

磁場及び電流のもとでの超電導体のふるまい

真 木 和 美 (京大理)

(9月10日受理)

1° B.C.S.-Bogoliubov の理論によつて、超電導体の熱力学的、電気力学的性質は次々と明らかにされたが、強い磁場のもとでの一般的ふるまいについては、まだわかつていないことも多い。よく知られているように、転移点の近くで order parameter が小さく、超電導体が London 型（すなわち電流とベクトル・ポテンシャルの間にローカルな関係が成立する）になる領域では、Ginzburg-Landau¹⁾ の式を用いて定性的に一般の性質を記述することができる。しかしもつと低温のほうでは今のところ一般的とりあつかいは知られていない。強い磁場の場合は当然非線型の効果が一番問題になるわけだがこの効果を大きく二つにわけることができる。a) order parameter Δ を通してのみあらわれるもの、b) それ以外の効果が考えられる。²⁾

a) について重要性は早く Pippard³⁾ によつて指摘されていた。最近微視的理論にもとづいて、一様磁場の場合鏡面反射での極限での計算は球及び円筒型について Ragers²⁾ が行なつた。また任意の波数ベクトルをもつベクトル・ポテンシャルの二次までの影響は Nambu et Juan⁴⁾ によつて計算されている。

Bardeen⁵⁾ は Δ の中に磁場の二次の効果までいれて計算したものを用いて半現象論的に小さな超電導体の強い磁場及び電流のもとでのふるまいをとりあつかつた。

我々はこゝで次の二つの条件をみたすような小さな超電導体についての微視的理論による厳密なとりあつかいを試みる。次の条件は必ずしも独立で

はないかもしれないけれども。

1) 系が非常に小さいこと、ひろがりをもったとき $d < \xi_0$ 、 ξ_0 はコヘレントな長さ(これは系の中で Δ を一定とする近似に対応している。したがって興味ある Abrikosov の mixed 状態の可能性は除外される)

2) $\tau \Delta < 1$ 、すなわち電子の平均自由行路が非常に小さいこと、小さな物体が polycrystal の構造をもつものとするとき非常に自然な条件になるがこのため以下の理論は本質的には London 型にしかあてはまらない。

2° 次のような散乱中心が random にある場合の Gor'kov の式⁶⁾ から出発しよう。

$$\begin{aligned} & \left(i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2m} (\vec{p} - e \vec{A})^2 + \mu + V(x) \right) G(x, x') \\ & - i g F(x, x) F^+(x, x') = \delta(x, x') , \\ & \left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\vec{p} + e \vec{A})^2 - \mu + V(x) \right) F^+(x, x) \\ & + i g F^+(x, x) G(x, x') = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

ここで μ は化学ポテンシャル、 V は散乱中心と電子との相互作用で $V = \sum_a u(x - x_a)$ のようにかけるとする。まず散乱中心のないときには G 及び F の Fourier 変換したものは形式的に次のようにかける。

$$\begin{aligned} G(p) &= (\omega + \xi + \frac{\rho}{m} \vec{A} \cdot \vec{p}) / \Sigma(p), \\ F^+(p) &= i \Delta / \Sigma(p), \\ \Sigma(p) &= (\omega + \frac{e}{m} \vec{A} \cdot \vec{p})^2 - \xi^2 - \Delta^2 - \left[\xi, \frac{e}{m} \vec{p} \cdot \vec{A} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

ここに $\xi = p^2 / 2m + \frac{e^2}{2m} \sum |\vec{A}(q)|^2 - \mu$. 上の式をみちびくのに Δ は対角性分しかないことを用いた。上の式を gap 方程式

$$\Delta = \frac{g}{(2\pi)^4} \int d^4 p F^+(p) \quad \text{に代入して} \frac{e}{m} \vec{A} \cdot \vec{p} \text{ について展開して次}$$

の項までとると Nambu et Juan の結果は容易にえられる。

Random な散乱中心があるときは標準的なとりあつかいによつて、 G と F は、

$$G(p) = \frac{\tilde{\omega} + \frac{e}{m} \vec{p} \cdot \vec{A} + \xi}{(\tilde{\omega} + \frac{e}{m} \vec{p} \cdot \vec{A})^2 - \xi^2 - \tilde{\Delta}^2}$$

$$F(p) = \frac{i \tilde{\Delta}}{(\tilde{\omega} + \frac{e}{m} \vec{p} \cdot \vec{A})^2 - \xi^2 - \tilde{\Delta}^2}, \quad (3)$$

のようにかける。 $\tau^{-1} = \frac{nm p_0}{(2\pi)^2} \int |u| d\Omega$ で定義される τ を用いて、

$\tau \Delta < 1$ のときには $\tilde{\omega}, \tilde{\Delta}$ は $\tilde{\omega}/\tilde{\Delta} = u$ できめられるパラメーター u を使つてあらわされ、 u は

$$\frac{\omega}{\Delta} = u \left(1 - \xi \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \right) + O(\tau \Delta) \quad (4)$$

からきめられる。このとき ζ は $\zeta = \frac{\tau}{\Delta} \left(\frac{e p_0}{m} \right)^2 \int |\vec{A}(q_1)|^2 d\vec{q}$.

で与えられる。これは筆者が一様磁場のときに得た結果の一般化になつてい

真 木 和 美

る。⁷⁾ したがって $\tau \Delta \ll 1$ 及び $\Delta : \text{const}$ をみたす系では $T = 0^\circ \text{K}$ では、

$$\begin{aligned} \ln \Delta / \Delta_{00} &= -\frac{\pi}{4} \zeta, \text{ for } \zeta < 1 \\ &= -\text{arccosh } \zeta - \frac{1}{2} (\zeta \arcsin \zeta^{-1} - \sqrt{1-\zeta^{-2}}) \text{ for } \zeta > 1 \end{aligned} \quad (5)$$

がえられる。 Δ_{00} は $\vec{A} = 0$ としたときの gap をあらわしている。このとき励起スペクトラムの gap は Δ でなく $\omega_0 = \Delta (1 - \zeta^{2/3})^{3/2}$ で与えられる。

T が小さい時の系や比熱は

$$\begin{aligned} C_s &= mp_0 \int \frac{2\pi}{3} T^{-1/2} \Delta^{1/2} \Delta^{7/6} \zeta^{-2/3} (1 - \zeta^{2/3})^{11/4} \exp(-\omega_0/T), \\ &\quad \text{for } \zeta < 1, \\ &= mp_0 \tau \Delta \zeta \int \sqrt{1 - \zeta^{-2}} T \text{ for } \zeta > 1 \end{aligned} \quad (6)$$

のようになるが、 $\zeta > 1$ では指数的な項はあらわれない。同様に電流については Fourier 成分について、

$$\begin{aligned} \vec{j}(q) &= \frac{\pi e^2 N}{2m} \tau \Delta \left(1 - \frac{4}{3\pi} \zeta\right) \vec{A}(q), \text{ for } \zeta < 1, \\ &= \frac{e^2 N}{m} \tau \Delta \left(\arcsin \zeta^{-1} - \frac{2}{3} (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \zeta^{-1} \sqrt{1 - \zeta^{-2}} \right) \vec{A}(q), \\ &\quad \text{for } \zeta > 1. \end{aligned} \quad (7)$$

がえられる。(7)式は London の式の一般化になつている。また T_c の式では

$$\ln T/T_{co} = -\frac{3}{2}\zeta(2)\left(\frac{\Delta}{\pi T}\right)\zeta - \frac{7}{8}\zeta(3)\left(\frac{\Delta}{\pi T}\right)^2.$$

$$\vec{j}(q) = \frac{e^2}{m} N(\tau\Delta)\left(\frac{2\Delta}{\pi T}\right)\left(\frac{3}{4}\zeta(2)\right) \vec{A}(q). \quad (8)$$

がえられる。

Free energy の考察からこのような系では磁場のもとでの相転移は常に二次になることがわかる。これは電子系の Free energy の差は $\Delta > 0$ であるかぎり常に負であることと、電磁場の Free energy の差は磁場の repulsion によつて正であるけれども $\tau\Delta$ の order の小さい寄与しか与えないことから明らかである。

上の結論は Bardeen のものと相反するがこれは転移点の近くでは磁場についての高次の項が重要になってくるためだと思われる。

3⁰ Current のある状態を記述するには次の変換に注目しよう。ベクトル・ポテンシャル $\vec{A}$ は一意的に次のように分解できる。

$$\vec{A} = \text{rot } \vec{\omega} + \text{grad } \phi \quad (9)$$

さらに $\text{div } \vec{A} = 0$ の gauge を用いるとすれば、 ϕ は $\Delta\phi = 0$ の条件をみたさなければならない。一般に gauge 変換は、

$$\begin{aligned} \vec{A} &\rightarrow \vec{A} + \text{grad } \chi \\ \psi &\rightarrow e^{i\chi} \psi \end{aligned} \quad (10)$$

の一組の変換によつてあらわされるが、上の変換の一方だけを行なうと、系の superflow の状態の間の変換に対応する。すなわちこの場合には速度ポテンシャルをそれぞれ χ/m あるいは $-\chi/m$ だけずらしたものと考えることができる。

これらの考察から、電磁場と電流とが共存する場合には、 $\text{rot } \vec{\omega}$ と grad

ϕ との直交性を用いると， ζ は，

$$\zeta = \zeta_m + \zeta_c \quad (11)$$

のようにかけて，電流と磁場とは ζ の中では独立に加法的に含まれることがわかる。

同様の事情は paramagnetic な不純物を含む系での永久電流を考えると きにも成立している。

上の式を用いると磁場のある場合の臨界電流を求めることができる。このためには ϕ として一様な流れに対応した $\phi = m \vec{v}_s \cdot \vec{r}$ のかたちをとる。臨

界電流は $\left(\frac{\partial j_s}{\partial v_s} \right)_\omega = 0$ の条件からきめられるが， j_s は

$$j_s = e N(\tau \Delta) \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \zeta \right) v_s \quad \text{for } \zeta < 1, \quad T = 0$$

etc.

(12)

のように定義される。

$T = 0$ のときの表式は一般に複雑になるが，

$$\zeta_\omega = \frac{\tau}{\Delta} \left| \frac{e}{m} \right|^2 \int |\vec{q} \times \vec{v}(q)|^2 d\vec{q} \quad \text{として，}$$

ζ_ω が ζ_ω^1 (~ 0.565) の値をこえると，臨界電流は $\zeta > 1$ の領域に入る。上の計算から我々は永久電流が存在するためには励起スペクトラムに gap があることではなく，0でない Δ が存在することが本質的だと結論できる。たゞこのとき注意すべきことは，この状態では電流がごくゆっくり時間的に変化するときには小さなエネルギーの消散をとまなうということである。

4° 上に得た表式は $\tau \Delta < 1$ ， $\Delta = \text{const.}$ の条件さえ満す系であれば非常に一般的に成立することが示せる。今ハミルトニアンの中で時間反転に対して符号をかえる部分を H_1 とすれば，このとき(5)式は次のようなくを

用いられよう。

$$\zeta = \frac{\tau}{\Delta V} \sum_n \delta(\xi_n) \langle n | H_1^2 | n \rangle \quad (13)$$

例として角速度 $\vec{\omega}$ で回転する系を考える。このときには

$$H_1 = \int \varphi^\dagger \vec{\omega} \cdot \vec{L} \varphi d^3x \quad \text{のように書くことができる。} \quad \vec{L} \text{ は角運動量の}$$

演算子である。これを用いるときは、

$$\zeta = \frac{\tau}{\Delta} (\omega^2 p_0^2 I)$$

で与えられる。 p_0 はフェルミ・モーメントム、 I は系の回転軸のまわりの慣性能率をあらわす。

6° 以上にみたように $\Delta = \text{const}$ と $\tau\Delta < 1$ の条件のもとではすべての表式は非常に簡単化され、一般の磁場及び電流の影響を考察するのに十分な式が得られた。これらの式をさらに拡張する方向として次の二つが当然考えられる。

1) Δ を一般に場所によつて変化してもよいとする。

2) $\tau\Delta$ が一般の場合、特に Pippard 型超電導体の場合。

1) の問題はもし Δ が非常にゆつくり変化するような場合は非常に簡単でこのときには ∇^2 の級数に展開できて、いわば Ginzburg-Landau 方程式の一般化のようなものがえられる。しかしこれらの妥当性の判定には少し困難な問題もある。

2) の問題について筆者はまだ明確な結論は得ていない。一つの可能性としては (2) の式を出発点として、 $\xi_0 q > 1$ の関係式を十分に使つて適当なパラメーター（おそらく

$$\int \frac{|A(q)|^2}{\xi_0 q} dq$$

の項だけ厳密に含むような consistent な式をたてる

真 木 和 美

ことであろう。

このようにして得られた式だけでは物理的に意味ある系がないかも知れないがさらに Δ の変化をみとめると、微視的理論からの境界エネルギーや、
intermediate state での輸送現象の解明が期待されうる。

終りに筆者に超電導のいろいろな問題について教示された松原先生、横田先生、それに恒藤さんに感謝いたします。特に 3^0 の変換についての話は、恒藤さんとの議論の中で明らかになったものです。

文 献

- 1) V.L. Ginzburg and L. D. Landau, JETP (U.S.S.R) 20 (1950), 1064.
L.P. Gor'kov, JETP (U.S.S.R) 36 (1959) 1918.
- 2) K.T. Rogers, Ph D Thesis, University of Illinois, 1960 (unpublished)
- 3) A.B. Pippard, Phil. Mag. 43 (1952), 273.
- 4) Y. Nambu and S. F. Juan, Phys. Rev. 128 (1962), 2622.
- 5) J. Bardeen, Rev. Mod. Phys. 34 (1962) 667.
- 6) L.P. gor'kov, JETP (U.S.S.R) 37 (1959) 833.
- 7) K. Maki, Prog. Theor. Phys. 29 (1963) 603.