

LUSIN の定理と多重 EGOROFF 性

信州大学・工学部 河邊 淳* (Jun Kawabe)
長谷部 有哉 (Yuya Hasebe)
Faculty of Engineering, Shinshu University

概要. Riesz 空間に新たな滑らかさの概念 (多重 Egoroff 性) を導入することにより, 距離空間上の弱零加法的な Riesz 空間値 Borel ファジィ測度は正則となる. また, このような Riesz 空間値 Borel ファジィ測度に対して Lusin の定理が成立する.

1. 序論

位相空間上の測度の正則性は, 位相空間論と測度論の架け橋となる重要な概念であり, 一般の Borel 集合に対する測度を, より取り扱いやすい閉集合やコンパクト集合における測度で近似することを可能とする. この事実の応用は多岐に亘り, 例えば Borel 可測関数が連続関数列で近似できることを主張する Lusin の定理は, 測度の正則性の助けを借りて証明される.

非加法的実数値測度の研究の急速な進展のなかで, Li-Yasuda [9] は距離空間上の任意の弱零加法的な Borel ファジィ測度は正則で, その結果として Lusin の定理がそのような非加法的測度に対して成立することを示した.

一般に, Riesz 空間値測度論を展開する際には, 通常の測度論で有効な “ ε -論法” が機能しないことが最大の障害となる. この講演では, Luxemburg により導入された Egoroff 性にヒントを得て, それを多重化した多重 Egoroff 性という Riesz 空間の “滑らかさ” の概念を新たに導入することにより, Li-Yasuda の結果が Riesz 空間値 Borel ファジィ測度に対しても成立することを報告する.

この論文は既に公表された論文 [6] の要約であり, 証明などは原論文を参照していただきたい.

2. 多重 EGOROFF 性

この章では Riesz 空間の滑らかさの新概念として多重 Egoroff 性を導入するとともに, その他の滑らかさの概念との相互関係についてまとめる. また, Riesz 空間値非

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 28B15; Secondary 28C15, 28E10, 46A40.

Key words and phrases. non-additive measure, Riesz space, multiple Egoroff property, fuzzy measure, regularity of non-additive measures, Lusin's theorem.

*Research supported by Grant-in-Aid for General Scientific Research No. 18540166, Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology, Japan.

加法的測度に関する基本的な用語を復習する。以下では、自然数全体を $\mathbb{N}$ 、実数全体を $\mathbb{R}$ で表す。また、 V は Riesz 空間とする。Riesz 空間論に関する標準的な用語や結果については [12] を見よ。

定義 1. $u \in V^+$ とする。各 $m \in \mathbb{N}$ に対して、 $u^{(m)} := \{u_{n_1, \dots, n_m}\}_{(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m}$ は V の要素からなる多重列とする。

- (1) 多重列の列 $\{u^{(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ は、各 $m \in \mathbb{N}$ と各 $(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ に対して
 - (i) $0 \leq u_{n_1} \leq u_{n_1, n_2} \leq \dots \leq u_{n_1, \dots, n_m} \leq u$
 - (ii) $n \rightarrow \infty$ とすると、 $u_n \downarrow 0, u_{n_1, n} \downarrow u_{n_1}, \dots, u_{n_1, \dots, n_m, n} \downarrow u_{n_1, \dots, n_m}$ を満たすとき **u -multiple regulator in V** という。
- (2) u -multiple regulator $\{u^{(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ は、各 $m \in \mathbb{N}$ と各 $(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$, $(n'_1, \dots, n'_m) \in \mathbb{N}^m$ に対して、 $n_i \leq n'_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) ならば $u_{n_1, \dots, n_m} \geq u_{n'_1, \dots, n'_m}$ が成り立つとき **strict** という。

以下では、 $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像全体を Θ で表す。 Θ は各点毎の順序、すなわち、 $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ に対して、 $\theta_1(i) \leq \theta_2(i)$ ($\forall i \in \mathbb{N}$) で定まる順序関係 $\theta_1 \leq \theta_2$ に関して、上に有向な半順序集合となる。

定義 2. 各 $m \in \mathbb{N}$ に対して、 $u^{(m)} := \{u_{n_1, \dots, n_m}\}_{(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m}$ は V の要素からなる多重列とする。

- (1) 各 $u \in V^+$ と各 strict u -multiple regulator $\{u^{(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ in V に対して
 - (i) 各 $\theta \in \Theta$ に対して、上限 $u_\theta := \sup_{m \in \mathbb{N}} u_{\theta(1), \dots, \theta(m)}$ が存在
 - (ii) 点列 $\{\theta_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Theta$ が存在して、 $u_{\theta_k} \rightarrow 0$ が成り立つとき、 V は **多重 Egoroff 性** (multiple Egoroff property) をもつという。
- (2) 各 $u \in V^+$ と各 u -multiple regulator $\{u^{(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ in V に対して
 - (i) 各 $\theta \in \Theta$ に対して、上限 $u_\theta := \sup_{m \in \mathbb{N}} u_{\theta(1), \dots, \theta(m)}$ が存在
 - (ii) $\inf_{\theta \in \Theta} u_\theta = 0$
 が成り立つとき、 V は **漸近的 Egoroff 性** (asymptotic Egoroff property) をもつという。
- (3) 各 $u \in V^+$ と各 strict u -multiple regulator $\{u^{(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ in V に対して
 - (i) 各 $\theta \in \Theta$ に対して、上限 $u_\theta := \sup_{m \in \mathbb{N}} u_{\theta(1), \dots, \theta(m)}$ が存在
 - (ii) $\inf_{\theta \in \Theta} u_\theta = 0$
 が成り立つとき、 V は **弱漸近的 Egoroff 性** (weakly asymptotic Egoroff property) をもつという。

注意 1. (1) V が Dedekind σ -完備の場合は、定義 2 の条件 (i) は自動的に満たされる。

(2) u -multiple regulator $\{u^{(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ が strict で、各 $\theta \in \Theta$ に対して、上限 $u_\theta := \sup_{m \in \mathbb{N}} u_{\theta(1), \dots, \theta(m)}$ が存在すれば、有向族 $\{u_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ は単調減少となる。

(3) V は多重 Egoroff 性をもつとする。このとき、定義 2 の (1)-(ii) に現れる点列 $\{\theta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ は単調増加となるように選べる。

(4) 明らかに漸近的 Egoroff 性から弱漸近的 Egoroff 性が導ける。漸近的 Egoroff 性の概念は、Riesz 空間値ファジィ測度に対しても Egoroff の定理が成立することを示すために [4, Definition 5] ですでに導入されている。

多重 Egoroff 性と (弱) 漸近的 Egoroff 性は、Luxemburg-Zaanen [12, Chapter 10] でその性質が詳細に議論された Egoroff 性の概念を多重化したものである。

定義 3. (1) $u \in V^+$ とする。 V の要素からなる 2 重列 $\{u_{m,n}\}_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ は

- (i) 各 $m, n \in \mathbb{N}$ に対して $0 \leq u_{m,n} \leq u$
- (ii) 各 $m \in \mathbb{N}$ に対して、 $u_{m,n} \downarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$

を満たすとき **u -regulator** in V という。

(2) 各 $u \in V^+$ と各 u -regulator $\{u_{m,n}\}_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ in V に対して、単調減少列 $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset V$ with $v_k \downarrow 0$ が存在して、各 $(k, m) \in \mathbb{N}^2$ に対して、適当な $n(k, m) \in \mathbb{N}$ を選べば $u_{m,n(k,m)} \leq v_k$ となるとき、 V は **Egoroff 性** (Egoroff property) をもつという。

多重 Egoroff 性の術語は、次の結果にちなんで名付けた。

命題 1. 多重 Egoroff 性をもつ Riesz 空間は Egoroff 性をもつ。

命題 2. 多重 Egoroff 性をもつ Riesz 空間は弱漸近的 Egoroff 性をもつ。順序可分な Riesz 空間に対しては、多重 Egoroff 性と弱漸近的 Egoroff 性は一致する。

多くの重要な Riesz 空間は多重 Egoroff 性をもつ。 $(T, \mathcal{T}, \nu)$ は σ -有限な測度空間、 $0 < p < \infty$ とする。 T 上の ν -可測な実数値関数の ν -a.e. での同値類の全体からなる Riesz 空間を $\mathcal{L}_0(\nu)$ で表す。また、 p 乗可積分な $f \in \mathcal{L}_0(\nu)$ の全体からなる順序イデアルを $\mathcal{L}_p(\nu)$ で、 ν -本質的有界な $f \in \mathcal{L}_0(\nu)$ 全体からなる順序イデアルを $\mathcal{L}_\infty(\nu)$ で表す。

命題 3. 以下の Riesz 空間は多重 Egoroff 性をもつ。

- (i) 多重 Egoroff 性をもつ Riesz 空間の任意の順序イデアル。
- (ii) 順序連続ノルムをもつ Banach 束。
- (iii) 各項毎の順序をもつ実数列全体からなる super Dedekind 完備 Riesz 空間 s とその順序イデアル ℓ_p ($0 < p \leq \infty$)。
- (iv) Super Dedekind 完備 Riesz 空間 $\mathcal{L}_0(\nu)$ と $\mathcal{L}_p(\nu)$ ($0 < p \leq \infty$)。

弱漸近的 Egoroff 性の概念は, Riesz 空間値ファジィ測度に対しても Egoroff の定理が成立することを示すために導入された [4, Theorem 2]. 実数値非加法的測度に対する Egoroff の定理の成立性については [7, 8, 10, 11, 13, 14, 18] を見よ.

以下この論文を通じて, $(X, \mathcal{F})$ は可測空間, すなわち, $\mathcal{F}$ は空でない集合 X の部分集合からなる σ -集合体とする.

定義 4. 集合関数 $\mu: \mathcal{F} \rightarrow V$ は

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii) $A, B \in \mathcal{F}$ で $A \subset B$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$ (単調増加性)

を満たすとき, 非加法的測度 (non-additive measure) という.

定義 5. 集合関数 $\mu: \mathcal{F} \rightarrow V$ は非加法的測度とする.

- (1) 集合列 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ と $A \in \mathcal{F}$ が $A_n \downarrow A$ を満たせば $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$ となるとき, μ は上から連続 (continuous from above) という.
- (2) 集合列 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ と $A \in \mathcal{F}$ が $A_n \uparrow A$ を満たせば $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$ となるとき, μ は下から連続 (continuous from below) という.
- (3) 上から及び下から連続なとき, μ はファジィ測度 (fuzzy measure) という.
- (4) 集合 $A, B \in \mathcal{F}$ が $\mu(A) = \mu(B) = 0$ を満たせば $\mu(A \cup B) = 0$ となるとき, μ は弱零加法的 (weakly null-additive) という.

実数値非加法的測度についてのより詳細な情報に関しては [2, 14, 18] を見よ. Riesz 空間値非加法的測度に関しては [1, 3] で幾つかの興味ある結果が得られている.

定義 6. 集合関数 $\mu: \mathcal{F} \rightarrow V$ は非加法的測度で, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は X 上の $\mathcal{F}$ -可測な実数値関数列, f もそのような関数とする.

- (1) 集合 $E \in \mathcal{F}$ with $\mu(E) = 0$ が存在して, 任意の $x \in X - E$ に対して $f_n(x) \rightarrow f(x)$ が成り立つとき, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は f に μ -概収束するという.
- (2) 単調減少な有向集合族 $\{E_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma} \subset \mathcal{F}$ with $\mu(E_\alpha) \downarrow 0$ が存在して, 各 $X - E_\alpha$ 上で f_n が f に一様収束するとき, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は f に μ -概一様収束するという.

次の結果は Riesz 空間値非加法的測度への Egoroff の定理の拡張であり, 第 4 章で Lusin の定理を拡張する際に用いられる.

定理 1 ([4, Theorem 2]). 集合関数 $\mu: \mathcal{F} \rightarrow V$ はファジィ測度とする. V は弱漸近的 Egoroff 性をもつと仮定する. このとき, Egoroff の定理が μ に対して成り立つ, すなわち, X 上の $\mathcal{F}$ -可測な実数値関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が X 上の $\mathcal{F}$ -可測な実数値関数 f に μ -概収束すれば, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は f に μ -概一様収束する.

注意 2. 定理 1 は実際には漸近的 Egoroff 性をもつ Riesz 空間の場合に証明されている [4]. しかし, その証明を検討すれば, 弱漸近的 Egoroff 性をもつ場合でも定理が成立することがわかる.

3. RIESZ 空間値非加法的測度の正則性

距離空間上の任意の可算加法的有限測度は正則となることはよく知られている [15, Theorem 1.2]. 最近になって Li-Yasuda [9] は, この性質が弱零加法的なファジィ測度に対しても成立することを示した. この章では, Riesz 空間に多重 Egoroff 性を仮定することにより, Li-Yasuda の結果が弱零加法的な Riesz 空間値ファジィ測度に対しても成立することを報告する. まず, 証明の鍵となる補題 [9, Lemma 1] の Riesz 空間版を与えることから議論を始める.

補題 1. 集合関数 $\mu: \mathcal{F} \rightarrow V$ はファジィ測度とする. V は多重 Egoroff 性をもつと仮定する. このとき, 次の条件は同値:

- (i) μ は弱零加法的.
- (ii) 任意の 2 重集合列 $\{A_{m,n}\}_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \subset \mathcal{F}$ が, 各 $m \in \mathbb{N}$ に対して $A_{m,n} \downarrow D_m$ as $n \rightarrow \infty$ かつ $\mu(D_m) = 0$ という性質をもてば, 写像列 $\{\theta_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Theta$ が存在して

$$\mu \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_{m, \theta_k(m)} \right) \rightarrow 0 \quad \text{as } k \rightarrow \infty$$

が成り立つ.

このとき, 写像列 $\{\theta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ は単調増加となるように選べる.

S は Hausdorff 空間, $\mathcal{B}(S)$ は S の Borel 集合全体からなる σ -集合体, すなわち, S のすべての開集合から生成される σ -集合体とする. $\mathcal{B}(S)$ 上で定義された非加法的測度を S 上の Borel 非加法的測度とよぶ.

定義 7. μ は S 上の V -値 Borel 非加法的測度とする. 各 $A \in \mathcal{B}(S)$ に対して, 閉集合列 $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と開集合列 $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が存在して, $F_n \subset A \subset G_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) かつ $\mu(G_n - F_n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ を満たすとき, μ は正則 (regular) という.

注意 3. 定義 7 において, 閉集合列 $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は単調増加, 開集合列 $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は単調減少となるように選べる.

定理 2. S は距離空間とする. V は多重 Egoroff 性をもつと仮定する. このとき, 任意の弱零加法的な S 上の V -値 Borel ファジィ測度は正則である.

注意 4. 定理 2 は S が完全 Hausdorff 空間, すなわち, S の任意の開集合が G_δ -集合となる場合も成り立つ. 例えば, 正則な Suslin 空間は完全 Hausdorff 空間である [16, Propositions 1 and 3 in Chapter II, Part I].

4. LUSIN の定理

非加法的測度に対する Lusin の定理は [9, Theorem 4] で初めて与えられた. この章では, Lusin の定理の Riesz 空間値非加法的測度への拡張を考える. まず, Egoroff の定理のひとつの有用な変形を与える.

補題 2. 集合関数 $\mu: \mathcal{F} \rightarrow V$ はファジィ測度とする. V は順序可分とする. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $\mathcal{F}$ -可測な X 上の実数値関数列, f もそのような関数とする. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は f に μ -概一様収束すると仮定する. このとき, 単調増加な集合列 $\{X_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ が存在して, $\mu(X - \bigcup_{m=1}^{\infty} X_m) = 0$ を満たし, 各 X_m 上で f_n は f に一様収束する.

命題 4 (Egoroff の定理の変形). S は距離空間とする. μ は弱零加法的な S 上の V -値 Borel ファジィ測度とする. V は順序可分で多重 Egoroff 性をもつと仮定する. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は, S 上の Borel 可測な実数値関数列で, f もそのような関数とする. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は f に μ -概収束すると仮定する. このとき, 単調増加な閉集合列 $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ が存在して, $\mu(S - F_k) \downarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$ を満たし, 各 F_k 上で f_n は f に一様収束する.

注意 5. 命題 4 は S が Hausdorff 空間, μ が弱零加法的で正則な S 上の V -値 Borel ファジィ測度であれば成り立つ.

命題 4 を用いて Riesz 空間値 Borel ファジィ測度に対する Lusin の定理が得られる.

定理 3 (Lusin の定理). S は距離空間とする. μ は弱零加法的な S 上の V -値 Borel ファジィ測度とする. V は順序可分で多重 Egoroff 性をもつと仮定する. f は S 上の Borel 可測な実数値関数とする. このとき, 単調増加な閉集合列 $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ が存在して, $\mu(S - F_k) \downarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$ を満たし, 各 F_k 上で f は連続となる.

注意 6. 定理 3 は S が正規空間, μ が弱零加法的で正則な S 上の V -値 Borel ファジィ測度であれば成り立つ.

参考文献

- [1] A. Boccuto, A.R. Sambucini, The monotone integral with respect to Riesz space-valued capacities, *Rend. Mat. Appl.* (7) 16 (1996) 491–524.
- [2] D. Denneberg, *Non-Additive Measure and Integral*, second ed., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
- [3] M. Duchoň, J. Haluška, B. Riečan, On the Choquet integral for Riesz space valued measure, *Tatra Mt. Math. Publ.* 19 (2000) 75–89.
- [4] J. Kawabe, The Egoroff theorem for non-additive measures in Riesz spaces, *Fuzzy Sets and Systems* 157 (2006) 2762–2770.
- [5] J. Kawabe, The Egoroff property and the Egoroff theorem in Riesz space-valued non-additive measure theory, *Fuzzy Sets and Systems* 158 (2007) 50–57.

- [6] J. Kawabe, Regularity and Lusin's theorem for Riesz space-valued fuzzy measures, *Fuzzy Sets and Systems* 158 (2007) 895–903.
- [7] J. Li, On Egoroff's theorems on fuzzy measure spaces, *Fuzzy Sets and Systems* 135 (2003) 367–375.
- [8] J. Li, A further investigation for Egoroff's theorem with respect to monotone set functions, *Kybernetika* 39 (2003) 753–760.
- [9] J. Li, M. Yasuda, Lusin's theorem on fuzzy measure spaces, *Fuzzy Sets and Systems* 146 (2004) 121–133.
- [10] J. Li, M. Yasuda, Egoroff's theorem on monotone non-additive measure spaces, *Int. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 12 (2004) 61–68.
- [11] J. Li, M. Yasuda, On Egoroff's theorems on finite monotone non-additive measure space, *Fuzzy Sets and Systems* 153 (2005) 71–78.
- [12] W.A.J. Luxemburg, A.C. Zaanen, *Riesz Spaces I*, North-Holland, Amsterdam, 1971.
- [13] T. Murofushi, K. Uchino, S. Asahina, Conditions for Egoroff's theorem in non-additive measure theory, *Fuzzy Sets and Systems* 146 (2004) 135–146.
- [14] E. Pap, *Null-Additive Set Functions*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [15] K.R. Parthasarathy, *Probability Measures on Metric Spaces*, Academic Press, New York, 1967.
- [16] L. Schwartz, *Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures*, Oxford University Press, 1973.
- [17] B.Z. Vulikh, *Introduction to the Theory of Partially Ordered Spaces*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1967.
- [18] Z. Wang, G.J. Klir, *Fuzzy Measure Theory*, Plenum Press, New York, 1992.
- [19] A.C. Zaanen, *Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces*, Springer, Berlin, 1997.