン級数は、雑に言うと、より小さな群あるいは格子と、絶対値のような大きさを測る関数があると、格子上のその大きさの和として定義できる。まず、ブリューア・ティッツ ビルディング上の距離に相当するものを定義しよう。ブリューア・ティッツ ビルディングの頂点に相当する格子  $L \in BT_0$  と、横ベクトル  $\mathbf{a} \in V_\infty$  に対し、 $\text{ord}_L(\mathbf{a}) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid \mathbf{a} \in \pi_\infty^n L\}$ 、とおく。さらに、 $|\mathbf{a}|_L = q_\infty^{-\text{ord}_L(\mathbf{a})}$  とおく。  $|\mathbf{a}|_L = 1$  となるのは  $\mathbf{a} \in L \setminus \pi_\infty L$  のときでありそのときに限ることに注意しておく。

**5.6.2.**  $V = F^{\oplus d}$ ,  $V_\infty = V \otimes_F F_\infty$ ,  $\mathcal{O}_{V_\infty} = \mathcal{O}_\infty^{\oplus d} \subset V_\infty$ ,  $V^\infty = V \otimes_F \mathbb{A}^\infty$ ,  $\mathcal{O}_{V^\infty} = \hat{\mathbb{A}}^{\oplus d} \subset V^\infty$  とおく。  $V_{\mathbb{A}} = V \otimes_F \mathbb{A} = V_\infty \times V^\infty$  とおこう。  $V_{\mathbb{A}}$  の元  $\mathbf{x} \in V_{\mathbb{A}}$  に対し、 $\mathbf{x}_\infty \in V_\infty$  を  $\infty$  成分、 $\mathbf{x}^\infty \in V^\infty$  を有限成分とおき、 $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_\infty, \mathbf{x}^\infty) \in V_{\mathbb{A}}$  と書き表す。

$\Lambda \subset V$  を  $A$  格子とする。  $\mathbf{b} \in (V/\Lambda) \setminus \{0\}$ ,  $\hat{\Lambda} = \Lambda \otimes_A \hat{\mathbb{A}} \subset V^\infty$  とおく。  $V_{\mathbb{A}}$  上の  $\mathbb{C}((q_\infty^{-s}))$  値関数  $\phi_{\Lambda, \mathbf{b}}$  を  $\phi_{\Lambda, \mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \phi_\infty(\mathbf{x}_\infty) \phi_{\hat{\Lambda}, \mathbf{b}}^\infty(\mathbf{x}^\infty)$  と定義する。ここで  $\phi_{\hat{\Lambda}, \mathbf{b}}^\infty$  は  $\mathbf{b} + \hat{\Lambda} \subset V^\infty$  上の特性関数であり、 $\phi_\infty(\mathbf{x}_\infty) = |\mathbf{x}_\infty|_{\mathcal{O}_{V_\infty}}^{-s}$  とした。

$g \in \text{GL}_d(\mathbb{A})$  に対し、 $\mathbb{E}_{\Lambda, \mathbf{b}}(g) = \sum_{\mathbf{x} \in V} \phi_{\Lambda, \mathbf{b}}(\mathbf{x}g)$  と定義する。  $\mathbb{E}_{\Lambda, \mathbf{b}}$  は  $\mathbb{C}((q_\infty^{-s}))$  値関数

$$\mathbb{E}_{\Lambda, \mathbf{b}} : \text{GL}_d(F) \backslash \text{GL}_d(\mathbb{A}) / \text{GL}_d(\mathcal{O}_\infty) \mathbb{K}_{\Lambda, \mathbf{b}} \rightarrow \mathbb{C}((q_\infty^{-s}))$$

を定める。ここに  $\mathbb{K}_{\Lambda, \mathbf{b}}$  は  $\mathbf{b} + \hat{\Lambda}$  の固定部分群とした。

これがアイゼンシュタイン級数である。ここで  $V$  が現れるのは、このアイゼンシュタイン級数が部分群  $\{(g_{ij}) \in \text{GL}_d(F) \mid (g_{dj}) = (\delta_{dj}) \ 1 \leq j \leq d\}$  に対応するものだからで、 $V$  は商の代表系と対応していると考えられる。

**5.6.3.**  $j = 1, \dots, d$  に対し、 $\mathbf{1}_j = (0, \dots, 0, \overset{j}{1}, 0, \dots, 0)$  とおく。  $V = F^{\oplus d}$  の元とみなす。  $R = \mathbb{C}((q_\infty^{-s}))$  とおく。ここで、 $q_\infty$  は素点  $\infty$  における剰余体の位数である。  $s$  は後に複素数として  $L$  関数の変数となるのだが、本節では  $q_\infty^{-s}$  をひとつの変数としてみたほうがよい。

$0 \leq m \leq d$  とする。ゼロでない  $A$  のイデアル  $I \subsetneq A$ ,  $J \subsetneq A$  と、 $\text{GL}_d(F_\infty) \times \dots \times \text{GL}_d(F_\infty)$  の元  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_d)$  に対し、 $R$  値保型関数  $\mathcal{E}_{I, m, J, \mathbf{h}}(g)$  を次のように定義する。

$$\mathcal{E}_{I, m, J, \mathbf{h}}(g) = \prod_{j=1}^d \mathbb{E}_{I \oplus m \oplus J \oplus d-m, \mathbf{1}_j}(gh_j)(s_j),$$

$\mathcal{E}_{I, m, J, \mathbf{h}}$  は  $\mathcal{A}_R(I, m, J, |\cdot|_\infty^{-ds})$  (記号は第 6.1.1 節を参照) の元を定める。ここで、 $|\cdot|_\infty : F_\infty^\times \rightarrow \mathbb{R}^\times$  は局所体のノルム写像。

$g = (g_\infty, g^\infty) \in \text{GL}_d(\mathbb{A})$  に対し、

$$\mathcal{E}_{I, m, J, \mathbf{h}}(g) = \sum_{M \in \text{Mat}_d(F)} \text{ch}_{Y_{I, m, J}}(Mg^\infty) \Phi_{\mathbf{h}}(Mg_\infty),$$

と書けることに注意する。ここで、 $\text{ch}_{Y_{I, m, J}}$  は集合  $Y_{I, m, J}$  (第 5.3.2 節) 上の特性関数であり、 $\Phi_{\mathbf{h}} : \text{Mat}_d(F_\infty) \rightarrow R$  は  $M_\infty \in \text{Mat}_d(F_\infty)$  を  $\prod_{j=1}^d \phi_\infty(M_{\infty, j} h_j)$  に送る写像である。  $M_\infty$  の  $j$  番目の行を  $M_{\infty, j}$  で表した。

各  $\mathbb{E}_{I \oplus m \oplus J \oplus d-m, \mathbf{1}_j}$  はブリューア・ティッツ ビルディングの頂点上の関数であったが、それらをかけあわせることで  $(d-1)$  次単体上の関数を得る。  $\mathbf{h}$  はその調節のために導入したもので、実用上は  $h_i = \text{diag}(\pi_\infty, \dots, \pi_\infty, 1, \dots, 1)$  とする。ここで  $\pi_\infty$  は素元、 $\pi_\infty$  は  $i-1$  個、 $1$  は  $d-i+1$  個あるとする。

5.6.4.  $\Lambda \subset V$  を  $A$  格子とし,  $b \in (V/\Lambda) \setminus \{0\}$  をとる.  $b$  の持ち上げ  $b' \in V$  をとる.  $V = F^{\oplus d} \hookrightarrow F^{\oplus d} \otimes_F A^\infty = A^{\infty \oplus d}$  により  $b'$  を  $A^{\infty \oplus d}$  の元とみなす.  $\text{char}_{b,\Lambda} \in S(A^{\oplus d})$  を集合  $b' + \hat{\Lambda} \subset A^{\infty \oplus d}$  の特性関数とする.

$S'(A^{\infty \oplus d})$  の任意の元は上の  $\text{char}_{b,\Lambda}$  の形の関数の線型和で表されているので,

$$\rho' : S'(A^{\infty \oplus d}) \rightarrow A_R(\|\cdot\|^{-s})$$

(記号は第 6.1.1 節参照) という写像を  $\text{char}_{b,\Lambda}$  に  $\mathbb{E}_{b,\Lambda}$  を対応させることで定義することができる. 写像  $\rho : S'(A^{\infty \oplus d})^{\otimes d} \rightarrow A_R(\|\cdot\|^{-ds})$  を  $\rho(f_1 \otimes \cdots \otimes f_d) = \rho'(f_1) \cdots \rho'(f_d)$  とすることで定義する. これは  $\text{GL}_d(A^\infty)$  加群の射である.

5.6.5. 前節で定義された  $\rho'$  を用いることで保型関数の空間にオイラー系を構成することができる.

**命題 5.6.**  $0 \leq m \leq d$  をとる. ふたつのゼロでないイデアル  $I, J \subseteq A$  をパラメーターとする保型関数の族  $(\mathcal{E}_{I,m,J,h})_{I,J}$  はオイラー系をなす. つまり次が成立する.

4つのイデアル  $I' \subset I, J' \subset J$  をとる. さらに,  $\wp$  を  $I' + J'$  を割る素イデアルであって  $\text{Supp}(A/I') = \text{Supp}(A/I\wp)$  かつ  $\text{Supp}(A/J') = \text{Supp}(A/J\wp)$  となるものとする. 整数  $e_{\wp,m}$  を第 5.2.3 節で定義した通りとする. このとき次が成立.

$$\text{Trace}_{I,J}^{I',J'} \mathcal{E}_{I',m,J',h} = \sum_{r=0}^{e_{\wp,m}} (-1)^r q_{\wp}^{r(r-1)/2} T_{\wp,r}^* \mathcal{E}_{I,m,J,h}.$$

ここに  $\text{Trace}_{I,J}^{I',J'} : \mathcal{A}_R(I', m, J', \|\cdot\|_\infty^{-ds}) \rightarrow \mathcal{A}_R(I, m, J, \|\cdot\|_\infty^{-ds})$  はトレース写像である.

**証明.** 補題 5.2 からすぐに従う.  $\square$

## 6. ベイリンソンと加藤の計算の関数体類似に出てくる積分の計算

本節では第 3 節で述べたベイリンソンと加藤の用いた積分計算の関数体類似について述べる. 楕円曲線のモジュライ上の単数を二つかけあわせた (テンソル積) 元はシンボル写像によって  $K$  群の元とみなすことができた. そして, そのレギュレーター像は, クロネッカー極限公式を用いると, 重さ 2 のアイゼンシュタイン級数と実解析的アイゼンシュタイン級数の極限の積で表すことができる, というのがベイリンソンの計算である. その際の単数を具体的に与えて計算をしたのが加藤の結果である. このとき, レギュレーター像とヘッケ固有カスプ形式との内積はランキン・セルバーグの方法で計算することが可能で,  $L$  関数の特殊値と周期の積で表せるのであった.

これらの関数体類似を考えるにあたり, 第 3 節で挙げたジーゲル単数, 極限公式, レギュレーターなどの関数体類似が考えるのだが本稿では全く触れていない. 以下ではある積分を与えて, それが  $L$  関数と周期 (より小さい群の上の積分という意味で) を用いて表されることを示す. 積分は, 複素数についての極限をとると, (関数体における) ジーゲル単数から作る  $K$  群の元のレギュレーターによる像とヘッケ固有カスプ形式との内積, という解釈を持つのだが, そのようなことはレギュレーターなどの類似について触れていないため, 本稿では天下一に与えられたようにしか見えなくなってしまう.

階数が 2 のドリinfeldt 加群のモジュライは, 楕円曲線のモジュライと同様に曲線になっている. この場合にはランキン・セルバーグの方法を用いることが可能で, 積分の計算は同様の手法により可能である. 階数が 3 以上のドリinfeldt 加群のモジュライを考える際には, 一見どのように計算するべきかがわからなくなっている. ランキン・セルバーグの方法 (ランキン・セルバーグ積分) はより大きな群の場合に一般化されているが ([Bu, Sections 1,2] 参照), ここで考えている被積分関数に

対して有用であるかどうかはわからない。そこで、積分を計算するのにオイラー系の性質を用いる。それについて説明するのが本節の目的である。なお、このような手法は概均質ベクトル空間のゼータ関数を計算する際に filtering process と呼ばれて用いられていたようである ([Yu, p.15, §0.5] 参照)。

**6.1. 保型関数について。** 本節では関数体上に限って話をする。記号はドリinfeld 加群の定義のために用意したもの (第 4.1.1 節) を用いる。\$C\$ は有限体上の非特異射影曲線であり、\$F\$ はその関数体であった。保型関数の定義や \$L\$ 関数の定義をしておく。

**6.1.1. まず、保型関数を定義しよう。** \$R\$ を可換環とする。\$GL\_{d,F}\$ の保型関数とは、\$GL\_d(F) \backslash GL\_d(A)\$ 上の \$R\$ 値関数であって、ある開コンパクト部分群が存在して、その作用 (空間へ右移動) に関して不変であるものとする。代数体上では無限素点での条件をさらに課するのが通例である。無限素点をひとつ固定しているので、類似を考えているのであればそうすべきであるが、ここでは省略した。保型関数 \$f\$ に対し、\$GL\_d(A)\$ のあるコンパクト部分集合 \$\mathbb{K}\$ が存在して、\$f\$ の台が \$Z(A)\mathbb{K}\$ に含まれるとき、\$f\$ はコンパクト台をもつ保型関数であるという。ここで \$Z\$ は中心を表す。\$f\$ がコンパクト台をもつことと、カスプ形式であることは同値である。\$R\$ 値の \$Z(F\_\infty)\$ の指標 \$\chi\_\infty\$ に対し、\$A\_R(\chi\_\infty)\$ (あるいは \$A\_R^0(\chi\_\infty)\$) でそれぞれ \$Z(F\_\infty)\$ が \$\chi\_\infty\$ を通じて作用する \$R\$ 値保型関数 (あるいはコンパクト台をもつ保型関数) のなす \$R\$ 代数を表す。\$0 \leq m \leq d\$ を整数とする。\$A\_R(I, m, J, \chi\_\infty)\$ (あるいは \$A\_R^0(I, m, J, \chi\_\infty)\$) で \$\mathbb{K}\_{I,m,J}^\infty\$ 不変な \$\chi\_\infty\$ を通じて \$Z(F\_\infty)\$ が作用する \$R\$ 値保型関数 (あるいはコンパクト台をもつ保型関数) を表すことにする。\$\chi\_\infty\$ が自明な場合には \$A\_R(I, m, J)\$ と略す。

**6.1.2. 素点 \$\rho\$ に対し、\$dg\_\rho\$ で \$GL\_d(F\_\rho)\$ のハール測度を表す。\$dg := \prod\_\rho dg\_\rho\$ が \$GL\_d(A)\$ のハール測度であって、\$\text{vol}(GL\_d(\prod\_{\rho \in C} (\mathcal{O}\_{C,\rho}))) = 1\$ となるように \$dg\_\rho\$ を選んでおく。**

\$R = \mathbb{C}((q^{-s}))\$ とおく。ふたつのゼロでない \$A\$ のイデアル \$I, J\$ に対し、\$\mathbb{C}\$ 双線形写像 \$\langle, \rangle : A\_C^0(I, m, J) \times A\_R(I, m, J, ||\_\infty^{-ds})\$ を

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{Z(F_\infty)GL_d(F) \backslash GL_d(A)} f_1(g)f_2(g)|\det g|^s dg$$

と定義する。ここで \$||\$ はイデールノルムを表す。

**6.1.3. \$f \in A\_C^0(I, m, J)\$ を保型関数とする。\$\rho\$ を \$I+J\$ と素な素イデアルとし、\$e\_{\rho,m}\$ を第 5.2.1 節で定義した整数とする。\$f\$ は全ての \$0 \leq r \leq e\_{\rho,m}\$ に対し、\$T\_{\rho,r}\$ の固有関数であると仮定しよう。\$a\_{\rho,r}\$ を作用素 \$T\_{\rho,r}\$ に関する \$f\$ の固有値とする。このとき \$f\$ の \$L\$ 関数 \$L^{I,m,J}(f, s)\$ を**

$$L^{I,m,J}(f, s) = \prod_{\rho \nmid I+J} \left[ \sum_{r=0}^{e_{\rho,m}} (-1)^r a_{\rho,r} q_\rho^{\frac{r(r-1)}{2} - r(s + \frac{d-1}{2})} \right]^{-1}$$

と定義する。無限積は \$(q^{-s})\$ 進位相に関して収束し、\$\mathbb{C}((q^{-s}))\$ の元を定める。

さて、\$GL\_d\$ の保型関数の \$L\$ 関数の定義はそもそもゴドマンとジャック ([GJ]) により与えられている。上のヘッケ作用素を用いた定義と元の定義が一致することは素点ごとに調べればよいのだが、\$e\_{\rho,d-1} = d\$ となる素点の話は例えば [Co] に書いてある。\$e\_{\rho,d-1} = d-1\$ となる素点でも一致することは [KoYa, Appendix B] にある。

**6.2. ゼータ積分。** ゼータ積分という単語はしばしば見かけるのだが、正確な意味 (定義があるのならば定義) を筆者は知らない。ここでは、ある積分が \$L\$ 関数と周期の積にかけているのでそう呼ぶことにした。

6.2.1.  $I, J$  をゼロでない  $A$  のイデアルとする.

定理 6.1.  $f$  を  $A_{\mathbb{C}}^0(I, m, J)$  の元とする.  $f$  は第 6.1.3 節の条件を満たすと仮定する. このとき, 任意の  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_d) \in \mathrm{GL}_d(F_{\infty}) \times \dots \times \mathrm{GL}_d(F_{\infty})$  に対し, 次が成立.

$$\langle f, \mathcal{E}_{I, m, J, \mathbf{h}} \rangle = L^{I, m, J}(f, s - \frac{d-1}{2}) \mathrm{vol}(\mathbb{K}_{I, m, J}^{\infty}) I_{\infty, \mathbf{h}}(f).$$

ここに  $I_{\infty, \mathbf{h}}(f)$  は次で定義される積分である.

$$I_{\infty, \mathbf{h}}(f) = \int_{Z(F_{\infty}) \backslash \mathrm{GL}_d(F_{\infty})} f(g_{\infty}, 1) \prod_{j=1}^d |1_j g_{\infty} h_j|_{\mathcal{O}_{V_{\infty}}}^{-s} |\det g_{\infty}|_{\infty}^s dg_{\infty}.$$

この積分の計算をベイリンソンの結果の関数体上の類似を行う際に (少なくとも筆者は) 必要とした. 詳しく述べるには準備が足りないが, 少し言葉を補っておこう. ベイリンソンの場合と同様, ドリinfeld 加群のモジュライの  $K$  群に元をこしらえる. そして, レギュレーター写像 (これもこしらえる) による像と, この被積分関数 (の線型和) が, クロネッカー極限公式によって  $s$  がゼロのところで関係している, というのがベイリンソン予想との関係の仕方である. 内積の結果が  $L$  関数ともうひとつの項  $I_{\infty, \mathbf{h}}$  の積になっているが, その項は無限素点での (局所的な) 積分になっており, これは「周期」と解釈するのがよいと考えている. 実際, この積分はビルディングの基本単位であるアパートメント上の積分とみなすことができる. アパートメントとはビルディングのある種の標準的な部分単体複体である. (名前から想像されるように, アパートメントの集まりがビルディングなのである. この話は  $\mathrm{PGL}_d(F_{\infty})$  のブリュア・ティッツビルディングのモジュラーシンボルの話をするとうわかりやすくなるのだが割愛.)  $d=2$  のときには上半平面との類似があるのだったが, その類似でいうと, (標準的な) アパートメントは,  $0$  から  $i\infty$  へのパスに対応している. 積分はそのとき,  $f$  のメルン変換である.

6.2.2. 定理 6.1 の証明. 第一段階: オイラー系の性質を使って. ゼロでない  $A$  のイデアル  $I'$  であって  $I' \subset I \cap J$  であるようなものに対し,  $\mathcal{A}_{R_d}(I, m, J, |\cdot|_{\infty}^{ds})$  の元

$$\mathcal{E}_{I, m, J, I', \mathbf{h}} = \mathrm{Trace}_{I, J}^{I', I'}(\mathcal{E}_{I', m, I', \mathbf{h}})$$

を考える. 命題 5.6 より

$$\mathcal{E}_{I, m, J, I', \mathbf{h}} = \prod_{\mathfrak{p} | I', \mathfrak{p} \nmid I+J} \left( \sum_{r=0}^{e_{\mathfrak{p}, m}} (-1)^r q_{\mathfrak{p}}^{r(r-1)/2} T_{\mathfrak{p}, r}^* \right) \mathcal{E}_{I, m, J, \mathbf{h}},$$

が成立する. ただし  $J' = I'$ . したがって

$$\langle f, \mathcal{E}_{I, m, J, I', \mathbf{h}} \rangle = \left\langle \prod_{\mathfrak{p} | I', \mathfrak{p} \nmid I+J} \left( \sum_{r=0}^{e_{\mathfrak{p}, m}} (-1)^r q_{\mathfrak{p}}^{\frac{r(r-1)}{2} - rs} T_{\mathfrak{p}, r} \right) f, \mathcal{E}_{I, m, J, \mathbf{h}} \right\rangle$$

すなわち

$$\langle f, \mathcal{E}_{I, m, J, \mathbf{h}} \rangle = \prod_{\mathfrak{p} | I', \mathfrak{p} \nmid I+J} \left[ \sum_{r=0}^{e_{\mathfrak{p}, m}} (-1)^r a_{\mathfrak{p}, r} q_{\mathfrak{p}}^{\frac{r(r-1)}{2} - rs} \right]^{-1} \langle f, \mathcal{E}_{I, m, J, I', \mathbf{h}} \rangle.$$

が成立する.

さて,  $\mathcal{E}_{I, m, J, I', \mathbf{h}}$  の  $I'$  についての極限は

$$\mathcal{E}_{I, m, J, \lim, \mathbf{h}}(g) = \sum_{X \in \mathrm{GL}_d(F), X g^{\infty} \in \mathbb{K}_{I, m, J}^{\infty}} \prod_{j=1}^d |1_j X g_{\infty} h_j|_{\mathcal{O}_{V_{\infty}}}^{-s}$$

となっている。したがって

$$\langle f, \mathcal{E}_{I,m,J,h} \rangle = L^{I,m,J}(f, s - \frac{d-1}{2}) \langle f, \mathcal{E}_{I,m,J,\text{lim},h} \rangle.$$

が成立。

この箇所の計算は何をやっているのか説明しよう。積分の計算をする際に、展開 (unfolding) の方法が有用な場合がある。展開の方法とは、例えば、積分領域が  $H \setminus G$  という形をしていて、被積分関数が  $\sum_H f(hg)$  という形をしていた場合、はじめの積分が  $f$  の  $G$  上の積分に直せる、というのが原理である。ランキン・セルバーグの方法もそのひとつで、被積分関数にアイゼンシュタイン級数があると、その和をほどく (unfold) ことで積分領域や被積分関数が簡単になる、というものである。

今扱っている場合には、被積分関数としてアイゼンシュタイン級数の積が表れている。積分領域を増やしていき、和を減らしていくときに、上で述べた原理の場合にはそれらがちょうど見合っていたのだが、ここではオイラー系の性質があるため、 $L$  因子がおつりとして出てくるのである。これを各素点で行うことで、 $L$  因子の無限積として  $L$  関数が現れるという仕組みである。

以下ではもう一段階展開 (unfold) を行う。  $L$  関数でないほうの因子を簡略化する手続きである。

**6.2.3. 定理 6.1 の証明. 第二段階：展開の方法を使って。定理の証明のためには次の命題を示せばよい。**

**命題 6.2.** 記号を上の通りとする。このとき

$$\langle f, \mathcal{E}_{I,m,J,\text{lim},h} \rangle = \text{vol}(\mathbb{K}_{I,m,J}^\infty) I_{\infty,h}(f).$$

が成立する。

**証明.** 二つのゼロでない  $A$  のイデアル  $I, J$  に対し、 $\text{GL}_d(A)$  上の関数  $\tilde{\phi}_{I,m,J,h}$  を次のように定義する。  $g = (g_\infty, g^\infty) \in \text{GL}_d(A)$  に対し、

$$\tilde{\phi}_{I,m,J,h}(g) = \tilde{\phi}_{I,m,J}^\infty(g^\infty) \tilde{\phi}_{\infty,h}(g_\infty),$$

と定める。ここに  $\tilde{\phi}_{\infty,h}(g_\infty) = \prod_{j=1}^d |1_j g_\infty h_j|_{\mathcal{O}_{V_\infty}}^{-s}$ 、であり、 $\tilde{\phi}_{I,J}^\infty$  は集合  $\mathbb{K}_{I,J}^\infty$  の特性関数である。これを使うと

$$\mathcal{E}_{I,m,J,\text{lim},h} = \sum_{\gamma' \in \text{GL}_d(F)} \tilde{\phi}_{I,m,J,h}(\gamma' g).$$

と変形できるので、 $\langle f, \mathcal{E}_{I,m,J,\text{lim},h} \rangle$  は次と等しい。

$$\begin{aligned} & \int_{Z(F_\infty) \text{GL}_d(F) \backslash \text{GL}_d(A)} f(g) \sum_{\gamma' \in \text{GL}_d(F)} \tilde{\phi}_{I,m,J,h,\gamma}(\gamma' g) |\det g|^s dg \\ &= \int_{Z(F_\infty) \backslash \text{GL}_d(A)} f(g) \tilde{\phi}_{I,m,J,h}(g) |\det g|^s dg \\ &= \text{vol}(\mathbb{K}_{I,m,J}^\infty) \int_{Z(F_\infty) \backslash \text{GL}_d(F_\infty)} f(g_\infty, 1) \tilde{\phi}_{\infty,h}(g_\infty) |\det g_\infty|_\infty^s dg_\infty \\ &= \text{vol}(\mathbb{K}_{I,m,J}^\infty) I_{\infty,h}(f). \end{aligned}$$

□

## 参考文献

- [AZ] Andrianov, A.N.; Zhuravlev, V.G., *Modular forms and Hecke operators*. Transl. from the Russian by Neal Koblitz. (English) Translations of Mathematical Monographs. 145. Providence, RI: AMS, American Math. Society. vii, 334 p. (1995).
- [Be1] Beilinson, A. A., Higher regulators of modular curves. (English) Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Proc. AMS-IMS-SIAM Joint Summer Res. Conf., Boulder/Colo. 1983, Part I, Contemp. Math. 55, 1–34 (1986).
- [Be2] Beilinson, A. A., Notes on absolute Hodge cohomology. (English) Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Proc. AMS-IMS-SIAM Joint Summer Res. Conf., Boulder/Colo. 1983, Part I, Contemp. Math. 55, 35–68 (1986).
- [Be3] Beilinson, A. A., Higher regulators and values of  $L$ -functions. J. Sov. Math. 30, 2036–2071 (1985); translation from Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Probl. Mat. 24, 181–238 (1984)
- [Bl] Bloch, S., Algebraic cycles and higher  $K$ -theory. Adv. Math. 61, no. 3, (1986) 267–304.
- [Bo1] Borel, A., *Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup*, Invent. Math. 35, 233–259 (1976)
- [Bo2] Borel, A., Cohomologie de  $SL_n$  et valeurs de fonctions zeta aux points entiers. (French) Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser. 4, 613–636 (1977)
- [Bu] Bump, D., *The Rankin-Selberg method: A survey*. (English) Number theory, trace formulas and discrete groups, Symp. in Honor of Atle Selberg, Oslo/Norway 1987, 49–109 (1989).
- [Bur] Burgos Gil, J. I., The regulators of Beilinson and Borel. (English) CRM Monograph Series. 15. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). (2002).
- [Co] Cogdell, J.W., Lectures on  $L$ -functions, converse theorems, and functoriality for  $GL_n$ . Lectures on automorphic  $L$ -functions, 1–96, Fields Inst. Monogr., 20, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2004)
- [De-Hu] Deligne, P.; Husemoller, D. H., Survey of Drinfel'd modules. (English) Current trends in arithmetical algebraic geometry, Proc. Summer Res. Conf., Arcata/Calif. 1985, Contemp. Math. 67, 25–91 (1987).
- [De-Wi] Deninger, C.; Wingberg, K., On the Beilinson conjectures for elliptic curves with complex multiplication. (English) Beilinson's conjectures on special values of  $L$ -functions, Meet. Oberwolfach/FRG 1986, Perspect. Math. 4, 249–272 (1988)
- [Dr1] Drinfeld, V. G., *Elliptic modules*, Math. USSR, Sb. 23, 561–592 (1974); translation from Mat. Sb., n. Ser. 94(136), 594–627 (1974)
- [Dr2] Drinfeld, V.G., Elliptic modules. II. (English) Math. USSR, Sb. 31, 159–170 (1977)
- [FG] Friedlander, E. M. (ed.); Grayson, D. R., *Handbook of  $K$ -theory*. Volumes 1,2. (English) Berlin: Springer.
- [Ge] Gekeler, E.-U., *Drinfeld modular curves*. (English) Lecture Notes in Mathematics, 1231. Berlin etc.: Springer-Verlag. (1986).
- [GJ] Godement, R.; Jacquet, H., *Zeta functions of simple algebras*. (English) Lecture Notes in Mathematics. 260. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag (1972)
- [Go] Goss, D., *Basic structures of function field arithmetic* 2nd correct. printing. (English) Berlin: Springer. (1998)
- [Gri] Grigorov, G. T., *Kato's Euler Systems and the Main Conjecture*, Thesis, Harvard University (2005)
- [Ka] Kato, K.,  *$p$ -adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms*, (English) Berthelot, Pierre (ed.) et al.,  $p$ -adic cohomology and arithmetic applications (III). Paris: Société Mathématique de France. Astérisque 295, 117–290 (2004).
- [Ka-Ch] Kac, V.; Cheung, P., *Quantum calculus*, Universitext, New York, NY: Springer (2002)
- [KoYa] Kondo, S.; Yasuda, S, Euler Systems On Drinfeld Modular Varieties and Zeta values, RIMS-1499, preprint (2005)
- [La1] Laumon, G., *Cohomology of Drinfeld modular varieties. Part I*, Camb. Stud. Adv. Math. 41, Cambridge: Cambridge University Press. (1996)

- [La2] Laumon, G., *Cohomology of Drinfeld modular varieties. Part II: Automorphic forms, trace formulas and Langlands correspondence*. With an appendix by Jean-Loup Waldspurger. (English) Cambridge Studies in Advanced Mathematics. 56. Cambridge: Cambridge University Press. (1997)
- [Le] Levine, M., *Mixed Motives*. Math. Surv. Monogr. 57 American Mathematical Society, Providence, RI (1998)
- [MV] Morel, F.; Voevodsky, V.,  $A^1$ -homotopy theory of schemes. (English) Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. 90, 45-143 (1999).
- [Ne] Nekovář, J., Beilinson's conjectures. (English) Jannsen, Uwe (ed.) et al., *Motives. Proceedings of the summer research conference on motives, held at the University of Washington, Seattle, WA, USA, July 20-August 2, 1991*. Providence, RI: American Mathematical Society. Proc. Symp. Pure Math. 55, Pt. 1, 537-570 (1994).
- [Qu] D. Quillen, *Higher algebraic K-theory. I*, Algebr. K-Theory I, Proc. Conf. Battelle Inst. 1972, Lect. Notes Math. 341, 85-147 (1973)
- [RSS] Rapoport, M. (ed.); Schappacher, N. (ed.); Schneider, P. (ed.), *Beilinson's conjectures on special values of L-functions (Based on the meeting of the Arbeitsgemeinschaft Geyer-Harder held in Oberwolfach, FRG in April 1986)*. (English) Perspectives in Mathematics, 4. Boston, MA etc.: Academic Press, Inc. (1988)
- [Ri] Riou, J., Operations on algebraic K-theory and regulators via the  $A^1$ -homotopy theory. (Operations sur la k-théorie algébrique et régulateurs via la théorie homotopique des schémas.) (French. English summary) C. R., Math., Acad. Sci. Paris 344, No. 1, 27-32 (2007)
- [Ru1] Rubin, K., Euler systems. (Hermann Weyl lectures). (English) Annals of Mathematics Studies. 147. Princeton, NJ: Princeton University Press. xi, 227 p.
- [Ru2] Rubin, K., Euler systems and modular elliptic curves. (English) Scholl, A. J. (ed.) et al., *Galois representations in arithmetic algebraic geometry. Proceedings of the symposium, Durham, UK, July 9-18, 1996*. Cambridge: Cambridge University Press. Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. 254, 351-367 (1998).
- [Sc] Scholl, A. J., An introduction to Kato's Euler systems. (English) Scholl, A. J. (ed.) et al., *Galois representations in arithmetic algebraic geometry. Proceedings of the symposium, Durham, UK, July 9-18, 1996*. Cambridge: Cambridge University Press. Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. 254, 379-460 (1998).
- [Sch] Schneider, P., Introduction to the Beilinson conjectures. (English) Beilinson's conjectures on special values of L-functions, Meet. Oberwolfach/FRG 1986, Perspect. Math. 4, 1-35 (1988).
- [Se] Seiler, W.K.,  $\lambda$ -rings and Adams operations in algebraic K-theory. (English) Beilinson's conjectures on special values of L-functions, Meet. Oberwolfach/FRG 1986, Perspect. Math. 4, 93-102 (1988).
- [Ser] Serre, J.-P., Arbres, amalgames,  $SL_2$  Astérisque 46 (1977)
- [Sh] Shimura, G., The special values of the zeta functions associated with cusp forms. (English) Commun. Pure Appl. Math. 29, 783-804 (1976).
- [So] Soulé, C., *Regulators. (Regulateurs.)* (French) Semin. Bourbaki, 37e annee, Vol. 1984/85, Exp. 644, Astérisque 133/134, 237-253 (1986)
- [Sr] Srinivas, V., *Algebraic K-theory* 2nd ed. (English) Progress in Mathematics (Boston, Mass.). 90. Boston, MA: Birkhauser. xvi, 341 p. (1996).
- [Th-Tr] Thomason, R.W.; Trobaugh, T., Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories. The Grothendieck Festschrift, Collect. Artic. in Honor of the 60th Birthday of A. Grothendieck. Vol. III, Prog. Math. 88, 247-435. (1990)
- [Vo-Su-Fr] Voevodsky, V., ; Suslin, A.; Friedlander, E. M., *Cycles, transfers, and motivic homology theories* Ann. Math. Stud. 143 Princeton University Press, Princeton, NJ, (2000)
- [Wa] Waldhausen, F., Algebraic K-theory of spaces. (English) Algebraic and geometric topology, Proc. Conf., New Brunswick/USA 1983, Lect. Notes Math. 1126, 318-419 (1985).
- [We] Weibel, C., *Algebraic K-Theory*, book, available at Weibel's webpage at Rutgers University
- [Weil] Weil, A., *Basic number theory*. Reprint of the 2nd ed. 1973. (English) Classics in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag. xviii, 312

- [Yu] Yukie, A., *Shintani zeta functions*. (English) London Mathematical Society Lecture Note Series. 183. Cambridge: Cambridge University Press. xii, 339 p.
- [齋藤] 齋藤 秀司, ゼータ関数の特殊値とベイリンソン予想, 数学のたのしみ no.17, 日本評論社 (2000)

近藤 智  
東京大学 数物連携宇宙研究機構  
〒277-8582 千葉県柏市柏の葉 5-1-5

Satoshi KONDO  
Institute for the physics and the mathematics of the universe,  
University of Tokyo,  
5-1-5 Kashiwa-no-Ha, Kashiwa City, Chiba 277-8582, Japan

email: [satoshi.kondo@ipmu.jp](mailto:satoshi.kondo@ipmu.jp)