

# Hamiltonian system と closed geodesic.

鈴鹿工事 横正定晴

0. はじめに

Klingenberg [1] は双曲型でない 閉測地線があれば 計量を少し動かすことによって Birkhoff-Lewis の不動点定理が適用できることを示し、この定理により、双曲型でない閉測地線のまわりに無限個の閉測地線が存在することを証明した。ここでは 非双曲型閉測地線の Morse index が不安定であることと Morse theory と通し閉測地線は topology と結びついている。このことによる安定性から  $\gamma$  のまわりにたくさんの閉測地線を作ることができることを示す。

1.

$M$  を  $C^\infty$ -級 compact 多様体  $g_f(M)$  で  $M$  上の リーマン計量全体に  $C^r$ -topology を入れたものとする。以下  $r \geq 2$  である。 $\gamma(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) で  $M$  上の閉測地線を表わし  $X(t), Y(t), Z(t)$  を  $\gamma$  にそうベクトル場, 特に  $Y(t), Z(t)$  は

$(Y(0), Y'(0)) = (Y(1), Y'(1)), (Z(0), Z'(0)) = (Z(1), Z'(1))$  を満しているものとする。  $\langle, \rangle_g$  で計量  $g$  による内積,  $|\cdot|$  でノルムを表わす。又  $\gamma$  にそうベクトル場  $X, Y$  の内積を  $\ll X, Y \gg_g = \int_0^1 \langle X(t), Y(t) \rangle dt$  ノルムを  $\|, \|$  で表わす。 $R_g(\cdot, \cdot)$  で曲率を表わす。線形作用素  $A$  を次の様に定義する。

$$A: X \longrightarrow X'' - R(X, \dot{\gamma}) \dot{\gamma}$$

$AX = 0$  なる  $\gamma$  にそうベクトル場  $X$  を *jacobi 場* という。 $\gamma$  にそう *jacobi 場* 全体を考える。

$$P: (X(0), X'(0)) \longrightarrow (X(1), X'(1))$$

は線形写像になる。 $P$  が 固有値 1 をもつとき 閉測地線  $\gamma$  を退化閉測地線といい。 $P$  が 絶対値 1 の固有値をもつとき 非双曲型閉測地線という。測地線  $\gamma$  での Hessian  $H_g$  を次のように定義する。

$$\begin{aligned} H_g(X, Y) &= \int_0^1 \langle X(t), Y'(t) \rangle - \langle R_g(X, \dot{\gamma}) \dot{\gamma}, Y \rangle_g dt \\ &= \sum \langle X(t), Y(t) \rangle \Big|_{t^-}^{t^+} - \int_0^1 \langle AX, Y \rangle_g dt \end{aligned}$$

$\gamma$  の *index* を次のように定義する。

$$\text{index}(\gamma, g) = H_g \text{ の 負の 固有値の 数}$$

閉測地線  $\gamma$  の *index* が安定であるとは  $\gamma$  上で計量  $g$  の 1-jet と変えずに少し計量  $g$  を変化させても すべての自然数  $n$  に対して  $\gamma^n$  上の *index* が 不変な ことである。

補題 1.  $\gamma$  を  $(M, g)$  上の閉測地線とする。任意の  $\delta > 0$  に対して 次の条件を満足する計量  $g'$  が存在する。

1)  $g - g'$  の 1-jet は  $\gamma$  上で 0

2)  $e$  を  $\gamma$  と直交する単位ベクトルとする このとき

$$\langle R_g(e, \dot{\gamma})\dot{\gamma} - R_{g'}(e, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, e \rangle > \delta$$

$$(2) \quad \langle R_g(e, \dot{\gamma})\dot{\gamma} - R_{g'}(e, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, e \rangle < -\delta$$

証明

Fermi座標を用いれば

$$\langle R_g \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_0} \right) \frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x_i \partial x_j}$$

$(a_{ij})$  を正値 2 次形式で 単位ベクトル  $e$  に対して

$e(a_{ij})^t e > \delta$  とする。  $g_{00} = \frac{1}{2} \sum a_{ij} x_i x_j$  とし  $g' = g - g_{00}$

とおけば 1), 2) を満足する。

補題 2. Hessian  $H_g$  の固有値は下に有界である。

証明

$$S = \sup_{|e|=1} |\langle R_g(e, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, e \rangle| \quad \text{とおく。}$$

$$H_g(X, X) = \int_0^1 \langle X', X' \rangle_g - \langle R_g(X, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, X \rangle_g dt$$

$$\geq - \int_0^1 \langle R_g(X, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, X \rangle_g dt$$

$$\geq -S \int_0^1 \langle X, X \rangle_g dt$$

これより  $H_g$  の固有値は  $-S$  より大きい。

補題 3.  $Z(t)$  を  $(Z(0), Z'(0)) = (Z(1), Z'(1))$  なる  $H_g$  の負の固有値に属する固有ベクトルとする。 このとき

$||Z(t_0)||^2 - ||Z(0)||^2 < \sqrt{2S} ||Z||^2$  が成り立つ。

証明

$$\begin{aligned} ||Z'||^2 &= Hg(Z, Z) + \int_0^1 \langle R(Z, \dot{\gamma}) \dot{\gamma}, Z \rangle_{\dot{\gamma}} dt \\ &\leq 2S ||Z||^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||Z(t_0)||^2 - ||Z(0)||^2 &= \left| \int_0^{t_0} \frac{d}{dt} \langle Z, Z \rangle_{\dot{\gamma}} dt \right| \\ &= \left| 2 \int_0^{t_0} \langle Z', Z \rangle_{\dot{\gamma}} dt \right| \\ &\leq 2 ||Z|| ||Z'|| \leq 2\sqrt{2S} ||Z||^2 \end{aligned}$$

ここで  $||Z||=1$  の場合  $|Z(t)| \leq \sqrt{2S} + 1$  となることに注意。

命題 4  $\gamma$  を双曲型でない測地線としよう。

このときの  $\gamma$  の index は不安定である。

証明

$\tilde{X}$  を  $(\tilde{X}(1), \tilde{X}'(1)) = \rho(X(0), X'(0))$  ( $|\rho|=1$ ) となる複素 jacobi 場とする。このとき任意の  $\varepsilon > 0$  に対して次を満足する自然数  $n$  と ベクトル場  $Y$  がある。

$$1) |X^n_{(0)} - X^n_{(1)}| < \varepsilon ||X^n||$$

$$\text{ここで } X = \operatorname{Re} \tilde{X} \quad X^n_{(t)} = X(nt)$$

$$2) ||Y||=1 \quad (Y(0), Y'(0)) = (Y(1), Y'(1))$$

$$||Y - X^n / ||X^n|| || < \varepsilon, \quad ||Y' - X^n' / ||X^n|| || < \varepsilon$$

ここで任意に与えられた数  $a > 0$  より絶対値の小さな固有値が  $\gamma^n$  上にあるは 補題 1. によって証明は終る。

ここで  $\gamma^n$  上の Hessian の負の固有値が  $-a$  以下であったと

する。負の固有値を  $\{\lambda_i\}$  とし 固有ベクトルを  $\{Z_i\}$  とする。  
 $(\|Z_i\|=1, (Z_i(0), Z_i'(0)) = (Z_i(1), Z_i'(1))) \quad Z = C_i Z_i$  とする。

$$\begin{aligned} |\langle Y, Z \rangle| &= |\langle X_1, Z \rangle| + \varepsilon & X_1 &= \frac{X_1}{\|X_1\|} \\ &= |\langle X, \frac{C_i}{\lambda_i} A Z_i \rangle| + \varepsilon \\ &= |H(X, \frac{C_i}{\lambda_i} Z_i)| + \varepsilon \\ &= |\langle X_1'(1) - X_1'(0), \frac{C_i}{\lambda_i} Z_i(0) \rangle| + \varepsilon \\ &\leq \|X_1'(1) - X_1'(0)\| \frac{C_i}{\lambda_i} |Z_i(0)| + \varepsilon \\ &\leq \frac{2\sqrt{2S+1}}{a} \varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

ここで  $\varepsilon$  が 十分小さいとして  $Y_1 = (Y - \langle Y, Z_i \rangle Z_i) / \|Y - \langle Y, Z_i \rangle Z_i\|$   
 とおく このとき  $H_g(Y, Y_1)$  は上から  $a$  に関係する定数と  $\varepsilon$   
 との積でおさえられる。よって  $\varepsilon$  を十分小さくすれば 絶対  
 値  $a$  以下の固有値が存在する。

以下は閉測地線が Morse 理論を通して topology と結  
 ばれている。これはある安定性があることを示している。

以後の命題はこの安定性による。

任意の値  $\varepsilon$  に対し 長さ  $\varepsilon$  以下の閉測地線は 有限個し  
 かないものとする。

命題 6.  $\gamma$  を  $(M, g)$  上の閉測地線とする。  $g$  の十分  
 小さな近傍  $U_g \subset \mathcal{G}^r(M)$  があって  $(M, g')$  上には  $\gamma$  の近く  
 に 必ず閉測地線  $\gamma'$  がある。このことは  $\gamma$  の近くの閉測  
 地線を消すことなく 計量  $g$  の近くの計量に変わることが

できるとを示している。

補題 7  $\gamma$  を  $(M, g)$  上の閉測地線とし その *index* が不安定であるとする。このとき  $\mathcal{Q}^2(M)$  で計量を少し動かすことにより 閉測地線をたくさん作ることができる。

証明

$U_j \subset \mathcal{Q}^2(M)$  を  $g$  の任意の近傍とする。  $g' \in U_j$  で  $g - g'$  の 1-jet が 0 となるもので

$$\text{index}(\gamma^n, g) \neq \text{index}(\gamma^n, g')$$

となるものがある。このとき  $\text{index}(\gamma^n, g)$  を補うために閉測地線  $\gamma'$  が  $\gamma$  の近くに生成される。さらに 命題 6 によって  $\gamma$  のまわりで計量  $g'$  を  $g$  に  $\gamma$  を消すことなしにもとせる。以下同様である。

定理 8.  $(M, g)$  を  $C^\infty$ -級 Compact リーマン多様体  $M$  をその双曲型でない閉測地線とする。このとき曲率を少し動かすことにより 長さの有界な閉測地線を 任意有限個作ることができる。

証明

命題 4 と 補題 6 による。

参考文献

- [1] Klingenberg, W. Closed geodesics on riemannian Manifolds, Proc 13. Sem. Can Math. Congress. (1972) 67-92.