

有限群の不変式と Hilbert 関数

都立大 理 中島晴久

§ 1. 可換環論と combinatorics の結びつきの中には少くとも古典的な不変式論にあらわれる tableau, diagram, straightening formula にかかわる分野と, generating function との計算についての分野が存在する。upper bound conjecture にみられるように Stanley の関心は後者にあると思われる。 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ とおきたこえは combinatorics にあられた (多項式) 関数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ に対し $\sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$ なる形式和級数を考えてそのふるまいの考察に次数環の Hilbert 級数を利用する。次数環の環論的特徴が Hilbert 級数に反映しているわけだからこの事情を用いる。特にこの次数環として有限群の不変式環のある系列を利用したりすることもあり (cf. [10])、実際 coding theory (cf. [9]) も含めて generating function の計算への次数環の (そしてある場合にはもっとも限定的に有限群の不変式環の) 環論の応用といった研究がなされていた。有限

群の不変式環の Hilbert 級数は周知のように通常表現下では Molien の結果があり、さまざまな応用を有しているのだが、modular 表現になると事情は一転してしまう。たとえば巡回群の不変式環についてでさえその Hilbert 級数の計算には多くの combinatorial な技巧と膨大な紙数を要する (cf. [11])。しかも modular 表現下での不変式環の環論的特徴を考察するには、ある種の高次元の vector partition の数え上げといった combinatorial な数値の計算可能性が鍵となってくる。従ってこうした分野では逆に combinatorics の環論への応用といった立脚点に立つ必要が出てくる。

さてこの小文では Stanley のよく知られた研究 ([1, 2, 3]) の一部を簡単に紹介して、あわせて [2] についての若干の注意を述べる。

§2. k を体とし、その上に有限生成な $\mathbb{N}$ -graded な多元環を $\mathbb{N}$ -graded k -algebra とよぶ。 $\mathbb{N}$ -graded k -algebra R が k -algebra とし 1 次 $\mathbb{N}$ -graded part で生成されるとき standard であるという。 $\mathbb{N}$ -graded k -algebra 上の graded module はすべて有限生成なものだけを考える。そのような $\mathbb{Z}$ -graded module $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ について $H(M, i) = \dim_k M_i$ で定義される関数 $H(M, \cdot) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ を M の Hilbert 関数といい、形式的 Laurent 級数 $F(M, t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} H(M, i) t^i$ を Hilbert 級

数といった。変数 $X_1, \dots, X_n$ の単項式からなるある空でない集合 L が " $Y \in L \Rightarrow Y' \mid Y$ なる単項式 $Y' = 1$ ならば $Y' \in L$ を満たすならば" L は単項式の order ideal といわれる。 $\mathbb{N}$ で添数づけられた非負の整数の列 $(h_0, h_1, h_2, \dots)$ は、適当な変数 $X_1, \dots, X_n$ の単項式の order ideal L が存在して $\deg X_i = 1$ とおくとき $h_i = |\{Y \in L \mid \deg Y = i\}|$ を満たすならば、0-列であるとして定義される。— Δ を $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ 上の simplicial complex とする。 $f_i = |\{\delta \in \Delta \mid \delta \text{ は } i\text{-simplex}\}|$, $d = \dim \Delta + 1$,

$$h(m) = \begin{cases} 1 & (m=0) \\ \sum_{i=0}^{d-1} f_i \binom{m-1}{i} & (m>0) \end{cases}$$

とおくとき $h: \mathbb{N} \ni m \mapsto h(m) \in \mathbb{N}$ は次数 $\dim \Delta$ の polynomial function になり更に $(1-x)^d \sum_{m=0}^{\infty} h(m)x^m$ は x についての多項式 $h_0 + h_1 x + \dots + h_d x^d$ である。また $h_0 = 1$ であり、 h_d は $\dim \Delta$ が奇数のときには $1 - \chi(\Delta)$ となり、そうでないときには $\chi(\Delta) - 1$ となる。当然のことながら f_i や h_i についての何らかの情報を必要とするわけでは h_i の上限について

$$(UBC) \quad h_i \leq \binom{n-d+i-1}{i} \quad (0 \leq i \leq d)$$

なる評価が成り立つのか問題となった (下限についての評価もある, cf. [4])。— x によって Δ に多項式環を square-free な monomial で生成される適当な ideal で割った環 A_Δ を

対応させる。すなわち $A_\Delta = \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] / (X_{i_1}, \dots, X_{i_d} \mid \{\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_d}\} \notin \Delta)$ とおく。 $\deg X_i = 1$ とおき A_Δ を standard graded $\mathbb{R}$ -algebra とする。明らかに $(A_\Delta)_m$ の $\mathbb{R}$ -basis は Δ の face の support となるような $X_1, \dots, X_n$ の degree m の monomial の reduction であるから

$$(2.1) \quad h(A_\Delta, m) = h(m)$$

である。しかし

(2.2) (Macaulay, cf [1, 3]). $P: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ と固定された $c \in \mathbb{N}$ により次の条件は同値である:

- (1) $h(R, i) = P(i)$ ($i \in \mathbb{N}$) となるような Cohen-Macaulay standard graded $\mathbb{R}$ -algebra R が存在して $\dim R = c$ をみたす。
- (2) $(1-t)^d \sum_{i=0}^{\infty} P(i)t^i$ は t にわたる polynomial $p_0 + p_1 t + \dots + p_d t^d$ として $(p_0, p_1, \dots, p_d)$ は 0-列である。

が定義からきわめて簡単に示されるから、次が基本的である。

(2.3) (Reisner, cf [1]). A_Δ が Cohen-Macaulay となるためには $\tilde{H}_i(\text{link of } \sigma, \mathbb{R}) = 0$ ($i \neq \text{dimension of link of } \sigma, \sigma \in \Delta$) となることが必要十分である。

例之は Δ の geometric realization $|\Delta|$ が cell として sphere として仮定すれば A_Δ は Cohen-Macaulay である (一般に A_Δ の Macaulayness は $|\Delta|$ に依存していることが知られている)。従って (2.1), (2.2) から $(h_0, h_1, \dots, h_d)$ は 0-列であり、0-

列の定義から二の場合には (UBC) が成り立つ。Stanley は (UBC) という教え上げの問題を次数環の Hilbert 関数に帰着させて解いているわけ、二二は combinatorics への環論の応用の典型列が見いだされよう。

さて R を Cohen-Macaulay graded $\mathbb{Q}$ -algebra とするとき、 R の canonical module を K_R とあらわす。 K_R は graded R -module であるが容易に

(2.4) ([3]). $H(K_R, t) = (-1)^d t^g H(R, \frac{1}{t})$ となる $g \in \mathbb{Z}$ がある。が成り立つ。ただし $n = \dim R$ とした。これから直に

(2.5) ([3]). R が更に integral domain ならば R が Gorenstein であるには $H(R, \frac{1}{t}) = (-1)^n t^g H(R, t)$ なる $g \in \mathbb{Z}$ があることが必要十分である。

を得る。もちろん (2.5) は Cohen-Macaulay あるいは integral domain という仮定をはずすと成立しない。こうした Hilbert 級数の対称性による Gorenstein 環の特徴づけは簡明な事実でありながらきわめて有用である。

§3. V を標数 p (≥ 0) の体 k 上 n 次元の vector space として、 $GL(V)$ の有限部分群 G をとる。 G は自然に V の対称多項式環 $k[V]$ に作用するが、この作用で不変な元全体の作る部分環を $k[V]^G$ とあらわす。 $k[V]$ の自然な gradation により $k[V]^G$ を graded k -algebra とみる。また $k = \mathbb{C}$ とする。 G の既約指標 χ

に対して、 X に応じる $\mathbb{C}[V]_i$ の既約部分加群全体の和を $\mathbb{C}[V]_{i,X}^G$ であらわし、 $\mathbb{C}[V]_X^G = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{C}[V]_{i,X}^G$ とおくとこれは graded $\mathbb{C}[V]^G$ -module となるが明らかに $\mathbb{C}[V] = \bigoplus_X \mathbb{C}[V]_X^G$ であるから、 $\mathbb{C}[V]_X^G$ は Cohen-Macaulay $\mathbb{C}[V]^G$ -module である。従って特に

(3.1) 次の条件は同値である。

(1) G は有限鏡映群である。

(2) $\mathbb{C}[V]^G$ は regular である。

(3) G のすべからず既約指標 χ について $\mathbb{C}[V]_X^G$ は free $\mathbb{C}[V]^G$ -module である。

が得られる。 $\mathbb{C}[V]_X^G$ が free $\mathbb{C}[V]^G$ -module である場合にはその homogeneous な basis を具体的に書き表わすという問題は同題となるが、この有限群の多項式表現の研究に際して、

(G, χ) の Molien 数 $F_{G,\chi}(t) = \chi(1)^{-1} F(\mathbb{C}[V]_X^G, t)$ が成立つ。

(3.2) (Molien). $\bar{\chi}$ は χ の complex conjugate とする

$$F_{G,\chi}(t) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \bar{\chi}(\sigma) / \det(1 - t\sigma)$$

が成り立つ。

(2.5) と (3.2) を合わせると $\mathbb{C}[V]^G$ の Gorenstein 性の判定条件が求まる。これはもうこの一般に次のことが知られている。

(3.3) (Watanabe [7]). $\mathbb{C}[V]^G$ の canonical module は graded $\mathbb{C}[V]^G$ -module として $\mathbb{C}[V]_{\dim-1}^G(-n)$ に同型である。

(3.4) (Goto [6]). G に含まれる pseudo-reflection ($\neq 1$)

$$\frac{w_1}{A(x_1)} = \dots = \frac{w_i}{A(x_i)} = \dots = \frac{w_{\lambda_1}}{A(\lambda_1)} = \frac{w_{\lambda_2}}{A(\lambda_2)} \quad (2.12)$$

そこで W の 1 例として各成分を

$$w_1 = A(x_1), \dots, w_n = A(x_n), w_{\lambda_1} = A(\lambda_1), w_{\lambda_2} = A(\lambda_2) \quad (2.13)$$

と選ぶと

$$L_W \pi_\lambda(p) = (w_{\lambda_1}, w_{\lambda_2})$$

$$L_W L_W \pi_\lambda(p) = \left(\sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial w_{\lambda_1}}{\partial x_i} + w_{\lambda_1} \frac{\partial w_{\lambda_1}}{\partial \lambda_1} + w_{\lambda_2} \frac{\partial w_{\lambda_1}}{\partial \lambda_2}, \right. \\ \left. \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial w_{\lambda_2}}{\partial x_i} + w_{\lambda_1} \frac{\partial w_{\lambda_2}}{\partial \lambda_1} + w_{\lambda_2} \frac{\partial w_{\lambda_2}}{\partial \lambda_2} \right)$$

となる。従って

[命題 3] $p = (x, \lambda) \in \Sigma$ とする。

(i) p が折り目形点ならば $w_{\lambda_1}, w_{\lambda_2}$ の両者が同時に零となることはない,

(ii) p がくさび形点ならば

(a) $w_{\lambda_1} = 0$ かつ $w_{\lambda_2} = 0$ であり,

(b) $\sum w_i \frac{\partial w_{\lambda_1}}{\partial x_i}, \sum w_i \frac{\partial w_{\lambda_2}}{\partial x_i}$ の両者が同時に零になることはない。

[分岐集合の計算法]

(i) 折り目形点: (2.2), (2.7) を (x, λ_1) あるいは (x, λ_2) について解く,

(ii) くさび形点: (2.2), (2.7) および $w_{\lambda_1} = 0$ (あるいは $w_{\lambda_2} = 0$) を

(x, λ) について解く。

命題 3 はこれらの方程式系の Jacobi 行列式が零とならないことをいっている。

従って Newton 法により折り目形点, くさび形点を求めることができる。

(2.2) homoclinic 点の発生に関する分岐集合 (2次元非自律系の例)

Poincaré 写像 T_λ (2次元) が正不安定不動点 D ($0 < \mu_1 < 1 < \mu_2$) を持つとし, 点 D の α 枝, ω 枝が接して homoclinic 点が発生するパラメータ λ の値 $\lambda = \lambda_0$ を計算する。

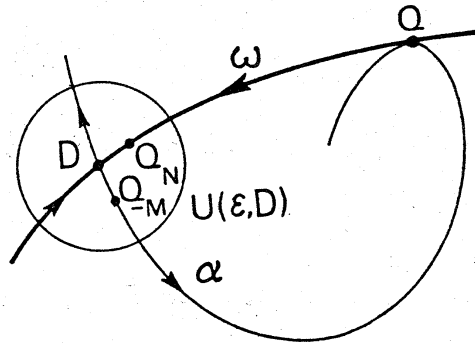
点 $D \in \mathbb{R}^2$ を正不安定不動点とする:

$$T_\lambda(D) - D = 0 \quad (2.14)$$

D の ε 近傍 $U(\varepsilon, D)$ をとり, その内部で α 枝, ω 枝の局所表現を計算する:

$$\alpha \text{ 枝: } g_\alpha(x-D) = 0 \quad (2.15)$$

$$\omega \text{ 枝: } g_\omega(x-D) = 0$$



これらの枝を T_λ で $\mathbb{R}^2$ 内にのばし点 Q で両枝が接して homoclinic 点が生じたとしよう (上図参照)。適当な正の整数 M, N をとれば

$$Q_{-M} \triangleq T_\lambda^{-M}(Q) \in U, \quad Q_N \triangleq T_\lambda^N(Q) \in U$$

とできる。すなわち

$$g_\alpha(Q_{-M}-D) = 0, \quad g_\omega(Q_N-D) = 0, \quad Q = T_\lambda^M(Q_{-M}) = T_\lambda^N(Q_N)$$

次に点 Q で両枝の接ベクトルの方向が一致する条件を求める。まず U 内で α 枝のパラメータ付け, すなわち α 枝を曲線 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2; s \mapsto \phi(s)$ で表わす。ここに $\phi(0) = D, \phi(s_\alpha) = Q_{-M}$ とする。今 $\mathbb{R}^2$ のベクトル場を曲線 ϕ について

$$\frac{d\phi}{ds}(s) = W(\phi(s))$$

を考えると, 点 Q における α 枝の接ベクトルは

$$\left. \frac{d(T_\lambda^M \circ \phi)}{ds} \right|_{s=s_\alpha} = DT_\lambda^M(\phi(s_\alpha)) \frac{d\phi}{ds}(s_\alpha) = DT_\lambda^M(Q_{-M}) W_\alpha$$

でもさうし (2) はおまかせられるわけだから、少くとも G が solvable で $(p, |G|) = 1$ という条件下では (3) は G が有限鏡映群であるということと同値になってしまう。

Stanley が [2] において $\mathbb{C}[V]^G_X$ を考察した背景を説明しよう。いま簡単にすゝたために $\mathbb{Q} = \mathbb{C}$ と改めおく。反例が渡辺敬一氏により見い出されているが、Stanley は " $\mathbb{C}[V]^G$ が complete intersection ならばある有限鏡映群 $\tilde{G}$ について $\tilde{G} \supseteq G \supseteq [\tilde{G}, \tilde{G}]$ となる" と予想した。そしてこのような G つまり

(3.7) 有限鏡映群 $\tilde{G}$ の正規部分群 G で $\tilde{G}/G$ が abel 群。

となるような G について $\mathbb{C}[V]^G$ が complete intersection となる場合を決定しようと試みた。(3.7) の群 G は $\tilde{G}$ の linear character の作る適当な群 $\Omega(\tilde{G}, G)$ の kernel 群として実現されるわけだ。 $\mathbb{C}[V]^G = \bigoplus_{\chi \in \Omega(\tilde{G}, G)} \mathbb{C}[V]^{\tilde{G}}_{\chi}$ と成り立つ。 $\mathbb{C}[V]^{\tilde{G}}_{\chi}$ は (3.5), (3.6) によると $\mathbb{C}[V]^{\tilde{G}} f_{\chi}$ である。こうして $\mathbb{C}[V]^G$ の環論的な特徴が relative invariant の計算からわかる。Stanley が実際に $\mathbb{C}[V]^G$ の complete intersection 性を決定したのは $G = \tilde{G} \cap \mathrm{SL}(V)$ のときであったが、(3.7) の群 G で $\mathbb{C}[V]^G$ が complete intersection, hypersurface となるものはそれぞれ全て分類されている。前者については [5] と [8] を用いるが、紙数を要するので分類を述べない。後者については次のことに触れておく。

(3.8) (3.7) の群 G が pseudo-reflection を含まないとき、次

の条件は同値である。

(1) $\mathbb{C}[V]^G$ は hypersurface .

(2) 有限鏡映群 H で $G = H \cap \mathrm{SL}(V)$ となるものが存在して更に H の中の pseudo-reflection の order はすべて $[H:G]$ に等しい。

なおこれらのことは modular 表現の場合でも適当な変更の下に成立する。

REFERENCES

1. R. Stanley, The upper bound conjecture and Cohen-Macaulay rings, Stud. in Appl. Math., 54 (1975), 135-142.
2. ———, Relative invariants of finite groups generated by pseudo-reflections, J. Algebra, 49 (1977), 134-148.
3. ———, Hilbert functions of graded algebras, Adv. Math., 28 (1978), 57-83.
4. B. Grünbaum, Convex Polytopes, Interscience, New York, 1967.
5. A. Dress, On finite groups generated by pseudo-reflections, J. Algebra, 11 (1969), 1-5.
6. S. Goto, On Gorenstein rings (in Japanese), Sūgaku, 31 (1979), 349-364.
7. K. Watanabe, Certain invariant subrings are Gorenstein, I, II, Osaka J. Math., 11 (1974), 1-8, 379-388.
8. ———, Invariant subrings which are complete intersections, I, (Invariant subrings of finite Abelian groups), Nagoya Math. J., 77 (1980), 89-98.
9. N.J.A. Sloane, A short course on error correcting codes, Springer, New York, 1975.
10. L. Solomon, Partition identities and invariants of finite groups, J.

- Comb. Theory Ser. A, 23 (1977), 148-175.
11. G. Almkvist and R. Fossum, Decompositions of exterior and symmetric powers of indecomposable $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -modules in characteristic p and relations to invariants, Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil, Lecture Notes in Math., 641, Springer, Berlin, 1978, 1-111.