

経路の存在性を考慮したファジィ最短経路問題

大阪大学大学院工学研究科 伊藤 健 (Takeshi Itoh)

大阪大学大学院工学研究科 石井 博昭 (Hiroaki Ishii)

1 はじめに

最短経路問題において、ネットワーク内で定義される距離は定数である。しかし、現実には都市間を移動する進行速度や所要時間が時刻、日付、天候等により影響を受けるため、そのようなことは実社会において極めて稀なことであり、ネットワーク中の各アークに対してファジィな距離を与えることが妥当であると考えられる。また、距離的に最短な経路を選択しても、その経路上のアークが確実に存在するとも限らない。つまり、アークの存在可能性も併せて考慮する必要がある、このような要因は経路を通過する際の安全性、危険性、コスト等とも解釈できる。

本研究においては、ネットワーク中の各アークに対して、ファジィ理論で扱う L - R ファジィ数をその距離とし、その存在可能性も与えておく。定式化については、「経路の距離がある値以下となる」ようなファジィ目標を導入し、その可能性測度と経路の存在可能性との両面から 2 目的問題として最適化を試みる。

2 定式化

対象とするネットワークを有向グラフ $G(N, A)$ で表し、 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ はノード集合、 A はアーク集合で a_{ij} ($i, j \in N, i \neq j$) なるノード i, j を結ぶアークにより構成されるものとする。ただし、ノード $1, n$ をそれぞれ始点、終点とし、各アーク a_{ij} には距離 $\tilde{D}_{ij}$ が設定されており、これらは次のようなメンバシップ関数により制限される正の L - R ファジィ数として定義する。

$$\mu_{\tilde{D}_{ij}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m_{ij} - x}{\alpha_{ij}}\right) & (x \leq m_{ij}, \alpha_{ij} > 0) \\ R\left(\frac{x - m_{ij}}{\beta_{ij}}\right) & (x \geq m_{ij}, \beta_{ij} > 0) \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 L は $L(0) = 1$; $L: [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ なる減少関数とし、 R も同様の関数とする。したがって、 $\tilde{D}_{ij}$ のメンバシップ関数は m_{ij} において頂点をとる単峰型となる。また、 $\tilde{D}_{ij}$ を $\tilde{D}_{ij} = (m_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij})_{LR}$ で表現すれば、 $\tilde{D}_{ij}$ と $\tilde{D}_{jk} = (m_{jk}, \alpha_{jk}, \beta_{jk})_{LR}$ の拡張和 $\tilde{D}_{ij} \oplus \tilde{D}_{jk}$ は

$$\tilde{D}_{ij} \oplus \tilde{D}_{jk} = (m_{ij} + m_{jk}, \alpha_{ij} + \alpha_{jk}, \beta_{ij} + \beta_{jk})_{LR}$$

となる [2]。

さらに、各アークには存在可能性に対応する定数 $u_{ij} \in [0, 1]$ が与えられているものとする。

本定式化の最適化基準の 1 つは、始点から終点までのすべての経路のうち、その距離がある値 B 以下となる可能性がより大きいものを選択することである。そのために、次のようなファジィ目標 G を設定する。

G : 「経路の距離はだいたい B 以下である。」

これに応じて、 G のメンバシップ関数を

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < B) \\ \frac{C-x}{C-B} & (B \leq x \leq C) \\ 0 & (x > C) \end{cases} \quad (2)$$

として与える。ここで、経路の距離は、その経路を構成するアークの距離によって決定されるものとし、ファジィ距離の拡張和として定義する。

2 つ目の最適化基準は経路の存在可能性がより大きなものを選択することであるが、本研究においては経路を構成する各アーク間での最小存在可能性を、その経路の存在可能性とする。

このとき、ノード 1 からノード i への全ての経路により構成される集合を P_i 、その要素 p (すなわち、ある経路で、これもまた一連のアーク集合である: $p \subset A$) に対する距離を $\tilde{D}(p)$ とし、次のような 2 目的問題 **BFSP** を考える。

$$\text{BFSP: 目的関数} \quad \Pi_{\tilde{D}(p)}(G) \rightarrow \text{最大化} \quad (3)$$

$$\min_{\{i,j|a_{ij} \in p\}} u_{ij} \rightarrow \text{最大化} \quad (4)$$

$$\text{制約条件} \quad p \in P_n \quad (5)$$

ここで、 $\Pi_{\tilde{D}(p)}(G)$ はファジィ目標 G に対する可能性測度であり、

$$\Pi_{\tilde{D}(p)}(G) = \sup_x \min\{\mu_{\tilde{D}(p)}(x), \mu_G(x)\}$$

と定義される。 $\tilde{D}(p)$ のメンバシップ関数が単峰型であるので、 $\Pi_{\tilde{D}(p)}(G)$ は図 1 のように解釈できる。

3 解 法

u_{ij} をソートし、

$$u^1 > u^2 > \dots > u^r \quad (r: \text{異なる } u_{ij} \text{ の数})$$

とする。 A の部分集合として

$$A^l = \{a_{ij} | u_{ij} \geq u^l\} \quad (l = 1, 2, \dots, r)$$

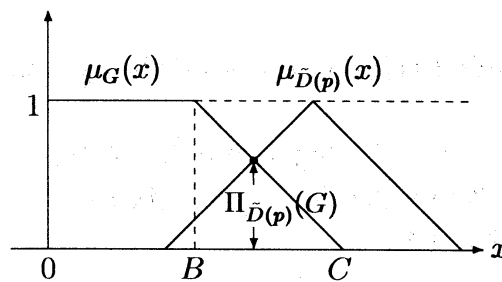


図 1: ファジィ目標 G に対する可能性測度

を考え、グラフ $G(N, A)$ の部分グラフ $G^l(N, A^l)$ を生成する。グラフ G^l の始点終点間の経路集合を P_n^l とし、補助問題

$$\text{FSPP}(l): \text{目的関数} \quad \Pi_{\bar{D}(p)}(G) \rightarrow \text{最大化} \quad (6)$$

$$\text{制約条件} \quad p \in P_n^l \quad (7)$$

を導入する。

3.1 FSPP(l) の解法

アークに設定されている距離は正の L - R ファジィ数であるから、非負である。したがって、ある経路にアークを追加すると、拡張和に対応する L - R ファジィ数のメンバシップ関数は加算前の各々のそれと比べて、平均と左頂点（型関数 L に対応する部分の x 軸との交点）が必ず大きくなる。ゆえに、 $\mu_G(x)$ との交点に対応する可能性測度は減少、あるいは変化しないかのどちらかとなるので（図 2 参照）、次の定理 3.1 が成り立つ。

定理 3.1 メンバシップ関数が非増加関数として表されるファジィ目標（事象） G について、

$$\Pi_{\bar{D}(p)}(G) \geq \Pi_{\bar{D}(p) \oplus \bar{D}_{ij}}(G) \quad (p \in P_i) \quad (8)$$

である。ただし、 j は点 i に隣接する点を示す。

定理 3.1 は、経路の関係からは次のように解釈することができる。

系 3.2 ある経路のファジィ目標 G に対する可能性測度は、そのいかなる部分経路よりも小さい。

本モデルでは、FSPP(l) の解を求める手続きに Dijkstra のアルゴリズムを利用する。すなわち、経路のファジィ目標に対する可能性測度を Dijkstra 法の距離に対応させ、min の手続きを max に置き換える。このような拡張の妥当性が保証されるには、系 3.2 とともに以下の“最適性の原理”が成り立つ必要がある。

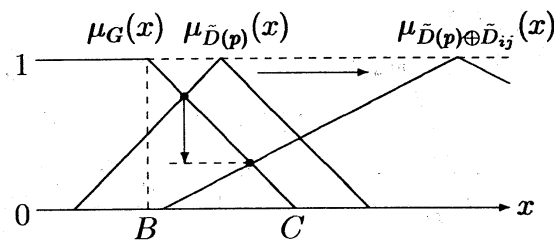


図 2: アークの追加による可能性測度の変化

最適性の原理

ある点に対する最適経路について、そのいかなる部分経路も、それ自身、最適経路である。

経路の距離は L - R ファジィ数となるので、以下のようにファジィ数間に大小関係を定義すれば半順序となる。

定義 3.3 2つのファジィ数 $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ の平均 m_A , m_B について

$$(1) \quad m_B \leq m_A$$

$$(2) \quad \exists c \in [m_B, m_A]:$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \quad (x \leq c)$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \mu_{\tilde{B}}(x) \quad (x \geq c)$$

が成立すれば、 $\tilde{A}$ は $\tilde{B}$ より大きく、

$$\tilde{B} \preceq \tilde{A}$$

とする。

例えば、点 i に対する最適経路 p_i^* と他の経路 $\hat{p}_i$ の各々にアーク a_{ij} を追加する場合で、 p_i^* と $\hat{p}_i$ に大小関係 $\preceq$ が存在しない図 3 のような状況を考える。

この場合はアークを追加することにより、経路の可能性測度の値について、大小が逆転している。

このように“最適性の原理”が必ずしも成り立たないので、Dijkstra 法における距離に可能性測度を単純に対応させることはできない。このことを考慮し、Dijkstra 法の拡張アルゴリズムを構築するのに有効な定理を示す。

定理 3.4 L - R ファジィ数 $\tilde{A} = (m_A, \alpha_A, \beta_A)_{LR}$, $\tilde{B} = (m_B, \alpha_B, \beta_B)_{LR}$ ($m_A < m_B$) について、各々のメンバシップ関数が互いの左斜面で交点をもつための必要十分条件は

$$m_B - \alpha_B L^*(0) < m_A - \alpha_A L^*(0) \quad (9)$$

ただし、 $L^*(0) = \inf\{x | L(x) = 0\}$ である [4, 5]。

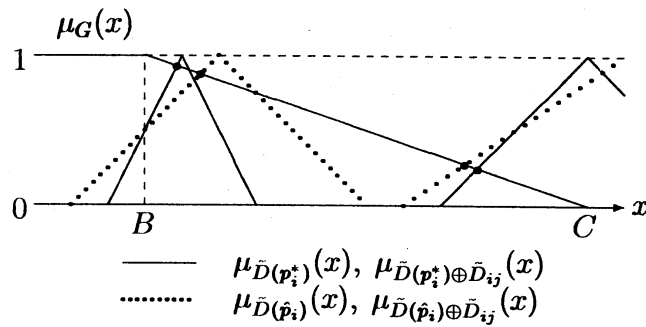


図 3: 測度に関する大小の逆転

証明

(十分性)

$$m_B - \alpha_B L^*(0) < m_A - \alpha_A L^*(0) \quad (10)$$

$$\Leftrightarrow m_B - m_A < L^*(0)(\alpha_B - \alpha_A) \quad (11)$$

$m_B - m_A > 0$, $L^*(0) > 0$ より $\alpha_B > \alpha_A$ である。

$$L\left(\frac{m_A - x}{\alpha_A}\right) = L\left(\frac{m_B - x}{\alpha_B}\right) \quad (12)$$

を満足する x は

$$x_{AB} = \frac{\alpha_A m_B - \alpha_B m_A}{\alpha_A - \alpha_B}$$

となる。また、各々のメンバシップ関数の左頂点 x_A , x_B について、

$$x_A = m_A - \alpha_A L^*(0)$$

$$x_B = m_B - \alpha_B L^*(0)$$

となること、および

$$m_A - \frac{\alpha_A m_B - \alpha_B m_A}{\alpha_A - \alpha_B} = \frac{\alpha_A(m_A - m_B)}{\alpha_A - \alpha_B} > 0 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_A m_B - \alpha_B m_A}{\alpha_A - \alpha_B} - (m_A - \alpha_A L^*(0)) \\ &= \frac{\alpha_A \{m_B - m_A + L^*(0)(\alpha_A - \alpha_B)\}}{\alpha_A - \alpha_B} > 0 \quad (\because (11)) \end{aligned} \quad (14)$$

から

$$\max(m_A - \alpha_A L^*(0), m_B - \alpha_B L^*(0)) < \frac{\alpha_A m_B - \alpha_B m_A}{\alpha_A - \alpha_B} < \min(m_A, m_B)$$

が成り立つ。すなわち

$$\max(x_A, x_B) < x_{AB} < \min(m_A, m_B)$$

となり、 $\tilde{A}$ と $\tilde{B}$ のメンバシップ関数は互いの左斜面に交点をもつ。

(必要性)

逆に (13) が成り立つことから、 $\alpha_A < \alpha_B$ であり、

$$m_B - \alpha_B L^*(0) < \frac{\alpha_A m_B - \alpha_B m_A}{\alpha_A - \alpha_B}$$

となるので

$$\begin{aligned} (m_B - \alpha_B L^*(0))(\alpha_A - \alpha_B) &> \alpha_A m_B - \alpha_B m_A \\ \Leftrightarrow m_B - \alpha_B L^*(0) &< m_A - \alpha_A L^*(0) \end{aligned}$$

□

また L - R ファジィ数の拡張和について、次のような性質が成り立つ。

定理 3.5 L - R ファジィ数 $\tilde{A} = (m_A, \alpha_A, \beta_A)_{LR}$, $\tilde{B} = (m_B, \alpha_B, \beta_B)_{LR}$ ($\alpha_A \neq \alpha_B$) について、メンバシップ関数 $y = \mu_{\tilde{A}}(x)$, $y = \mu_{\tilde{B}}(x)$ の左斜面による交点の y 座標の値は、各々にいかなる L - R ファジィ数 $\tilde{C} = (m_C, \alpha_C, \beta_C)_{LR}$ が加算されても、それが共通のものである限り変化しない。右斜面に関しても同様である ($\beta_A \neq \beta_B$) [4, 5]。

補題 3.6 L - R ファジィ数 $\tilde{A} = (m_A, \alpha_A, \beta_A)_{LR}$, $\tilde{B} = (m_B, \alpha_B, \beta_B)_{LR}$ ($\alpha_A \neq \alpha_B$) について、メンバシップ関数 $y = \mu_{\tilde{A}}(x)$, $y = \mu_{\tilde{B}}(x)$ の左斜面による交点の x 座標の値は、各々に共通の正の L - R ファジィ数 $\tilde{C} = (m_C, \alpha_C, \beta_C)_{LR}$ が加算されると正方向に増加する [4, 5]。

定理 3.5および**補題 3.6**より、前述した可能性測度の逆転現象が起こり得るのは、2つの経路のメンバシップ関数がお互いの左斜面で交点をもち、その交点が $y = \mu_G(x)$ より下方に位置するときである。つまり、**定理 3.4**の条件を満たし、

$$L\left(\frac{m_A - x_{AB}}{\alpha_A}\right) < \mu_G(x_{AB}) \quad (15)$$

すなわち

$$L\left(\frac{m_A - m_B}{\alpha_A - \alpha_B}\right) < \frac{C(\alpha_A - \alpha_B) - (\alpha_A m_B - \alpha_B m_A)}{(C - B)(\alpha_A - \alpha_B)} \quad (16)$$

の場合である。また、一対の経路について、そのような逆転現象が起こるのは高々一回であることが分かる。したがって、ファジィ目標 G に対する可能性測度の値をテンポラリーラベルとして **Dijkstra** 法を拡張するには、パーマネントラベルを受けた直後の点 (カレントノード) に隣接する点のテンポラリーラベルを変更する際に、始点からカレントノードまでの全経路のうち可能性測度の値が逆転する恐れのあるものを考慮する必要がある。し

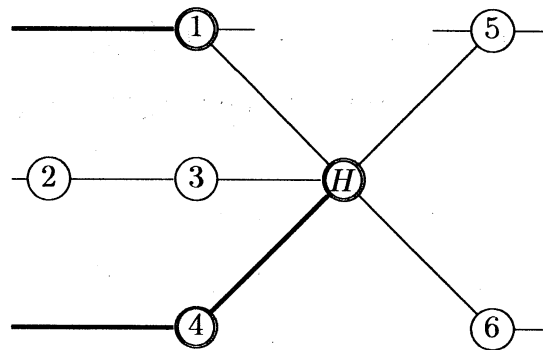


図 4: ラベル更新時のネットワーク例

かし、そのような総当たりの探索を行うと計算効率が悪くなるため、更なる対象の絞り込みを行わなければならない。

例えば図4のような状況を考える。 H をカレントノードとし、5のテンポラリーラベルを更新する際、 H までの最適経路（4を経由する太線）と比較した場合に、アーク a_{H5} を追加することにより可能性測度値が逆転する恐れのあることを考慮すべき経路は、性質上2通りに分かれる。つまり、 H に隣接する点のうち、パーマネントラベルをもつ点（図中二重丸）を終端とする経路（1に到達する太線）、あるいはパーマネントラベルをもたない点を終端とする経路（2, 3を含む経路）の各々に、 H までのアークを追加したものである。

後者については、仮にアーク a_{H5} を追加することで5までの最適経路になるとして、矛盾を導く。系3.2より、その経路内の全ての部分経路は、ファジィ目標 G に対する可能性測度値がその経路より大きいことに注意すると、その経路を最適経路として決定するために一番大きなテンポラリーラベルをもつ点を選択する際、5以外の点（例えば2）が選ばれることとなり、矛盾が生じる。したがって、後者については考慮対象から除外できる。すなわち、前者のみを考慮対象とすればよいことが示された。

また、図4の状態から2, 3の順にパーマネントラベルが付加された場合を考える。このとき、上記の考え方の正当性を保つためには、3までの最適経路にアーク a_{3H} を追加した経路と H までの最適経路のメンバシップ関数を比較し、可能性測度値の逆転が起こり得る場合は5, 6のテンポラリーラベルを更新する必要がある。

つまり、オリジナルの **Dijkstra** 法ではテンポラリーラベルをもつ点のうち、カレントノードに隣接するもののみを手続き対象としているが、本モデルで取り扱う問題にアルゴリズムを拡張するには、パーマネントラベルをもつ点を介して隣接するものについても考慮する必要がある。

以上のことから、次のようなアルゴリズムを提案する。アルゴリズム中で用いられている‘+’は経路にアークが追加されることを意味する。

AFSPP

Step 0 テンポラリーラベル l_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 等を以下のように設定する。ただし、始点は既にパーマネントラベル l_1^* を有するものとする。

$$l_i = \begin{cases} \Pi_{\bar{D}_{1i}}(G) & (a_{1i} \in A) \\ -\infty & (a_{1i} \notin A) \end{cases}$$

$$S(i) = \{ \text{点 } i \text{ に隣接する点} \}$$

$$Par(i) = \begin{cases} \{a_{1i}\} & (a_{1i} \in A) \\ \phi & (a_{1i} \notin A) \end{cases}$$

$$U = \phi$$

Step 1 $l_k = \max_i l_i$ なる k を選択する。 l_k をパーマネントラベル l_k^* とし、このときの始点からの経路を p_k^* とする。終点 n にパーマネントラベル l_n^* があれば終了。

Step 2 p_k^* 上の k の隣接点を m とし、

$$Par(k) = Par(k) \cup \{p + a_{mk} | p \in Par(m)\}$$

とする。

Step 3 $i \in S(k) \setminus \{m, l^* \text{ をもたない点} \}$ について

$$\begin{aligned} \overline{Par(k)} &= \{p_k^* \text{ と定理 3.4 の条件を満たし, (16) 式を満足する } p \in H_1\} \\ Par(i) &= Par(i) \\ &\cup \{p_i^* \text{ と定理 3.4 の条件を満たし, (16) 式を満足する } p \in H_2\} \end{aligned}$$

とする。ただし、

$$\begin{aligned} H_1 &= \{p_i^* + a_{ik}\} \cup \{p + a_{ik} | p \in Par(i)\} \\ H_2 &= \{p_k^* + a_{ki}\} \cup \{p + a_{ki} | p \in Par(k)\} \end{aligned}$$

である。これに伴い $Par(i)$ が変化した場合、点 i を含む最適経路 t_i (p_i^* だけとは限らない) 上において

$$U = \{l^* \text{ をもつ始点以外の点} \}$$

とし、 $j \in U$ について

$$Par(j) = Par(j) \cup \{p + \bar{a}_{ij} | p \in Par(i)\}$$

とする。ただし、 $\bar{a}_{ij}$ は t_i 上の i から j への部分経路である。さらに、

$$Par(k) = Par(k) \cup \overline{Par(k)}$$

Step 4 $i \in U, j \in S(i) \setminus \{l^* \text{をもつ点}\}$ について

$$l_j = \max \left(l_j, \max_{p \in \text{Par}(i)} \Pi_{\tilde{D}(p) \oplus \tilde{D}_{ij}}(G) \right)$$

$i \in S(k) \setminus \{l^* \text{をもつ点}\}$ について

$$l_i = \max \left(l_i, \Pi_{\tilde{D}(p_k^*) \oplus \tilde{D}_{ki}}(G), \max_{p \in \text{Par}(k)} \Pi_{\tilde{D}(p) \oplus \tilde{D}_{ki}}(G) \right)$$

とし、**Step 1** へ。

このアルゴリズムの妥当性については上述の議論より明らかである。ただし、本モデルにおける設定では“最適性の原理”が必ずしも成り立たないため、**Step 1** でパーマネントラベルを付加する点とその点に対する最適経路を選択する際、直前のカレントノードに対する最適経路を拡張したものが選ばれるとは限らない。つまり、 l_i にその値がどの経路に基づくものであるかという情報を付加しておかなければ、選択したパーマネントラベルに対応する最適経路が如何なる点を経由しているものなのかを特定することができない。そのため、実際にプログラミングを行う際には、**Step 4** における $l_i (l_j)$ の更新に寄与した経路を、 l_i に対応させて記憶しておくような工夫が必要である。また、**定理 3.5**、**補題 3.6** から得られる性質、つまり可能性測度の大小が一回逆転すればそれ以後その経路の対は逆転を起こさないということから、計算効率を幾分改善する方法として、**Step 1** において選択された l_k が **Step 4** で $\text{Par}(\cdot)$ に属する経路を基に更新されたものであれば、**Step 2** での $\text{Par}(k)$ の更新前に $\text{Par}(m)$ からその経路を取り除いておくことが考えられる。

3.2 BFSPP の解法

AFSPP を用いることにより、BFSPP の解法が以下のように求められる。

ABFSPP

Step 0 $\Phi = \phi, l = 1, \Pi^0 = -\infty$ (負の値) とする。

Step 1 $P_n^l = \phi$ の間、 $l = l + 1$ を繰り返す。

Step 2 もし $l = r + 1$ なら Φ を非劣解集合として終了。そうでなければ **FSP** $P(l)$ を解き、その最適値、最適経路を (Π^l, p^l) とする。

Step 3 もし $\Pi^l = \Pi^{l-1}$ なら $l = l + 1$ として **Step 2** へ。そうでなければ $\Phi = \Phi \cup (\Pi^l, p^l), l = l + 1$ として **Step 2** へ。

4 おわりに

補助問題 **FSP** $P(l)$ を解く **AFSPP** について、経路に対応するファジィ数間で特定の大小関係が成立しない場合には、アルゴリズムはそれらを解の候補として残しておき、最終

的にそれらの中からファジィ目標に対する可能性測度の値が最大となるものを選んでいく。このような手続きは結果的に、一部の非劣解の集合から可能性測度を重みとして最適解を選択しているとも解釈できる。そのための手続き、および計算手間の削減により、アルゴリズムが複雑なものとなっている。

今後の課題としては、AFSPP の複雑性を改善することが挙げられる。そのためには、経路にアークを追加して測度の大きさが逆転した場合でも、経路間の関係が保存される順序関係を見だし、“最適性の原理”の成立を常に保証する最適化基準を探る必要がある。あるいは、本研究では Dijkstra 法の拡張を試みているが、可能性測度の適用性に優れた他のアルゴリズムの利用を検討することも考えられる。

また、本モデルにおいては、経路の存在可能性をその経路内のアークの最小存在可能性で定義しているため、比較的到低い存在可能性をもつアークのみによって構成される経路と、そうでないものの差別化が図れていない。例えば、存在可能性がすべて 0.2 であるような 4 つのアークにより構成される経路と、各々が 0.8, 0.9, 0.8, 0.2 のアークによって構成される経路を同等に扱うという点である。したがって、経路の存在可能性を定義する際に、min 演算に代わる妥当な方法を考える必要がある。

最後に、本研究は文部省科学研究費一般 C08680460 による補助のもとに行われたことを付記しておく。

参考文献

- [1] E.W.Dijkstra, “A note on two problem in connection with graphs”, Numerische Mathematics 1 (1959).
- [2] D.Dubois & H.Prade, “Fuzzy sets and systems”, Academic Press, New York (1980).
- [3] C.M.Klein, “Fuzzy shortest paths”, Fuzzy Sets and Systems 39 (1991).
- [4] 伊藤, 石井, “可能性測度による組合せ最適化問題”, 京都大学数理解析研究所講究録 945 「最適化の数理における離散と連続構造」 (1996).
- [5] 伊藤, 石井, “可能性測度によるファジィ最短経路問題の一モデル”, 日本ファジィ学会誌 第 8 巻 第 6 号 (1996).
- [6] 中島, 竹田, 石井, “ファジィ理論入門”, 裳華房 (1994).