

河道の変動に関する研究(2)

——安定流路の形状と形成過程——

芦田 和男・村本 嘉雄・奈良井修二

STUDIES ON FLUVIAL PROCESS OF STREAM CHANNELS (2)

——Self-formed Stable Channel Profile and Process——

By Kazuo ASHIDA, Yoshio MURAMOTO and Shūji NARAI

Synopsis

As described in the previous paper,¹⁾ a stable or a zero-bed load state is established in the upstream reach of an alluvial channel under conditions of the absence of sediment feeding and a given discharge. This paper deals with the stable channel profile and process on the basis of several results obtained from experiments conducted in a large alluvial channel and theoretical consideration based on the fluvial hydraulics.

As a degradation of a channel bed and a flow stage in the upstream reach, the channel shape is stabilized from the upper part of the side wall to the central part of the bed in a cross section, and different self-armoring states by the coarser sediment are observed along the flow perimeter. The stable cross sectional shape observed at the final stage is appreciably flatter than Lane's expression for a stable channel in the threshold condition, and relations of a cross sectional area and bed slope to channel width according to Lane differ from those observed here and by other investigators in alluvial channels with uniform sands. From this fact, it may be concluded that the self-formed stable channel profiles are affected by the channel process with bank erosion and a stabilized condition.

In connection with the channel process, one-dimensional analysis based on the fluvial hydraulic model was developed for longitudinally uniform and nonuniform channel processes and compared with several experimental results. In addition to usual fundamental equations of fluvial hydraulics, an expression of sediment supply due to bank erosion were assumed on the basis of the phenomenological consideration and experimental results in several kinds of laboratory flumes. The analytical results are in good agreement with the observed ones at the initial stage of channel process.

Further study on the effects of sediment mixture and stream meandering on the channel process will be needed in order to predict the criteria of stable profile in the upstream and the prominent bank erosion in the downstream reach.

1. 緒 言

沖積河道の変遷あるいは洪水時における流路の変動過程とその機構を明らかにすることを目的として昨年度より大型水路を用いた実験を行っており、前報¹⁾ではその概要と流路における水理諸量の変化および河床形態と流路形状との対応について若干の実験結果を述べた。

本論文では、水路の上流部に形成される静的な安定流路に注目してその形状と形成過程について検討する。ここでいう静的な安定状態は砂礫の移動が停止する状態を意味し、土砂水理学で定義されている静的平衡状態すなわち砂礫の移動開始状態との相異はいまのところ明確でないが、本文では前者を現象的な意味で用いる。また、安定、平衡に類似した言葉として定常 (steady あるいは stationary)、平滑 (graded)、レジーム (regime) などがあって、さらに平衡については動的と静的の区別あるいは過渡状態としての準平衡という概

念も用いられている。しかし、これらの定義の多くは記述的段階にとどまっており、流路形状は単に水理諸量との相関から経験的に定められているのでそれぞれの概念の相異も明らかでない。流路形状に関する一般的な取り扱いとしては、周知のように限界掃流力あるいは流砂量式にもとづく土砂水理学的方法とランダム・ウォークモデルあるいは最小分散の原理など確率、統計論を加味した方法とがある。流路の変動現象はもちろん決定論的な手法だけで完全に表わすことはできなく、確率的な手法の導入が必要と考えられる。しかし、流路の変動過程の予測に対して、現状では土砂水理学的方法がより有効であって、本文でも流路の安定形状に対して従来の静的平衡状態の関係式と比較し、その適合性を検討する。また、安定流路の形成過程に関しては、慣用の河床変動の基礎式に側岸の侵食条件を導入して流下方向に拡幅量が一樣な場合と変化する場合について一次元的な解析を行ない、実験値と比較することによって解析上の問題点を明らかにする。

2. 安定流路の形成過程に関する実験的検討

流路変動の実験において給砂しない場合には上流から拡幅が停止し、河床高は低下して流路は静的な安定状態に達する。Table に示した実験条件の範囲では、流路の全長 110~130 m のうち上流端から 40~50 m の区間にわたってこうした安定流路が形成された。ここでは、詳細な測定を行なった Exp. VI の実験結果にもとづいて流路の縦断形状、平面形状、横断形状および粒度分布の時間的变化にみられる特徴を説明する。

Table Experimental conditions.

Exp. No.	Cross Section of Channel (Trapezoidal Shape)			Bed Slope	Discharge (l/sec)	Flow Duration (hr-min)
	Bottom Width (cm)	Side Slope	Depth (cm)			
I-1 I-2	100	1 : 1	20	1/200	7.5 15.0	100°00' 30°19'
II	100	1 : 1	20	1/200	15.0	28°41'
III	50	1 : 2	10	1/200	6.0	71°26'
IV	50	1 : 2	10	1/200	15.0	25°00'
V U.S. D.S.	50	1 : 2	10	1/200 1/500	6.0	55°30'
VI U.S. D.S.	50	1 : 2	10	1/200 1/500	15.0	37°30'

U.S.: Upstream Reach ($x=0\sim60$ m)

D.S.: Downstream Reach ($x=60\sim110$ m)

2.1 流路形状の変化

Fig. 1 および Fig. 2 はそれぞれ流路の平均河床高 $\bar{z}$ と水面幅 B_w の時間的变化を示したものである。初期流路は Fig. 1 に示すように一樣幅の台形断面で $x=60$ m を遷移点とする二段こう配に設定している。予想されるように初期の河床こう配は次第に均らされて一樣こう配に達し、その後上流、下流端の境界条件の影響が顕著に現われて、河床縦断は凸形状を呈する。最終時点では、 $x=0\sim50$ m の範囲が河床低下域になっている。一方、水面幅は通水初期では上流、下流側でそれぞれほぼ一定速度で拡がる。その後、上流部では河床低下に対応して拡幅が停止するので末拡ろがりの形状になり、さらに河床低下域では水面幅は次第に縮小する。また、 $x=50$ m より下流では流路の蛇曲が顕著になって波状の拡幅が進行する。

つぎに、上流部に注目して $x=4\sim52$ m の間 12 m 毎に流路の横断形状を測定した結果を Fig. 3 (a)~(e) に示す。

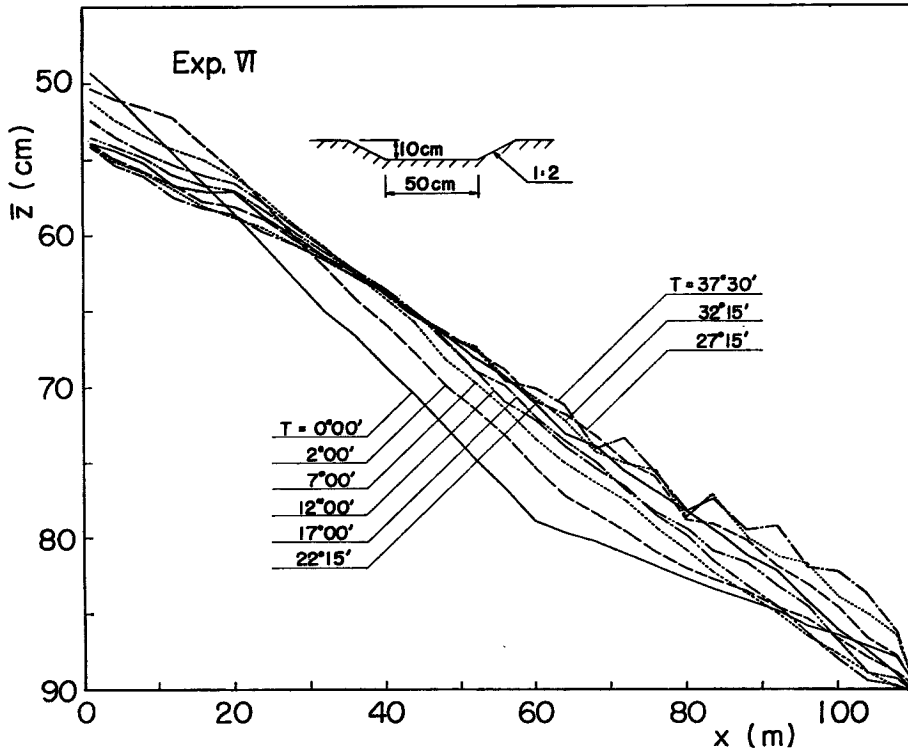


Fig. 1 Variation of mean bed profile with time.

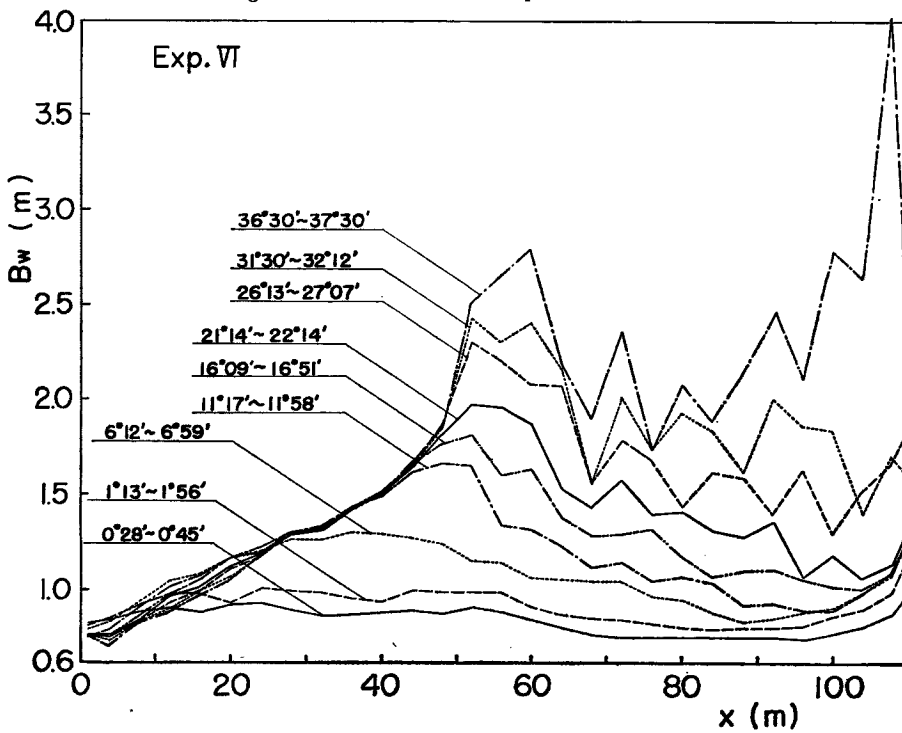


Fig. 2 Variation of water surface width along stream with time.

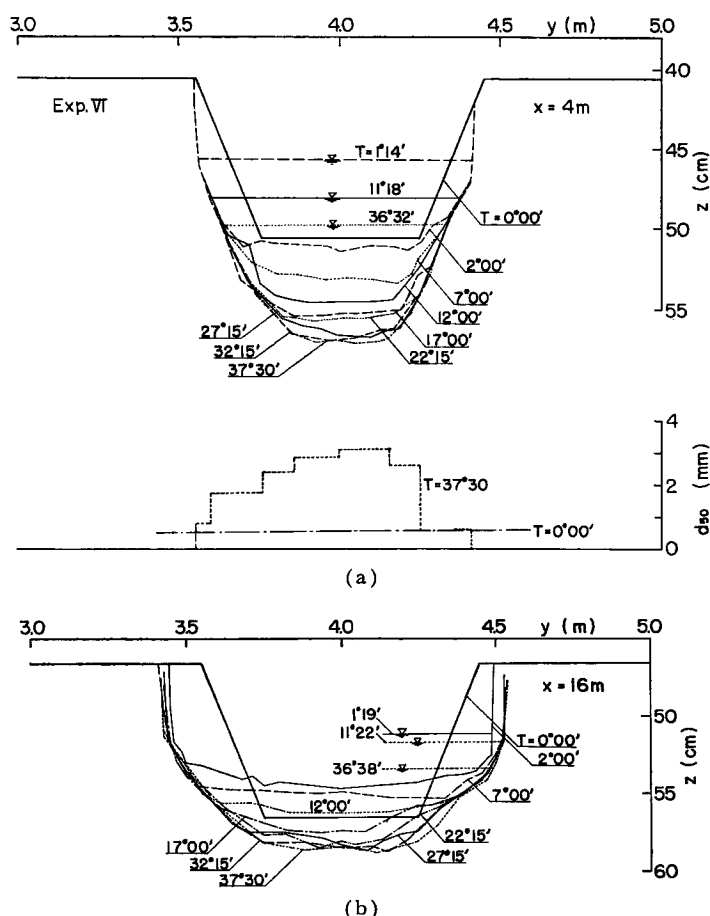


Fig. 3 Changes of cross-sectional shapes and median diameter of sediment in the upstream reach with time.

なお、 $x = 4\text{ m}$ と 28 m については初期（実験砂）と最終時点における河床砂の中央粒径 d_{50} の横断分布も示してある。 $x = 4 \sim 40\text{ m}$ の断面ではいずれも測定時点内で拡幅が停止しており、河床もほぼ静的な安定状態に近いが、 $x = 52\text{ m}$ では砂礫堆の存在によって流路が偏り、最終時点でも側岸侵食と河床変動が進行している。安定化する4断面のうち、 $x = 4\text{ m}$ の断面は初期流路より河床が低下して拡幅し、その後安定化する領域にあって、他の3断面は河床上昇と拡幅がある時間進んだ後に河床が低下して安定状態になる領域である。本実験の範囲では後者の領域が主で、そのうちでも初期河床より上昇した状態で静的安定になる領域が大部分を占めている。横断形状は側岸から順次安定化して水際の斜面は類似した形状を示すが、河床中央部の形状は各断面間で異なっている。すなわち、河床低下の顕著な $x = 4\text{ m}$ と 16 m の断面では水平な状態から放物線状になり、 $x = 28\text{ m}$ 以降の断面では河床上昇時に凸形状、低下時に中央部だけ凹形状になる。その結果、 $x = 28\text{ m}$ の断面で顕著に認められるように段丘を形成した状態で安定化する。こうした流れ段丘は他の実験ケースでも $x = 10 \sim 40\text{ m}$ の区間で観察されたが、これは主に側岸から供給される土砂の分級化に基因しており、混合砂を用いた場合には定常流であっても複断面状の流路を形成する可能性がある。

2.2 粒度分布の変化

本実験で用いた砂は粒度範囲が広いので¹⁾ Fig. 3 の d_{50} の横断分布にみるように流路中央部で粗粒化現

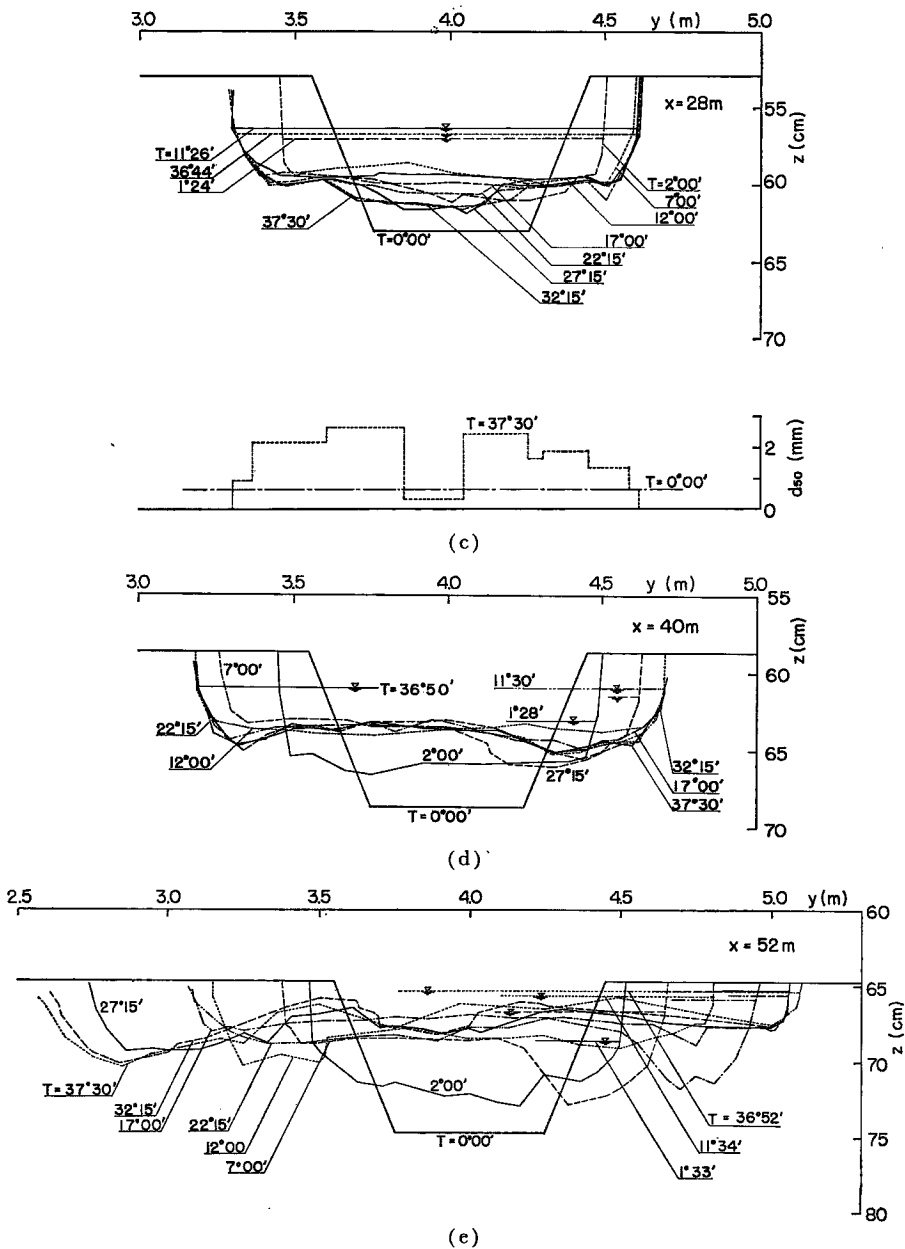


Fig. 3 Changes of cross-sectional shapes and median diameter of sediment in the upstream reach with time.

象が卓越する。例えば、 $x=4\text{m}$ の中央部の d_{50} は初期の d_{50} の約6倍、標準偏差は約1.5倍に増大している。 $x=28\text{m}$ の粒度分布は $x=4\text{m}$ の分布にいたる途中の状態に相当しており、その中央部に d_{50} と標準偏差がともに実験砂の約1/2程度の一様化した細砂帯が存在する。この細砂帯が次第に流出して、その後に上述の段丘が形成される。また、側岸近くの d_{50} は実験砂のそれとほぼ同じ値を示しているが、粒度構成は

後述するように互にかなり異なる。

Fig. 4 は $x=4\text{ m}$ と 28 m の断面における粒度分布 $F(d)$ の時間的変化, Fig. 5 は最終時点における両断面の横断方向各点の粒度分布を示したものである。なお, Fig. 4 で $x=4\text{ m}$ の $T=2^{\circ}00'$ の時点では細砂帯とそれ以外の部分が明瞭に区別されたので2箇所に分けて採砂した結果が示してある。流路の粒度構成は

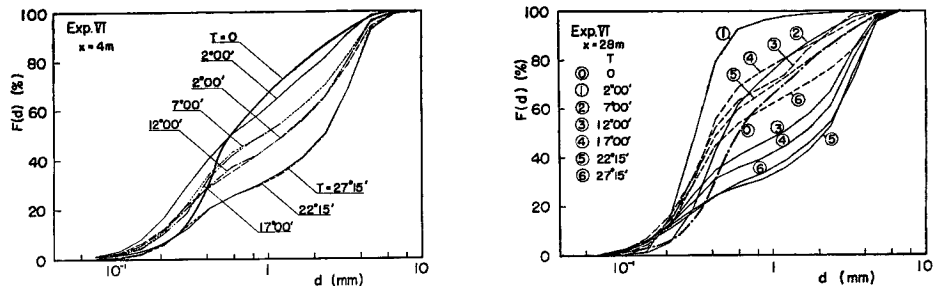


Fig. 4 Changes in gradation curves of channel sediment at $x=4\text{ m}$ and 28 m with time.

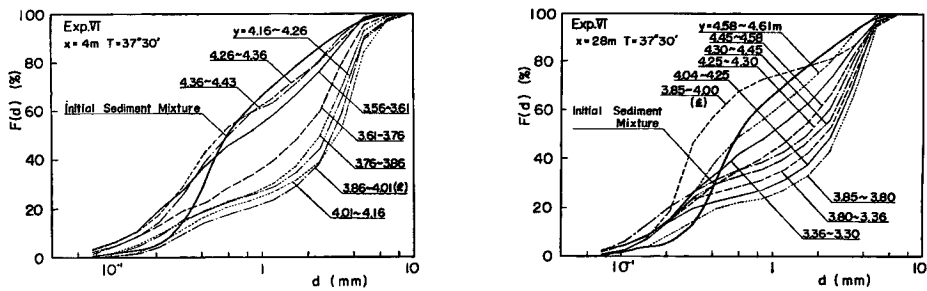
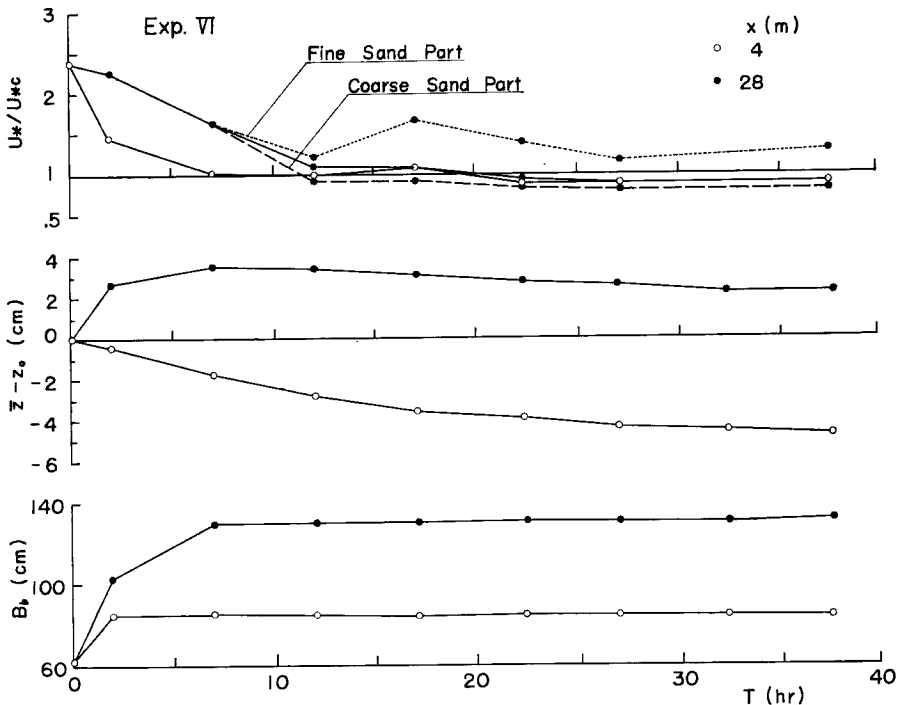


Fig. 5 Gradation curves of channel sediment at different lateral parts in $x=4\text{ m}$ and 28 m at the final stage.

通水初期において細粒化かつ一様化したのち粗粒化過程をたどる。しかし、長時間通水後においても $d \leq 0.2 \sim 0.3\text{ mm}$ の範囲の粒度分布は実験砂のそれと同程度か上側にあつて、細粒化の影響が残っている。一方、最終時点の横断方向の粒度構成は側岸に近いほど細砂の堆積の影響が強く、中央粒径は実験砂と同程度でも標準偏差の大きい分布形になっている。このように流路の河床砂には側岸侵食土砂の分級流送と粗粒化過程が反映して横断面内で変化範囲の広い粒度構成をなす。また, Fig. 3 と Fig. 4 とを比較してわかるように流路幅および河床高が安定状態に達した後も粒度構成の変化は継続しており, Fig. 5 の $x=4\text{ m}$ の粒度分布も極限状態かどうかは明らかでない。

Fig. 6 は断面平均の摩擦速度 U_* と限界掃流力 U_{*c} との比の時間的変化と平均河床高 $\bar{z}-z_0$ (z_0 : 初期河床高) および流路幅 B_b の変化との対応を $x=4\text{ m}$ と 28 m の断面について調べたものである。 U_* は Fig. 3 の横断形状と 4 m 毎の平均水位の測定値から求め、 U_{*c} は Fig. 4 と Fig. 5 の粒度分布に採砂部分の潤辺比率を掛けて平均化し、その分布の平均粒径を用いて岩垣式から計算した。また、 $x=28\text{ m}$ の断面については、細砂帯とそれ以外の部分の U_{*c} から計算した U_*/U_{*c} の変化も示している。 $U_*/U_{*c}=1$ となる時点で流路幅は一定になっているが、平均河床高は低下の傾向にある。 U_{*c} を Egiazaroff 式から計算した場合もほぼ同様の結果が得られ、細砂部分の流送による河床低下はこうした平均値だけの議論では説明できない。なお、横断方向の水深変化に対応した局所的な掃流力と限界掃流力との関係についても岩垣および Egiazaroff 式に斜面こう配の影響を加味して検討したが、静的な安定状態の判定基準として両式の優劣は明確でなかった。

以上のように給砂のない場合の流路変動は上流から下流、側岸から河床中央部に向つて安定化し、粒度構成もそれに対応して変化する。


 Fig. 6 Variation of U^*/U_{*cr} , $z-z_0$ and B_b with time.

3. 流路の安定形状の検討

流路の安定形状についてはこれまで河道の設計に関連して平衡縦断面形および横断面形に関する数多くの研究がなされており、また最近、野田²⁾は河口の Gorge 断面について横断面形状に関する Lane の理論の適合性を検討している。このように流路の安定形状を明らかにすることは實際上多くの適用面をもつだけでなく、流路の変動過程に一つの基準を与える意味で重要である。ここでは、主に本実験の最終時点の測定結果を用いて静的平衡状態の横断面形状の式および等流平衡式と比較し、その相異点を明らかにする。

3.1 安定横断面形状式との比較

流路の安定横断面形状を表わす理論式としては Lane³⁾および土屋⁴⁾による式がよく知られている。いま、流路の斜面と平面における限界掃流力をそれぞれ $\tau_{s,c}$ および $\tau_{L,c}$ とすると、その比はつぎのように表わされる。

$$\frac{\tau_{s,c}}{\tau_{L,c}} = \cos \theta \sqrt{\frac{\tan^2 \phi - \tan^2 \theta - \tan^2 \delta / \cos^2 \theta}{\tan^2 \phi - \tan^2 \delta}} \quad (1)$$

ここで、 ϕ は砂粒子の静止摩擦角、 δ と θ は Fig. 7 に示すようにそれぞれ流路の縦断および横断方向の傾斜角である。(1) 式で $\theta \gg \delta$ の場合が Lane の導いた式

$$\tau_{s,c} / \tau_{L,c} = \cos \theta \sqrt{1 - \tan^2 \theta / \tan^2 \phi} \quad (2)$$

に相当する。(2) 式に $\tau_{L,c} = \rho g h_k I$, $\tau_{s,c} = \rho g (h_k - z) I \cos \theta$, $\tan \theta = dz/dy$ を代入し、 $y=0, z=0$ の条件で積分すれば

$$z/h_k = 1 - \cos(\tan \phi - y/h_k) \quad (3)$$

が得られる。また、(3) 式と $U_{*c}^2 = g h_k I$ の関係から水深、河床こう配および流水断面積のそれぞれと流路幅との関係を求めるとつぎのようになる。

$$h_k = \frac{\tan \phi}{\pi} B \dots\dots (4) \quad I = \frac{\pi U_*^2}{g \tan \phi} B^{-1} \dots\dots (5) \quad A = \frac{2 \tan \phi}{\pi^2} B^2 \dots\dots (6)$$

一方、土屋は岩垣の限界掃流力理論にもとづいて Lane と同様の観点から考察し、粒子 Reynolds 数 $U_* d/\nu$ と遮へい係数 ϵ の影響を加味した横断形状の式を導いている。Fig. 8 は流路幅と水深 (h_k) の比と静止摩擦

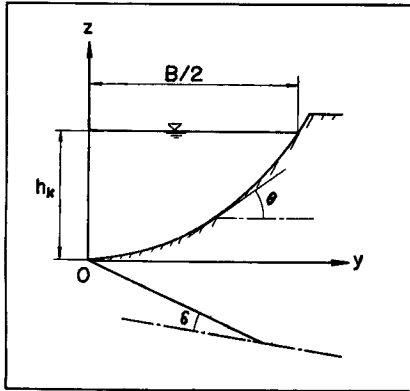
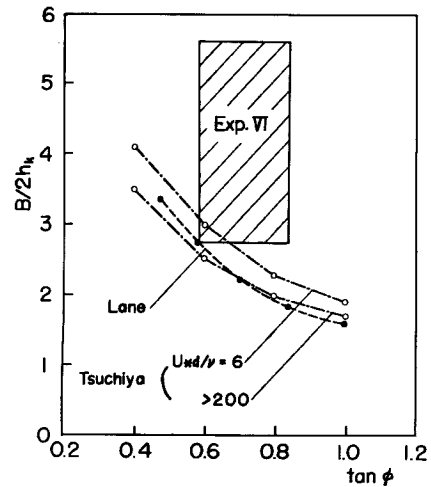


Fig. 7 Definition sketch.

Fig. 8 Relations between $B/2h_k$ and $\tan \phi$.

係数との関係について、Lane の (4) 式および土屋の式と Exp. VI の測定値の存在範囲とを比較したものである。本実験では $\tan \phi \doteq 0.58 \sim 0.84$, $U_* d/\nu = 50 \sim 170$ であるが、測定値はいずれの理論曲線よりも上方にあって、理論式に比して幅広な断面をなしている。また、Lane と土屋による理論値の差は小さいと考えられるので、以下では表示が簡単な Lane の (3), (5) および (6) の各式と実験値との比較を行なう。

Fig. 9 は (3) 式と Fig. 3 に示した Exp. IV の斜面形状の測定値とを比較したもので、実測の h_k として

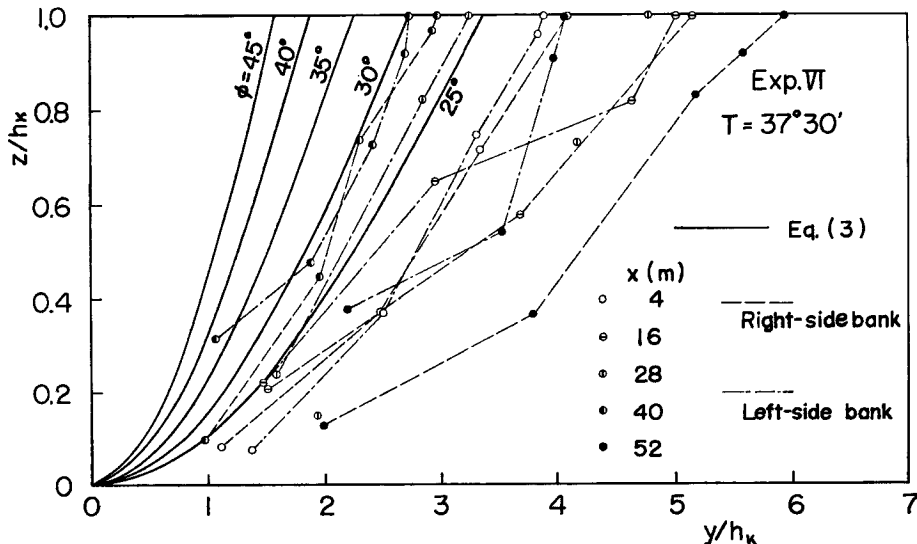


Fig. 9 Comparison of observed values with Lane's theoretical curves for cross-sectional shape of stable channel.

は斜面の最大水深をとっている。河床砂の静止摩擦角は実測結果によると実験砂で $\phi=36^\circ\sim40^\circ$ (平均値 $\bar{\phi}=38^\circ$)、細砂部分で $\phi=36^\circ\sim39^\circ$ ($\bar{\phi}=37^\circ$)、粗砂部分で $\phi=33^\circ\sim39^\circ$ ($\bar{\phi}=36^\circ$) であって、これら三者の差は小さい。横断形状の実測値は測定断面によってかなり異なっており、安定状態にある $x=4\sim40$ m と拡幅状態にある $x=52$ m の斜面形状との差も明らかでない。しかし、いずれの斜面形状も $\bar{\phi}=36^\circ\sim38^\circ$ とした Lane の関係式より右方にはづれており、扁平な形状をなしている。なお、(3) 式と実測値とを比較する場合、(3) 式を導く際の仮定すなわち (1) 式の $\delta=0$ および $y=0$ で $\theta=0$ の条件を検討する必要があるので、若干の断面について θ および δ の実測値と河床材料から得られる U_{*c} を用いて理論式との比較を行なったが、その結果も Fig. 9 とほぼ同様であった。

このように実測値が理論式に適合しない原因を 2 で述べた現象から考えると、理論では安定流路への移行過程および混合砂の影響が加味されていないことによると思われる。これらの影響を検討するために一樣砂を用いた他の研究者の実験結果および Exp. II, IV, VI の実験値にもとづいて (5) 式の関係を検討すると Fig. 10 のようになる。なお、各理論曲線で $\tan\phi$ は本実験に対して $\phi=36^\circ$ 、他の実験では $\phi=45^\circ$ を用い、

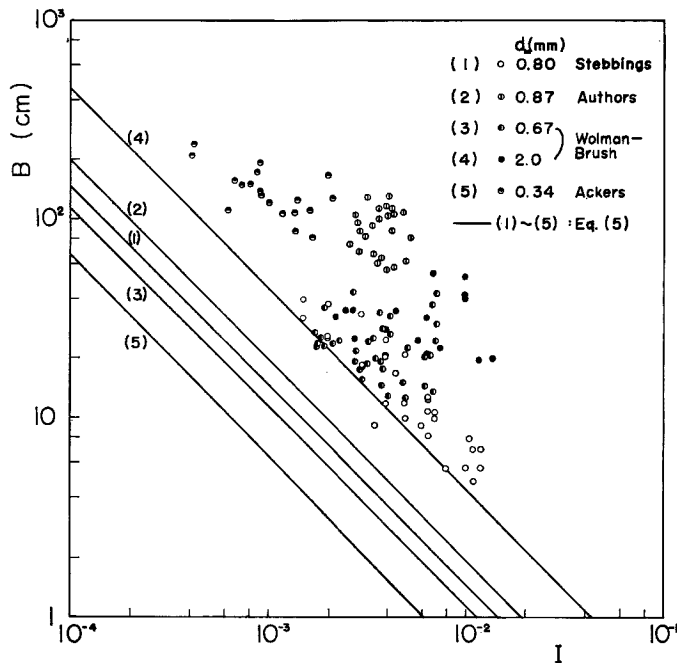


Fig. 10 Comparison of observed values with Lane's expression for stable channel.

U_{*c} は岩垣式から求めた。これらの実験のうち、Stebbing の実験⁵⁾ は本実験と同様な静的な平衡状態、Wolman-Brush⁶⁾ と Ackers⁷⁾ の実験は動的な平衡状態を対象として行なわれたものである。いずれの実験値も対応する理論式より上方にはづれており、Lane の理論から予測されるより広幅の断面をなしていると考えられる。また、河床材料および平衡状態の相異による実験値相互の差あるいは理論との適合性の差も顕著に認められない。Fig. 11 は同様に (6) 式と各実験値とを比較したものであるが、実験値は理論式の下方にはづれており、実測の流路断面は Lane の理論より扁平で、一定流路幅に対して流水断面積が小さいことを示している。以上の検討結果から、拡幅後に形成される安定断面は水位および水面こう配一定の条件で定まる静的平衡断面と異なりその形成過程が影響していることがわかる。

3.2 等流平衡式との比較

Lane の各式は流量に依存しない表示であるが、等流状態の静的平衡式は限界掃流力を流速および流量と

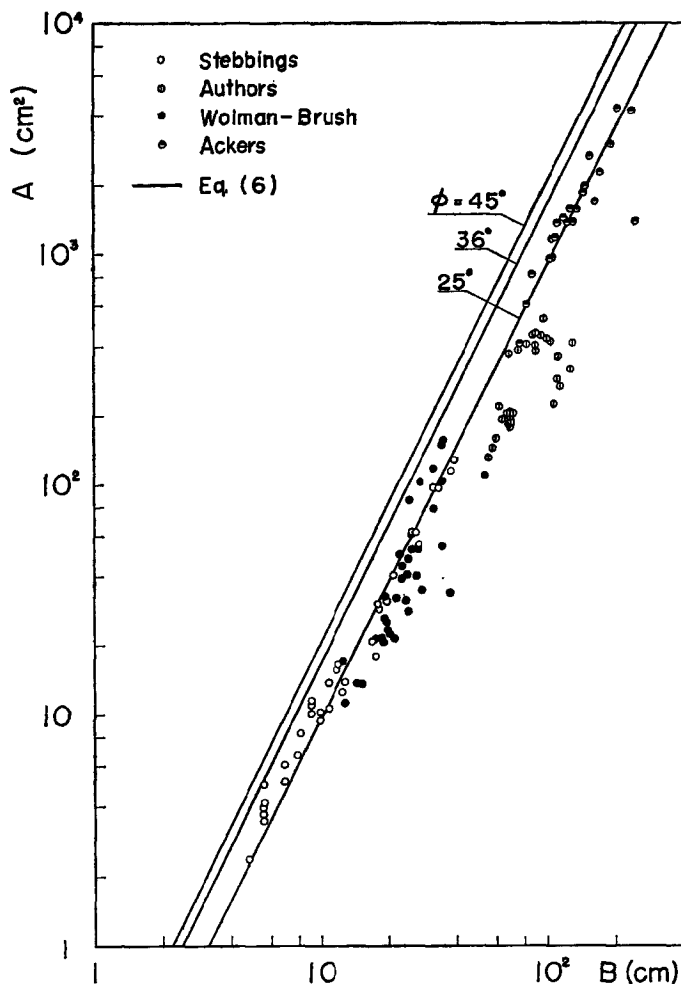


Fig. 11 Comparison of observed values with Lane's expression for stable channel.

関係づけることによって得られる。流速式として Manning 式を用い、流路断面を広幅の長方形で近似すると、河床こう配あるいは水深と流路幅の関係はそれぞれ

$$I = (n^2 g^{10/3} Q^2)^{-3/7} U_{*c}^{20/7} B^{6/7} \dots \dots \dots (7)$$

$$h = (n^2 g Q^2)^{3/7} U_{*c}^{-6/7} B^{-6/7} \dots \dots \dots (8)$$

で表わされる。

Fig. 12 は $Q=15l/s$ の場合について (7) 式と実験値とを比較したものであって、Lane の (5) 式も示してある。(7) 式の U_{*c} は実験砂、粗砂および細砂のそれぞれについて岩垣式から求め、 n は河床が平滑な砂粒面であることから Strickler の式 $n=0.016 d_m^{-1/6}$ を用いて計算した。なお、これら三種の砂の平均粒径 d_m と初期における粒度分布比率 F_0 が図に示してある。各実験ケースの等流平衡状態は流路幅が一定の場合は初期値を含む垂直線と (7) 式との交点、こう配一定の場合は水平線との交点で与えられるが、実験値はいつでもこれらの平衡状態への移行過程の中間に広く分布している。

同様に (8) 式および (4) 式と実験値とを比較すると Fig. 13 のようになる。実験値は (8) 式とほぼ平行

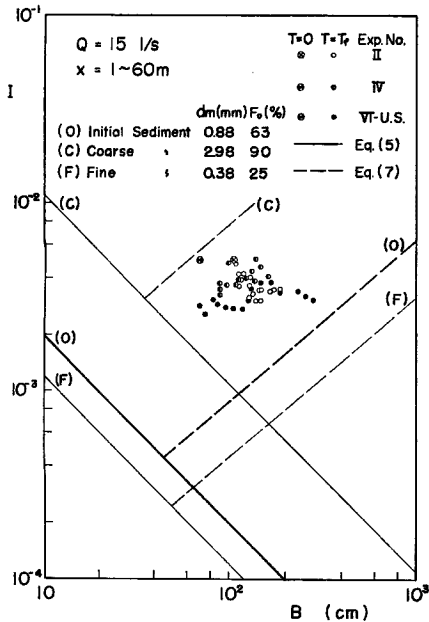


Fig. 12 Comparison of observed values with theoretical expression for stable channel in static equilibrium.

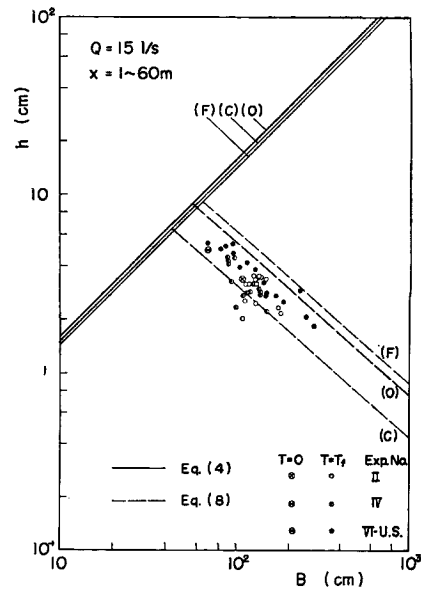


Fig. 13 Comparison of observed values with theoretical expression for stable channel in static equilibrium.

した関係を示しているが、実験砂と粗砂に対する平衡式の中間に存在しており、等流平衡として一義的な関係を定めるには流路幅とともに粒度構成も加味する必要があることがわかる。また、水位および水面こう配が異なる条件の下で形成された安定状態が1断面内に分布しているので、こうした等流平衡式と一時点の水量と対応づけることは難しいと考えられる。

4. 流路の拡幅と河床変動に関する考察

上述のように安定流路を予測するには流路の変動過程を明らかにする必要がある。流路の変動過程に関する水理学的な考察としては、最近、長谷川一工藤一山岡⁸⁾、足立一中藤⁹⁾および椿一平野一田中¹⁰⁾の研究があって、側岸侵食を支配する条件の実験的検討、側岸付近の侵食機構のモデル化あるいは拡幅現象の解析が試みられている。しかし、側岸付近の侵食および土砂流送の機構については不確定な要素が多いので側岸侵食条件式の設定が難しく、拡幅と河床変動との関係も明確な形で説明されていない。

ここでは侵食現象の観察から流れの作用を支配的と考え、一様拡幅状態の実験値を用いて側岸侵食量を単純に流砂量関数形で仮定する。この条件式を河床変動の基礎式に導入して一次元的な解析を行ない、実験値と比較する。

4.1 流路変動の基礎式

Fig. 14 に示すように初期流路を基準として座標系を定め、流路断面を広幅の長方形に近似すると流砂の連続式は

$$B \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial Q_B}{\partial x} = q_s \quad \dots \dots \dots (9)$$

で表わされる。ここで、 Q_B : 河床の全流砂量、 q_s : 側岸から供給される土砂量、 λ : 河床砂の間隙率の 1/100 である。 Q_B として Brown 形式の流砂量関数

$$Q_B = Bq_B = BMU_* (U_*^2 - U_{*c}^2)^m, \quad M = M_1 \{ \sigma / \rho - 1 \} g \}^{-m} d_m^{1-m} \quad \dots \dots \dots (10)$$

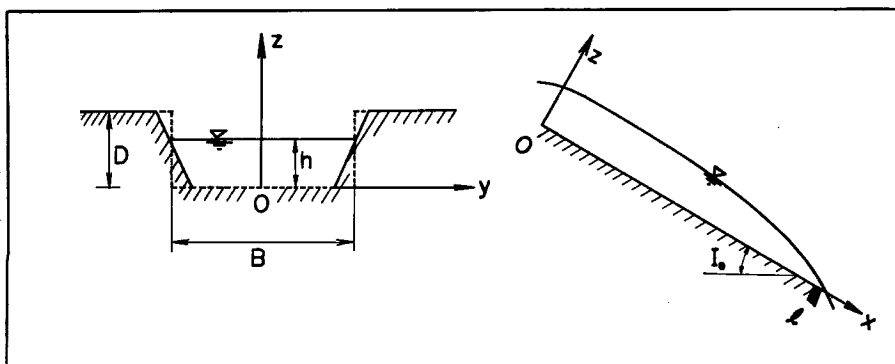


Fig. 14 Definition sketch.

を仮定する。ただし, q_B : 単位幅流砂量, σ/ρ : 砂の比重, M, m : 定数である。

また, q_s は側岸侵食の関係から

$$q_s = -\frac{1-\lambda_b}{1-\lambda} \frac{\partial B}{\partial t} (D-z) \quad (11)$$

と表わされる。ここで, λ_b : 側岸の間隙率の 1/100, D : 側岸高である。

一方, 水流の運動方程式および流量の関係は流路変動が緩慢な場合を考え, 定常流としての次式を用いる。

$$\frac{U_*^2}{gh} = I_e = I_0 - \frac{\partial z}{\partial x} - \left(1 - \beta \frac{U^2}{gh}\right) \frac{\partial h}{\partial x} + \beta \frac{U^2}{gB} \frac{\partial B}{\partial x} \quad (12)$$

$$Q = BhU = CBhU_* \quad (13)$$

ただし, I_e : エネルギーこう配, I_0 : 初期の河床こう配, U : 平均流速, β : 運動量補正係数, C : 流速係数である。(9) 式に (10), (12) および (13) 式を代入して, z に関して拡散式の形に整理すると,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = K \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + L \right) + \frac{q_s}{B} \quad (14)$$

ただし, $K = Mg^{1-m}C^{1-2m}a^m \left(1 + \frac{2m}{a}\right) Q^{2m-1}B^{1-2m}h^{2(1-m)} / 3(1-\lambda)$

$$L = (1 - \beta F_1^2) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - 3\beta F_1^2 \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - \left(2 + \frac{2m}{2m+a} \right) \frac{I_e}{B} \frac{\partial B}{\partial x} - \beta F_2^2 \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + 3\beta F_2^2 \frac{1}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)^2$$

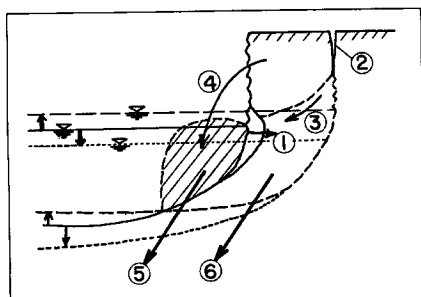


Fig. 15 Schematic sketch of bank erosion process.

となる。ここで, $a = 1 - U_*^2/U_*^2$, $F_1 = U\sqrt{gh}$, $F_2 = U/\sqrt{gB}$ である。

以上の (11)~(14) 式において変量は z, h, B, U_*, I_e, U および q_s の 7 コ, 条件式は 6 コであるから条件式を 1 つ導入する必要がある, これを次項で求める。

4.2 側岸侵食の機構と条件式の仮定

流水による側岸の侵食過程を本実験の観察にもとづいて述べるとつぎのようである。

- ① 側岸の浸水部が洗掘され, 水面上の部分がオーバーハングした状態になる。
- ② 側岸の上面にテンション・クラックが入る。

- ③ クラックの下部と洗掘部を結ぶ面で滑る。
- ④ 側岸から分離した部分が流路内へ崩落する。
- ⑤ 崩落した部分が流送される。
- ⑥ 崩落部分の下部の残留土砂が流送され、側岸の浸水部の洗掘に及ぶ。

Fig. 15 は以上の過程を模式的に示したものであって、水位が上昇する間この過程を繰り返し、水位の低下によって侵食が停止する場合が多い。①～⑥の1サイクルの所要時間は側岸の形状、流路の形態および水理条件によって異なるがおよそ 1～10 分であって、そのうち②～④の過程は 10 秒程度で完了するので流路幅は間歇的に拡がる。また、1 サイクルで侵食される側岸の流下方向の長さは 10～30 cm、テンション・クラックの入る位置は側岸から数 cm 程度であって半円形状に侵食されていく。

②～④の側岸の崩落は側岸の高さと土砂の性質に関係しており、土質力学の安定計算によってある程度予測できる。しかし、クラックの発生位置あるいは流下方向の侵食範囲は仮定する必要があるが、1 サイクルの侵食量の推算是難しい。一方、①、⑤、⑥の洗掘と流送過程は水際の掃流力に支配される。水際には二次流の影響が大きく、掃流力が局所的な水深に対応しないことが固定床の実験で指摘されているが、さらにこの場合には崩落土砂による局所的な流れの変化にも影響されるので、水際の掃流力の明確な表示はできない。

このように側岸侵食については未知の現象が多く、現状では侵食の微視的な機構から 4.1 の基礎式に対応する平均的な条件式を求めることは難しい。ここでは、上述の現象の進行時間から、本実験のように砂を用いた場合、側岸の侵食速度は主に流れによる洗掘と土砂の流送過程に支配されと考え、流路の拡幅速度あるいは (11) 式の単位時間当りの側岸侵食量が断面平均の摩擦速度とどのように対応するかを実験値を用いて検討する。

流路の拡幅速度は Fig. 2 から明らかなように時間の経過とともに流下方向の変化が顕著になるので、長時間にわたって摩擦速度と対応づけるには水理諸量の場所的变化を計算する必要がある。一方、側岸侵食量は河床変動量にも関係するが、両者の対応すなわち (9) 式の右辺（あるいは (11) 式）と左辺第 1 項の値を Exp. VI の測定値から求め、各時間段階の場所的变化を示すと Fig. 16 のようになる。側岸および河床

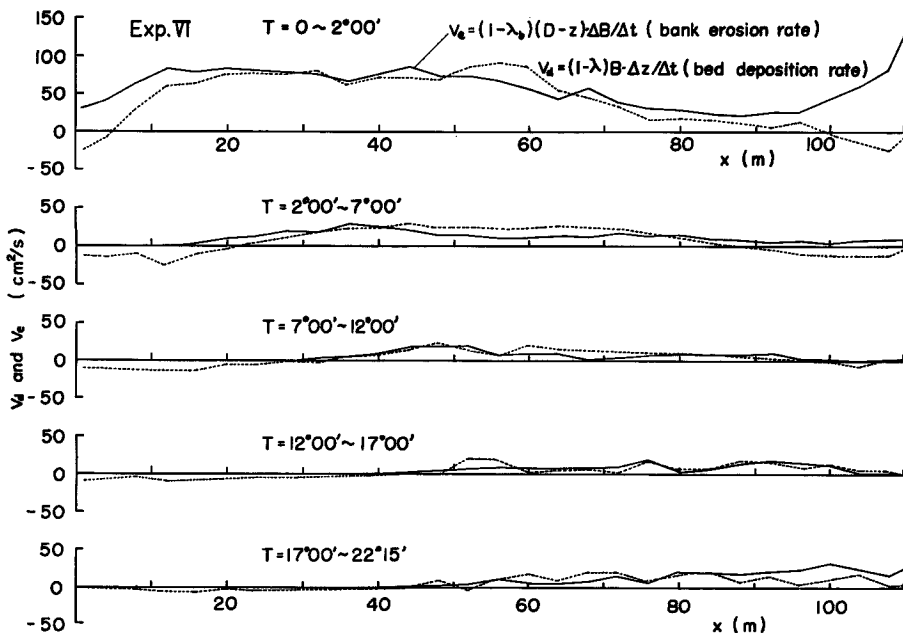


Fig. 16 Variations of bank erosion and bed deposition rate along channel with time.

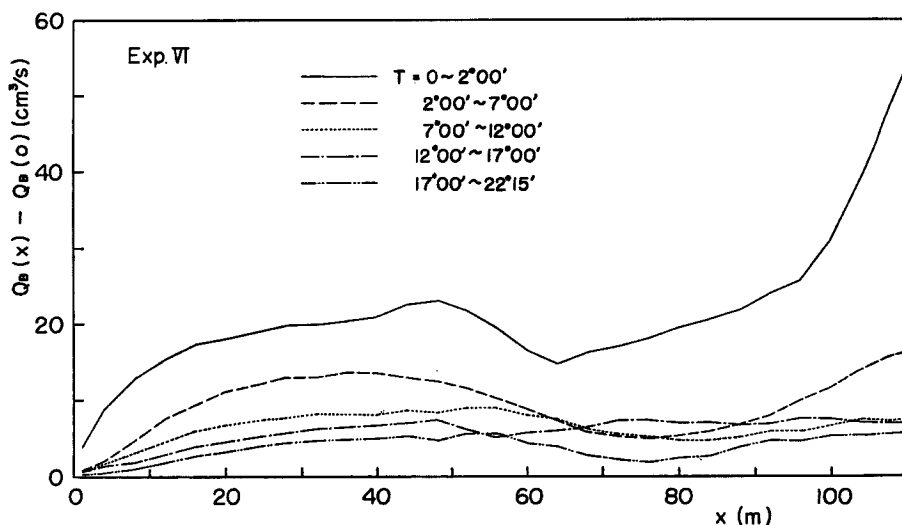
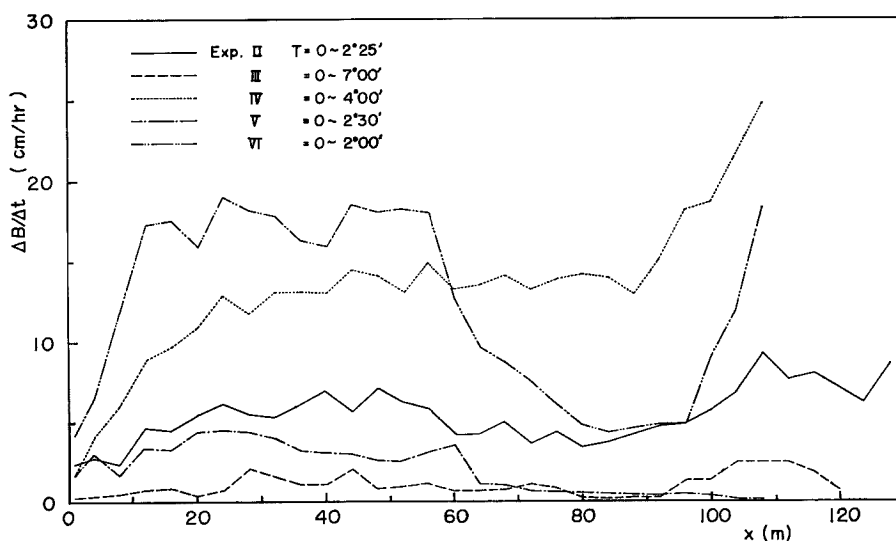


Fig. 17 Variation of sediment transport rate along channel with time.

の間隙率は標準砂置換法による測定結果から $\lambda_b=0.45$, $\lambda=0.40$ とした。側岸侵食量 V_e と河床上昇量 V_d は $T=0\sim2'00'$ の $x=20\sim50$ m においてほぼ均衡している。その後、次第に両者ともに減少し、流下方向の変化が顕著になって、上流では $V_e>0\rightarrow V_e=0$, $V_d<0\rightarrow V_d=0$, 下流では $V_e>V_d$ になる。Fig. 17は V_e と V_d の差を上流端より累加して (9) 式の $Q_B(x, t)$ を求めた結果を示しており、流砂量の場所的変化と低減の様子がわかる。

このように長時間通水後の拡幅速度および側岸侵食量と水理量との対応づけは難しいと考えられるので、通水初期の測定値に限定して摩擦速度との関係を検討する。なお、有効摩擦速度としては Fig. 6 の結果を考慮して、 U_*-U_{*c} を用いる。

Fig. 18 は各実験ケースの通水初期における拡幅速度を示したものであって、これらの一様拡幅区間の平

Fig. 18 Longitudinal distributions of $\Delta B/\Delta t$ at the initial flow duration.

均値と摩擦速度の関係

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = f_n(U_* - U_{*c}) \dots \dots \dots (15)$$

を調べると Fig. 19 のようになる。また、Fig. 20 は側岸侵食量について同様に

$$V_e' = (D - z) \frac{\Delta B}{\Delta t} = f_n(U_* - U_{*c}) \dots \dots \dots (16)$$

の関係を検討したものである。これらの図には青野の実験値¹¹⁾について同様の整理を行なった結果も比較してある。青野の実験条件は図に示したように初期流路幅で本実験の 1/5~1/10, 側岸高で 1/2~1/7 の範囲にあって、掃流力はほぼ同程度である。Fig. 19 では、 $\Delta B/\Delta t$ と $U_* - U_{*c}$ の増加は対応しているが、青野と著者らの実験値の間に明らかな差が認められ、(15) 式の表示では流路のスケールの影響を加味する必要がある。一方、Fig. 20 では両者の差は顕著でなく、(16) 式の表示が一応なりたつものと考えられる。この事実は上述の 1 サイクルの現象のうち土砂の流送過程が支配的であることを意味しており、例えば、側岸が高く 1 回の崩落で流路に供給される土砂が多ければ流送に要する時間だけ側方侵食が遅れることに相当する。また、木下の側面侵食試験¹²⁾において、水理条件が一定の場合、側岸高を変化させても流出土砂量がほぼ一定になるという結果が得られていることに対応している。

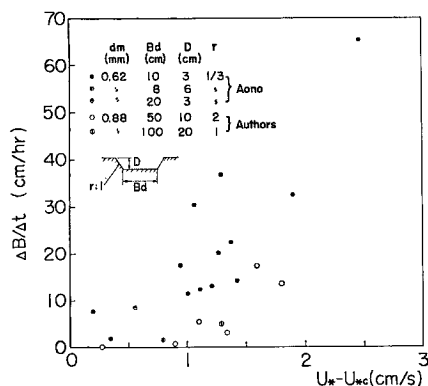


Fig. 19 Relation between $\Delta B/\Delta t$ and $U_* - U_{*c}$.

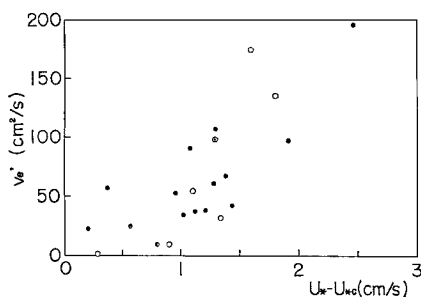


Fig. 20 Relation between bank erosion rate and $U_* - U_{*c}$.

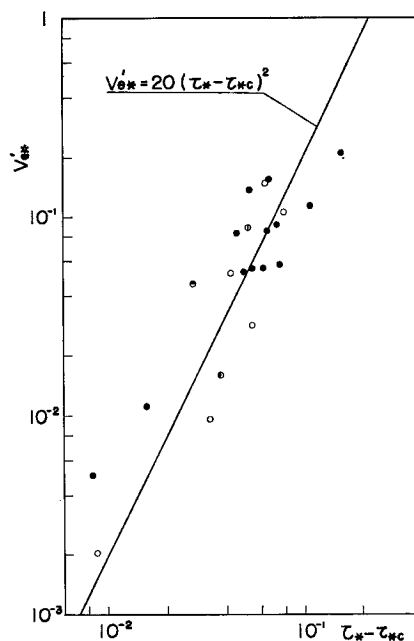


Fig. 21 Nondimensional expression of relation between bank erosion rate and effective tractive force.

Fig. 20 の関係を通常用いられる無次元量 $V_{e*}' = V_e' / U_* d_m$ と $\tau_* - \tau_{*c} = (U_*^2 - U_{*c}^2) / (\sigma / \rho - 1) g d_m$ で表わすと Fig. 21 のようになる。すなわち、 $V_{e*}' = N_1 (\tau_* - \tau_{*c})^n$

あるいは (11) と (16) 式の関係から

$$q_s = \frac{1-\lambda_b}{1-\lambda} N U_* (U_*^2 - U_{*c}^2)^n, \quad N = N_1 \left\{ \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) g \right\}^{-n} d_m^{1-n} \quad (17)$$

と表わされる。ここで、定数 N_1 , n は Fig. 21 より $N_1=20$, $n=2$ と仮定する。

4.3 流路変動の近似式と実験値との比較

以上より, (11) ~ (14) および (17) 式を用い, 初期条件と境界条件および諸定数を与えることによって拡幅をとまう河床変動の計算ができる。つぎに, 流下方向に拡幅量が一樣な場合と変化する場合とについて近似式を導き, その適合性を二, 三の実験ケースについて検討する。

(1) 流下方向に拡幅量が一樣な場合

この条件のもとで上述の各式を整理するとつぎのようになる。

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1-\lambda_b}{1-\lambda} \cdot \frac{D-z}{B} \cdot \frac{dB}{dt} \quad (18)$$

$$\frac{dB}{dt} = N (U_*^2 - U_{*c}^2)^n U_* d_m^{1-n} (D-z) \quad (19)$$

$$U_* = (g Q I_0 / C B)^{1/3} \quad (20)$$

(19) 式に (20) 式を代入し, $\eta = (D-z)/D$, $b = B/B_0$ を用いて無次元化すると

$$\frac{d\eta}{dt} = -\alpha \frac{\eta}{b} - \frac{db}{dt} \quad (21)$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{q_{s0}}{\alpha B_0 D (1-\gamma_0)^n} b^{-(2n+1)/3} (1-\gamma_0 b^{2/3})^n \eta^{-1} \quad (22)$$

が得られる。ここで, 添字 (0) は各水理量の初期値を表わし, $\alpha = (1-\lambda_b)/(1-\lambda)$, $\gamma_0 = (U_{*c}/U_{*0})^2$ である。

(21) 式を積分し, $\eta=1$ で $b=1$ の条件を用いると,

$$\eta b^\alpha = 1 \quad (23)$$

となる。上式を (22) 式に代入して積分し, $t=0$ で $b=1$ とすると次式が得られる。

$$t = \frac{\alpha B_0 D (1-\gamma_0)^n}{q_{s0}} \int_1^b (1-\gamma_0 b^{2/3})^{-n} b^{(2n+1-3\alpha)/3} db \quad (24)$$

結局, 流路幅と河床高の時間的变化は (23) および (24) で表わされ, (24) 式を数値積分する必要がある。しかし, さらに条件を付加すると以下のように簡略式が得られる。

まず, $\gamma_0 b^{2/3} \ll 1$ の場合すなわち $U_* \gg U_{*c}$ の条件を満足する場合には, (24) 式は積分できて

$$b = \eta^{-1/\alpha} = \left\{ \frac{2(n+2)-3\alpha}{3} \frac{q_{s0}}{\alpha B_0 D (1-\gamma_0)^n} t + 1 \right\}^{3/(2n+4-3\alpha)} \quad (25)$$

と表わされる。

さらに, 河床と側岸の間隙率が等しい場合には, $\alpha=1$ であって, $n=1$ とすると

$$b = \eta^{-1} = \frac{q_{s0}}{B_0 D (1-\gamma_0)} t + 1$$

が得られ, 流路幅は時間に比例して増加することになる。本実験では上述のように $n=2$, $N_1=20$ であるから

$$\begin{aligned} b = \eta^{-1} &= \left\{ -\frac{5}{3} - \frac{q_{s0}}{B_0 D (1-\gamma_0)^2} t + 1 \right\}^{3/5} \\ &= \left\{ \frac{100}{3} \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right)^{-2} g^{1/3} \left(\frac{Q I_0}{C} \right)^{5/3} d_m^{-1} D^{-1} B_0^{-8/3} t + 1 \right\}^{3/5} \quad (26) \end{aligned}$$

と表わされる。一方, 摩擦速度, 水深, 流水断面積, 側岸侵食量および流砂量のそれぞれと拡幅量 b との関

係は (20), (10) および (17) 式よりつぎのように表わされる。

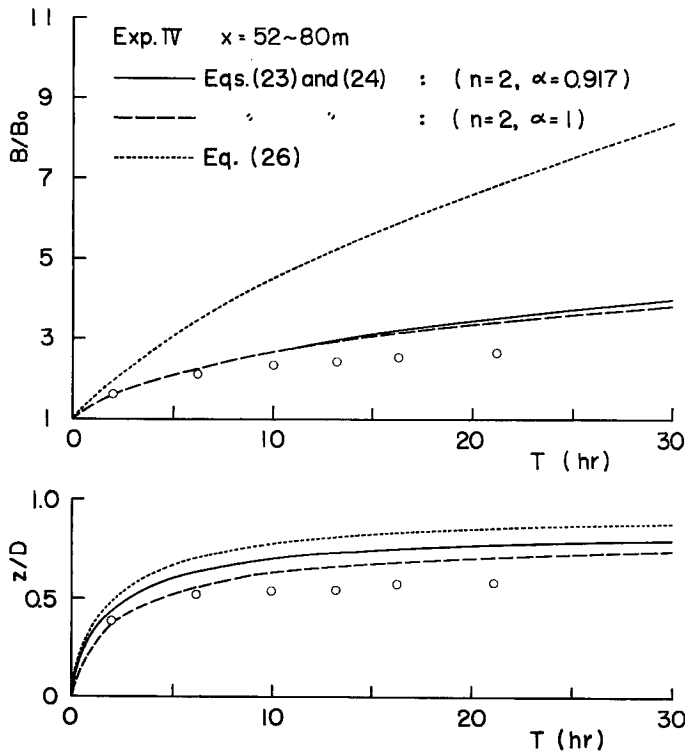
$$\frac{U_*}{U_{*0}} = b^{-1/3}, \quad \frac{h}{h_0} = b^{-2/3}, \quad \frac{A}{A_0} = b^{1/3}, \quad \frac{q_s}{q_{s0}} = b^{-(2n+1)/3} \left(\frac{1-\gamma_0 b^{2/3}}{1-\gamma_0} \right)^n,$$

$$\frac{Q_B}{Q_{B0}} = \frac{2(1-m)/3}{1-\gamma_0} \left(\frac{1-\gamma_0 b^{2/3}}{1-\gamma_0} \right)^m$$

拡幅にともなう、水深の減少度合は、摩擦速度の減少と断面積の増加度合に比して大きいことになる。また、 $n=2, m=1$ を用いると、 $U_* \gg U_{*c}$ の場合、 $q_s/q_{s0} = b^{-3/2}$, $Q_B/Q_{B0} = 1$ となり、流砂量は一定であるが側岸の侵食量は拡幅にともなって急激に減少することを示している。

つぎに、(23) と (24) 式で本実験条件の $\alpha=0.917$ を用いた場合、 $\alpha=1$ と仮定した場合および最も単純化した (26) 式の三者について、Exp. IV の中流部および Exp. VI の下流部の実験値と比較するとそれぞれ Fig. 22 (a) と (b) のようになる。実験値はいずれも流路こう配が初期値に近い区間の平均値を用いている。Exp. IV および VI では $\gamma_0=0.2 \sim 0.5$ であって $\gamma_0 b^{2/3} \ll 1$ の近似がなりたたないので、(26) 式の曲線と実験値とは大きく離れている。

一方、(23) と (24) 式で $\alpha=0.917$ と $\alpha=1$ の場合の差は流路の拡幅に対しては無視できる。また、 $B/B_0 \sim t$ と $z/D \sim t$ のいずれの理論曲線も Exp. IV では時間の経過にともなって実験値より上方にはずれ、Exp. VI では下方に離れている。これは前者では上流の河床低下の影響、後者では下流端および蛇曲拡幅の影響が実験値に現われているためであって、流下方向一様とした解析では記述できない。



(a)

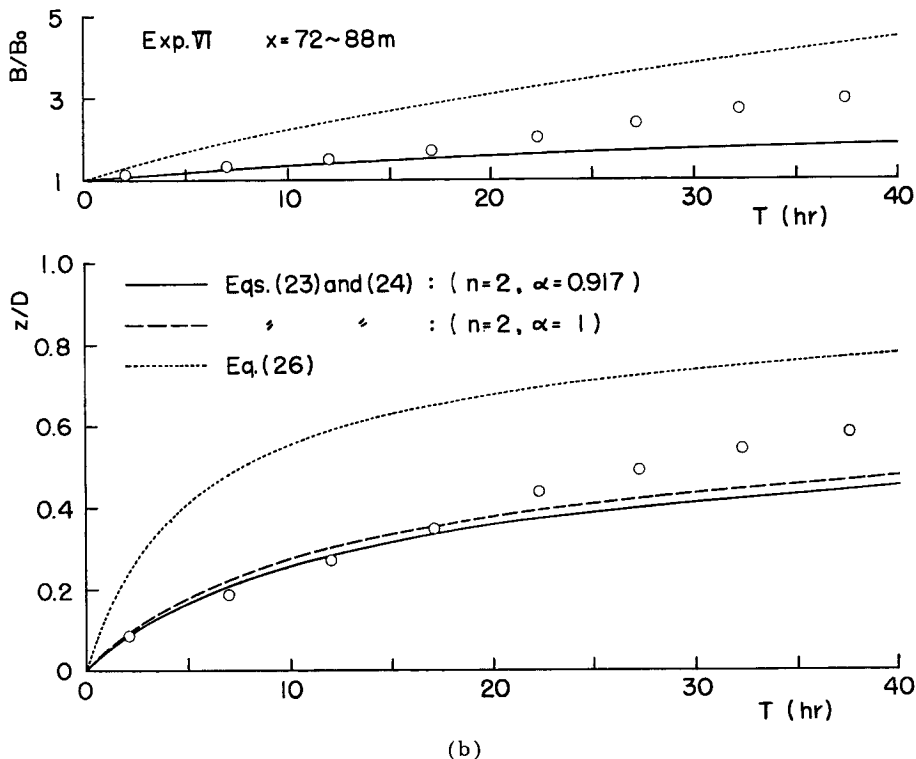


Fig. 22 Comparison of observed values with theoretical curves in the case of longitudinally uniform channel process.

(2) 流下方向に拡幅量が変化する場合

流下方向の拡幅が緩慢な状態を考え、(12)式でエネルギーこう配を河床こう配と等置し、(14)式の $L=0$ と近似できる場合について計算する。また、本実験の下流端における流出土砂量の測定結果から(10)式の定数は $M_1=10$, $m=1$ とする。このような近似を用いると、流路変動の基礎式はつぎのようになる。

$$\frac{\partial z}{\partial t} = K \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{q_s}{B} \quad (27) \quad \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1-\lambda}{1-\lambda_b} \frac{q_s}{D-z} \quad (28)$$

$$q_s = \frac{1-\lambda_b}{1-\lambda} N (U_*^2 - U_{*c}^2)^2 U_* d_m^{-1} \quad (29) \quad \frac{U_*^2}{gh} = I_e = I_0 - \frac{\partial z}{\partial x} \quad (30)$$

$$\text{ただし, } K = \frac{10 Q}{(1-\lambda)(\sigma/\rho-1)CB} \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{U_{*c}}{U_*} \right)^2 \right\}, \quad N = 20 \left\{ \left(\frac{\sigma}{\rho} - 1 \right) g \right\}^{-2}$$

上の各式を(1)の場合と同様に無次元表示を用いて整理すると、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{K_0}{1-\gamma_0/3} \frac{1-\gamma_0 b^{2/3} i^{-2/3}/3}{b} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \alpha \frac{\eta}{b} \frac{\partial b}{\partial t} \quad (31)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \frac{q_{s0}}{\alpha B_0 D (1-\gamma_0)^2} b^{-5/3} i^{5/3} (1-\gamma_0 b^{2/3} i^{-2/3})^2 \eta^{-1} \quad (32)$$

$$i = 1 + D \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (33)$$

が得られる。ただし、 $i = I_e/I_0$ であって、 $d_m/d_{m0}=1$ および $U_{*c}/U_{*c0}=1$ と仮定している。

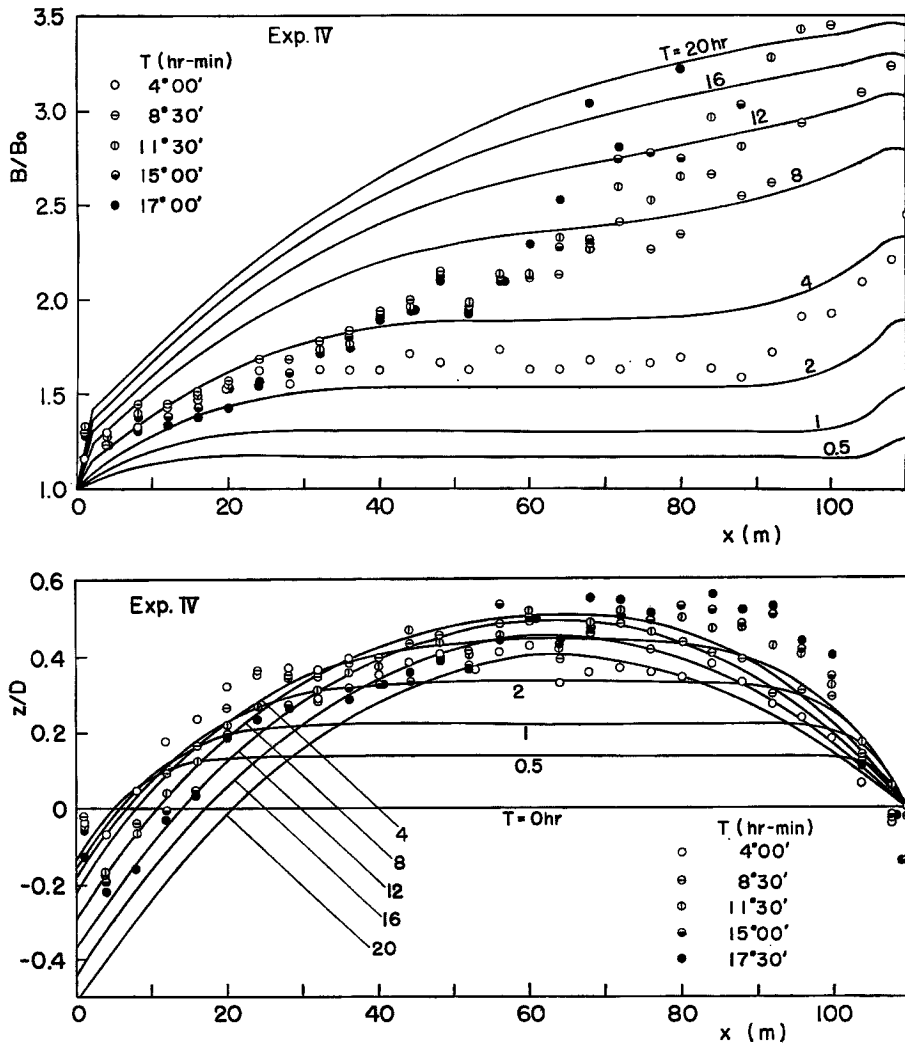
(31)～(33) 式を数値計算するために差分化すると、

$$\eta_{i+1,j} = \eta_{i,j} + \frac{K_0}{(1-\gamma_0/3)} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \frac{1-\gamma_0 b_{i,j}^{2/3} i_{i,j}^{-2/3}/3}{b_{i,j}} (\eta_{i,j+1} - 2\eta_{i,j} + \eta_{i,j-1}) - \alpha \frac{\eta_{i,j}}{b_{i,j}} \Delta b_{i+1,j} \dots (34)$$

$$\Delta b_{i+1,j} = \frac{q_{s0}}{\alpha B_0 D (1-\gamma_0)^2} b_{i,j}^{-5/3} i_{i,j}^{5/3} (1-\gamma_0 b_{i,j}^{2/3} i_{i,j}^{-2/3})^2 \eta_{i,j}^{-1} \Delta t \dots (35)$$

$$i_{i,j} = 1 + \frac{D}{2\Delta x I_0} (\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1}) \dots (36)$$

となる。ここで、 $t = i\Delta t$ ($t \geq 0$), $x = j\Delta x$ ($0 \leq x \leq l$), $i, j = 0, 1, 2, \dots$ である。



(a)

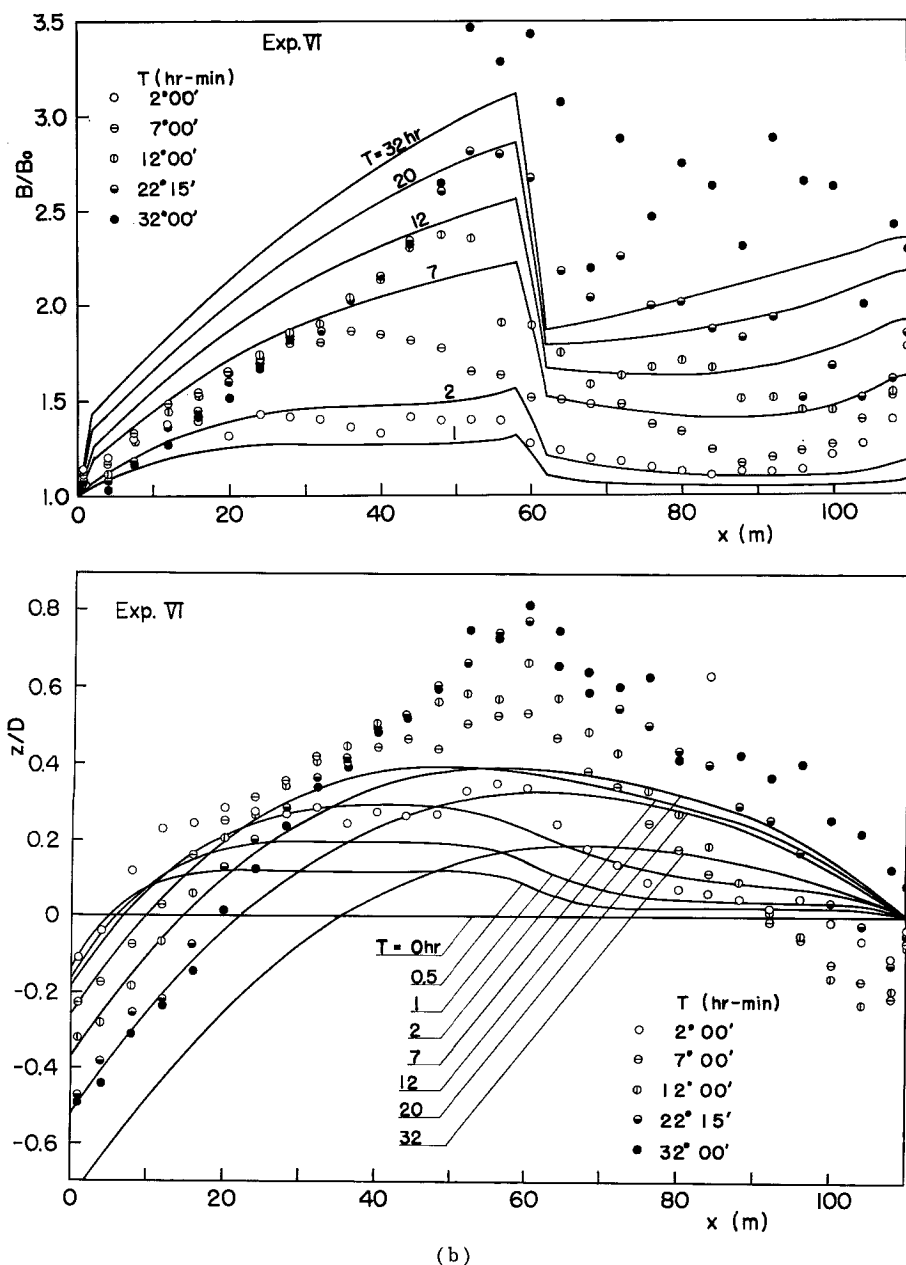


Fig. 23 Comparison of observed values with theoretical curves in the case of longitudinally non-uniform channel process.

計算は Exp. IV と Exp. VI についてそれぞれつぎのような定数と条件を用いて行なった。(Table 参照)
 (i) Exp. IV—定数; $\alpha=0.917$, $\gamma_0=0.257$, $B_0=70\text{cm}$, $D=10\text{cm}$, $C=13$, $K_0=152\text{cm}^2/\text{sec}$, $q_{s0}=7.85 \times 10^{-2}\text{cm}^2/\text{sec}$,
 条件; $t=0$ で $\eta=1$, $b=1$, $i=1$, $x=0$ で $i=i_k=0.4$, $b=b_k=1$, $x=l=110\text{m}$ で $\eta=1$.

- (ii) Exp. VI—定数； $x=0\sim 58\text{ m}$ に対して $\gamma_0=0.270$, $C=14$, $K_0=141\text{ cm}^2/\text{sec}$, $q_{s0}=5.67\times 10^{-2}\text{ cm}^2/\text{sec}$, $x=62\sim 110\text{ m}$ に対して $\gamma_0=0.448$, $C=12$, $K_0=153\text{ cm}^2/\text{sec}$, $q_{s0}=9.09\times 10^{-2}\text{ cm}^2/\text{sec}$, $x=58\sim 62\text{ m}$ に対しては上、下流の平均値を用い、その他の定数は I_0 以外 (i) と同じである。条件； $x=60\text{ m}$ で上、下流の平均値を用いて接続させ、他は IV と同じである。

ただし、 i_k , b_k はそれぞれ平衡こう配 I_k , 平衡流路幅 B_k の無次元量であって、2 で述べた実験結果から $I_k=1/500$, $B_k=B_0$ と仮定した。また、差分 Δx , Δt は (31) 式の $\partial^2\eta/\partial x^2$ の係数の最大値が K_0 であることから差分計算の安定条件 $\Delta t/(\Delta x)^2 \leq 1/2K_0$ を満足するように $\Delta t=100\text{ sec}$, $\Delta x=200\text{ cm}$ とした。

(i), (ii) の計算結果と実験値とを比較すると Fig. 23 (a), (b) のようになる。(i), (ii) いずれの場合も計算は最初の時点では全長にわたって実験値にほぼ一致する。しかし、それ以降では、両者の差は大きくなり、i) の $B/B_0 \sim x$ の図にみられるように計算値に比して実験値の流下方向の拡幅が急激である。 $z/D \sim x$ の関係についてみると、(i) では計算は $x=80\sim 100\text{ m}$ の区間を除いて実験値とほぼ対応している。(ii) の場合は遷緩点における堆積傾向が計算値では上流部の河床低下の伝播によって次第に緩和されていくのに対して、実験値では長時間にわたって急激な堆積が継続しており、 $x=30\sim 80\text{ m}$ の区間で両者の差が大きくなっている。

4.4 本解析の問題点

計算値と実験値との間に以上のような差異を生じた原因としてつぎの諸点が挙げられる。

- 流路の断面形に対する長方形近似。
- (10) 式の流砂量式、(17) 式の側岸侵食量式および (13) 式の平均流速式の仮定。
- (12) 式に対する (30) 式の近似あるいは (11) 式の $L=0$ の近似。
- $d_m/d_{m0}=1$ あるいは $U_{*c}/U_{*c0}=1$ の仮定。
- 流路の蛇曲あるいは砂礫堆の影響。
- 境界条件の与え方。

これらのうち (a) については、2 で述べたように河床上昇時と河床低下時で断面形状は特徴的な変化を示すので、Fig. 3 の 5 断面、8 時点の測点値を用いて断面平均の水利諸量を計算し、長方形断面近似の場合との差異を検討した。Fig. 24 は平均摩擦速度について実測断面の値 U_* と長方形近似の値 U_{*A} とを比較したものであるが、両者の差は $\pm 7\%$ 以内にほぼ均一に分布している。その他の水利量についてもほぼ同様であって、(a) の近似が大きな影響を与えているとは考えられない。(b) の仮定で流砂量および側岸侵食量式の関数形および係数の妥当性についてはいまのところ明らかでないが、これらの式は (d), (e) によって大きく影響されるものと考えられる。また、平均流速式の係数については、通水時間中に砂漣が発生した Exp. III および各ケースの蛇曲部以外はほぼ一定した値を示している。(c) の近似については、(13) 式の各項のオーダーを実験値を用いて検討した結果、最終時点近くを除いて $L=0$ の近似はほぼなりたつと考えられた。この点についてはさらに厳密式の数値計算ならびに近似化の一般的考察によって検討する必要があるが、上の計算例についてはこの近似の影響は二次的なものと考えられる。また、(f) は主に (c)~(e) によって変わるので、結局 (d) と (e) の影響が大きいものと推察される。

(d) の仮定はとくに上流部において 2.2 で述べた砂粒の分級現象から考えて明らかに無理であって、上の計算例のように粗粒化後の平衡こう配の導入だけでは補正できない。また、Fig. 6 からわかるように、実際の

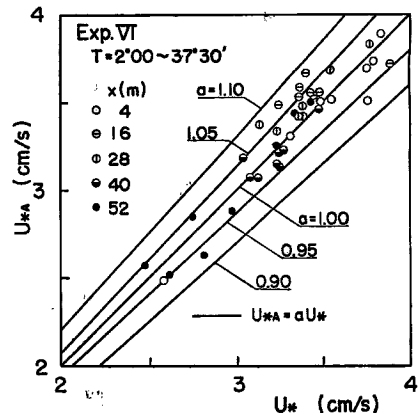


Fig. 24 Comparison of U_* with U_{*A} as rectangular cross-section.

拡幅と河床変動に対応させるためには代表粒径の基準を両者に対して変えるか、潤辺に沿って粒径別の流砂の連続関係を考える必要がある。後者の方法は現象に則しているが側岸付近の土砂の流送状態が明確でないで現状では難しく、当面、平均化した式を前提として前者の方法あるいは粒度構成を加味した等価断面の導入について検討したいと考えている。

(e)の問題は、中流および下流部において急激な拡幅と堆積を生ずる主要因をなしており、砂礫堆あるいは流路の蛇曲による摩擦速度の増加およびそれらの移動による作用時間の変化などを本解析に加味する必要がある。この問題に関連して、現在、側岸侵食性水路における砂礫堆の発生限界とその性状について若干の検討¹³⁾を行なっているが、その詳細は次報で述べるつもりである。

5. 結 言

以上、本文では、給砂のない状態で上流部に形成される静的な安定流路に注目して、その形成過程を流路形状および粒度分布の測定結果を用いて検討するとともに流路の安定形状について従来の静的平衡状態の関係式と比較した。その結果、流路の変動は水位の低下にともなって上流から下流へ、側岸から河床中央部に向って安定化し、流路の粒度構成は主に側岸侵食土砂の分級流送によって断面内で著しく変化することがわかった。また、流路の横断形状は Lane の理論から予測されるものより広幅かつ扁平であって、流路形状は河床こう配一定あるいは流路幅一定として導かれる等流状態平衡式の間隔的な値を示すことがわかった。一様砂を用いた従来の実験結果も本実験と同様な傾向を示し、このことから拡幅後に形成される流路の安定形状にはその形成過程が影響することを指摘した。

つぎに、流路の形成過程に関する考察として、流路の拡幅と河床変動に関する一次元解析を行ない、流下方向に拡幅量が一定の場合と変化する場合について計算値と実験値の比較を行なった。こうした流路変動の解析の際に問題となる側岸侵食条件式としては、侵食現象の観察結果から流れの作用を重視して側岸侵食量を掃流力の関数形で表示し、一様拡幅時の測定値からその定数を決定した。計算値と実験値との比較は初期河床こう配が一様な場合と二段に折れる場合について行なったが、その結果、計算値はいづれの場合も通水初期において実験値にほぼ一致し、時間の経過とともに適合しなくなることがわかった。その理由として多くの要因が考えられるが、これらの計算例ではとくに上流部における流砂の分級現象と中流、下流部における蛇曲流路の影響が支配的であることを指摘した。

このように本論文の範囲では流路変動の初期過程の解析にとどまり、安定形状の問題に帰着できなかったが、今後、上述の2つの問題点を究明するとともに、実河川との対応を考える場合に重要な流れの非定常性の影響について検討したいと考えている。

最後に、実験および計算に際して協力して頂いた京大大学院学生田中修市、藤田裕一郎の両君に謝意を表するとともに、図面の整理に御協力いただいた中村行雄技官に感謝する。

参 考 文 献

- 1) 芦田和男・村本嘉雄・奈良井修二・塩入淑史：河道の変動に関する研究(1)―流路の変動過程に関する実験―，京都大学防災研究所年報，第13号B，昭45.3，pp. 243-260.
- 2) 野田英明・木村晃：河口閉塞に関する研究(1)―洪水流によるフラッシュの効果―，京都大学防災研究所年報，第13号B，昭45.3，pp. 427-443.
- 3) Lane, E.W.: Design of Stable Channels, Trans. ASCE, Vol. 120, 1955, pp. 1234-1279.
- 4) 土屋義人：限界掃流力とその水工学上への適用に関する研究，京都大学学位論文，昭38.4，pp. 106-112.
- 5) Stebbings, J.: The Shapes of Self-formed Model Alluvial Channels, Proc. of ICE, Vol. 25, No. 6642, 1963, pp. 485-510.
- 6) Wolman, M.G. and L.M. Brush: Factors Controlling the Size and Shape of Stream Channels in

Coarse Noncohesive Sands, USGS, Prof. Paper 282-G, 1961.

- 7) Ackers, P.: Experiments on Small Stream in Alluvium, Proc. ASCE, Vol. 90, HY4, 1964, pp. 1-37.
- 8) 長谷川和義・工藤一磨・山岡勲：水路蛇曲に関する一実験，第23回土木学会年次学術講演会講演概要集，昭43.10.
- 9) 足立昭平，中藤達昭：沖積流路の拡幅に関する実験的考察，第24回土木学会年次学術講演会講演概要集，昭44.9.
- 10) 椿東一郎・平野宗夫・田中耕一：拡幅を伴う流路変動について，第15回水理講演会講演集，土木学会水理委員会，昭46.2, pp. 43-48.
- 11) 青野 尚：河川の蛇行に関する実験的研究，京都大学修士卒業論文，昭32.3.
- 12) 木下良作：石狩川河道変遷調査一参考編一，科学技術庁資源局資料，第36号，昭37.12, pp. 146-150.
- 13) 芦田和男・村本嘉雄・田中修市：側岸侵食性水路における砂礫堆の性状について，昭和46年度土木学会関西支部年次学術講演会講演概要集，昭46.5.