

$|\zeta(\frac{1}{2}+it, \chi)|$ の 4 乗平均について

名大 理 小林功武

Riemann zeta 関数の理論に於て, 漸近式

$$(1) \int_0^\infty |\zeta(\frac{1}{2}+it)|^4 e^{-\delta t} dt \sim \frac{1}{4\pi^2} \delta^{-1} \log^4 \delta^{-1} \quad (\delta \rightarrow 0)$$

を求める一つの美しい方法が知られていて, それは E.C. Titchmarsh の著書 *The theory of Riemann zeta function*, Oxford (1951) p.p. 142-147 に詳しく述べられている所である.

この方法は, $\zeta(\frac{1}{2}+it)^2$ の値に対する近似表現式を何ら要求しない点に, その特徴乃至興味が存すると云えよう. 用ゐるのは

(i) Mellin 変換に関する Plancherel の定理, (ii) $\zeta(s)$ の関数等式から容易に導かれる (E. Landau) 所の J. Wigert の近似関数等式, (iii) $\int_{2\pi}^\infty |\sum_{n \geq 1} d(n) e^{-nix} e^{-i\delta}|^2 dx$ の評価式等であるから方針としてはこの方法に全く従つて, Dirichlet L 関数等の絶対値の 4 乗平均に関する周知の結果 (の言い換え):

$$(2) \sum_{\chi \bmod q}^* \int_0^\infty |L(\frac{1}{2}+it, \chi)|^4 e^{-\delta t} dt \ll \varphi(q) (\sin \delta)^{-1} \log^4 q (\sin \delta)^{-1} \quad \left(\begin{array}{l} 0 < \delta \leq \pi/2, \\ q \geq 3 \end{array} \right)$$

が証明され得る筈である (1) の如く, 漸近式までは要求しないことにして). 吾々は, このような証明を試みて, 結局 (2) より $\log$ -factor が 1 つ分悪い結果である

$$(3) \sum_{\chi \bmod q}^* \int_0^{\infty} |L(\frac{1}{2}+it, \chi)|^4 e^{-2\delta t} dt \ll \varphi(q) (\sin \delta)^{-1} \log^5 q (\sin \delta)^{-1} \quad \left(\begin{array}{l} 0 < \delta \leq \pi/2, \\ q \geq 3 \end{array} \right)$$

の極めて簡明な証明を得たので, その概略を述べてみたい.

以下, $q \geq 3$ なる整数 q , $0 < \delta \leq \pi/2$ なる δ を固定し, 次, 記号を用る: $\lambda := 2\pi/q$; χ : q を法とする原始指標; $\tau(\chi) := \sum_{a=1}^q \chi(a) e^{2\pi i a/q}$, Gauss の和; $\varepsilon_\chi := \tau(\chi)^2 q^{-1}$, 従って, $|\varepsilon_\chi| = 1$; $z := x e^{i(\frac{\pi}{2} - \delta)}$ ($x > 0$); $\phi(z, \chi) := \sum_{n \geq 1} \chi(n) d(n) e^{-nz}$.

さて, (i) に対応する部分には何ら問題は無く, 容易に次式が得られる:

$$(4) \sum_{\chi \bmod q}^* \int_0^{\infty} |L(\frac{1}{2}+it, \chi)|^4 e^{-2\delta t} dt = \sum_{\chi \bmod q}^* \int_0^{\infty} |\phi(z, \chi)|^2 dx + O\left(\sum_{\chi \bmod q}^* \int_0^{\infty} |\phi(x, \chi)|^2 dx\right)$$

次に, (ii) に対応する部分は, “近以関数等式”ではなく, “正確な”関数等式を作らねばならない. 即ち,

$$(5) \quad E(w) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{\pi \Gamma(s)}{\sin \pi s} w^{-s} ds \quad \left(|\arg w| < \frac{3\pi}{2} \right),$$

$$V(w, \chi) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{n \geq 1} \chi(n) d(n) E(nw)$$

と定義すれば, “正確な”関数等式:

$$(6) \quad \varepsilon_\chi(\lambda/z) \phi(\lambda^2/z, \bar{\chi}) = -i \phi(z, \chi) + \frac{\chi(-1)}{\pi} V(z, \chi) + \frac{1}{\pi} V(z e^{-i\pi}, \chi)$$

が成り立つことが $\zeta(s, \chi)$ の関数等式から容易に証明されるので、これを用いることになる。

変数変換 $x \rightarrow \lambda^2/x$ から直ちに得る関係式：

$$\int_0^\lambda |\phi(z, x)|^2 dx = \int_\lambda^\infty \left| \varepsilon_x \frac{\lambda}{z} \phi\left(\frac{\lambda^2}{z}, \bar{x}\right) \right|^2 dx$$

に注意すると、(4), (6) に換り、吾々の結果 (3) は、若し

$$(7) \quad \sum_{\chi \bmod q}^* \int_\lambda^\infty |\phi(z, x)|^2 dx \ll \varphi(q) (\sin \delta)^{-1} \log^4 q (\sin \delta)^{-1} \quad (0 < \delta \leq \pi/2),$$

$$(8) \quad \sum_{\chi \bmod q}^* \int_\lambda^\infty |V(w, x)|^2 |dw| \ll q \log^5 q \quad \left(\begin{array}{l} \arg w = \text{const.}, \\ -\pi \leq \arg w < \pi/2 \end{array} \right)$$

が示されるならば、明らかなこととなるし、(8) の右辺の因子 $\log^5 q$ を $\log^4 q$ で置き換えることができれば（事実としては、(8) の左辺は確かに $\ll q \log^4 q$ なのだが）、(2) も証明されたことになる。

(iii) に対応するものが、即ち (7) であって、 ξ 関数の場合のように、単純に項別積分して後に和を評価するという手法が使えず、最も工夫を要する処である。先ず、

$$(9) \quad \sum_{\chi \bmod q}^* |\phi(z, x)|^2 \leq \frac{\varphi(q)}{q} \sum_{\substack{a=1 \\ (a, q)=1}}^q \left| \sum_{n \geq 1} d(n) e^{-nz - 2\pi i n \frac{a}{q}} \right|^2$$

であり、 $\{a/q; 1 \leq a \leq q, (a, q)=1\}$ の各点は $\bmod 1$ で少くとも $\frac{1}{q}$ 互に距っていることに注意しよう。然らば、次の一般の補

題が証明されれば十分である:

補題 $\{a_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{C}$, $a_n = O_\varepsilon(e^{\varepsilon n})$ for any $\varepsilon > 0$; $\{y_n\}_{n=1}^R \subset \mathbb{R}$,
或る $\Delta \in (0, 1]$ が存在して, $n \neq s$ ならば $\|y_n - y_s\| \geq \Delta$ とする.

(但, $\|y\| = \text{Min.} \{|y - m|; m \in \mathbb{Z}\}$). $\delta \in (0, \pi/2]$ とし, $z = \chi e^{i(\frac{\pi}{2} - \delta)}$
と置くとき,

$$(10) \quad \sum_{n=1}^R \int_{2\pi\Delta}^{\infty} \left| \sum_{n \geq 1} a_n e^{-nz - 2\pi i n y_n} \right|^2 dx \ll (\Delta \sin \delta)^{-1} \sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|^2}{n} e^{-2\pi n \Delta \sin \delta}$$

実際, $a_n = d(n)$, $\{y_n\}_{n=1}^R = \{\frac{a}{q}; 1 \leq a \leq q, (a, q) = 1\}$, $\Delta = \frac{1}{q}$ の場合
に, $\sum_{n \geq 1} d(n) n^{-1} e^{-n/N} \ll \log^2 N$ ($N \geq 2$) を用いて, (10), (9) より (7) が従う.

(8) も亦, $q \wedge q$ 依存を問題とする吾々の立場からは, 解かねばならぬ新しい課題であるが, それは比較的簡単である: 積分表示 (5) に於ける積分路を $(\frac{5}{2} \pm i\infty)$ 或は $(-\frac{1}{2} \pm i\infty)$ に遷すことにより明らかなるように, $-\pi \leq \arg w < \pi/2$ であるならば, $\arg w$ につき十分すぎるくらい一様に,

$$(11) \quad E(w) = 1/w + O(1/|w|^2),$$

及び ($\arg w = \text{const.}$)

(12) $\int_0^\infty |E(w)|^2 d|w| < \infty$, (13) $\int_x^\infty |E(w)|^2 d|w| < x^{-1}$ ($x \geq 1$)
が成り立つから, 単に $|\sum_{m \leq N} \chi(m)| \leq q$ から従う評価:

✕

$\sum_{n>N} \chi(n) d(n) n^{-1} \ll q N^{-1/2} + q^2 N^{-1}$ 及び $d(n) \ll n^{1/2}$ を用いる
 ことで, $V(w, \chi) = \sum_{n \leq q^3} \chi(n) d(n) E(nw) + O(q^{-1/2} |w|^{-1})$ を得て,

$$\sum_{\chi \bmod q}^* \int_{\lambda}^{\infty} |V(w, \chi)|^2 d|w| \ll \sum_{\chi \bmod q}^* \int_{\lambda}^{\infty} \left| \sum_{n \leq q^3} \chi(n) d(n) E(nw) \right|^2 d|w| + O(q);$$

$V(w, \chi)$ を有限部分和で切るべく (11) を須いた為、"Dirichlet 級数" $\sum_{n>N} \chi(n) d(n) n^{-1}$ が現われて来てしまったが、これは已むを得ない。(吾々の建前としては、Dirichlet 級数は、成る可く使いたくないのである!) とにかく、茲で、不等式

$$\left| \sum_{n \leq q^3} \chi(n) d(n) E(nw) \right|^2 \ll \log q \cdot \left\{ \left| \sum_{n \leq q} \chi(n) d(n) E(nw) \right|^2 + \sum_{j \geq 0} \left| \sum_{\substack{n \leq \min\{2^{j+1}q, q^3\} \\ n > 2^j q}} \chi(n) d(n) E(nw) \right|^2 \right\}$$

と、自明な一般公式: $\sum_{\chi \bmod q}^* \left| \sum_{N < n \leq N'} \chi(n) c_n \right|^2 \ll \varphi(q) \left(1 + \frac{N'-N}{q}\right) \sum_{N < n \leq N'} |c_n|^2$, 並びに (12), (13) を使って

$$\begin{aligned} \sum_{\chi \bmod q}^* \int_{\lambda}^{\infty} |V(w, \chi)|^2 d|w| &\ll \varphi(q) \log q \cdot \left\{ \sum_{n \leq q} d(n)^2 \int_0^{\infty} |E(nw)|^2 d|w| + \sum_{j \geq 0} \sum_{2^j q}^{\min\{2^{j+1}q, q^3\}} d(n)^2 \int_{\lambda}^{\infty} |E(nw)|^2 d|w| \right\} \\ &\ll \varphi(q) \log q \cdot \left\{ \sum_{n \leq q} \frac{d(n)^2}{n} + \sum_{j \geq 0} \sum_{2^j q}^{\min\{2^{j+1}q, q^3\}} \frac{d(n)^2}{n} \frac{1}{n\lambda} \right\} \ll \varphi(q) \log q \sum_{n \leq q^3} \frac{d(n)^2}{n} \ll \varphi(q) \log^5 q, \end{aligned}$$

即ち, (8) がこのように極めて単純素朴に出たのであるが, $\log^5 q$ の log-factor を一つ落とそうとすると, この素朴性は喪われて了いそうである。

結局, 要点は吾々の補題に帰する; $d \rightarrow 0$ とした時, (2) の左

辺の変動を統制するのは、専ら (7) 式だからである。講演では、吾々の補題の本質的部分である δ が微小の場合の証明を述べたのであるが、(10) は、中級数形 (Abel sum 型) の large sieve 不等式との精緻な比較研究を要求するものであり (その研究は未完なので)、ここでは、少々技巧的に映るかも知れないその証明は叙べないことにしたい。

(2) と同値な

$$\sum_{x \bmod q}^* \int_{-T}^T |L(\frac{1}{2} + it, \chi)|^4 dt \ll \varphi(q) \log^4 q T \quad (T \geq 2)$$

を導くに、 $L(s, \chi)^2$ に対する“近似関数等式” (Huxley, Lavrik) を用いる方法は、A. E. Ingham の系統に属すると云えようが、その意味で、吾々の証明は Titchmarsh の方法の系統に属す；これで、 ζ 関数につき知られていた従来の方法の L -関数の場合への適用が全て出揃った訳である。