

ある数値積分公式について

伊理正夫*, 森口繁一*, 高澤嘉光*

1.	問題提起	2
2.	分点と重み	5
3.	誤差の漸近評価	7
4.	数値例	13
	補遺	15

* 東京大学工学部

1. 問題提起

$f(x)$ を区間 $[0, 1]$ において連続でかつ区間 $(0, 1)$ に於いて十分な回数連続微分可能な実数値函数であるとする。

この時、よく知られている Euler-Machaurin の公式 (B_n は Bernoulli 数, R_m は剰余項):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} \left[\frac{1}{2} f(0) + \sum_{n=1}^{N-1} f\left(\frac{n}{N}\right) + \frac{1}{2} f(1) \right] \\ &= \int_0^1 f(x) dx + \sum_{n=1}^{m-1} (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} \cdot \frac{1}{N^{2n}} \left[f^{(2n-1)}(1) - f^{(2n-1)}(0) \right] + R_m \end{aligned} \quad (1.1)$$

は、右辺の積分 $\int_0^1 f(x) dx$ の近似値を数値計算するのに、区間 $[0, 1]$ を N 等分して台形公式を用いたときの誤差(打切誤差)の性質を知るのに便利の場合が多い。実際、もし

$$\left. \begin{aligned} f^{(2n-1)}(0) &= f^{(2n-1)}(1), \quad n=1, \dots, m \\ f^{(2m+1)}(0) &\neq f^{(2m+1)}(1) \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

であれば、誤差の主要項の大きさは $O(N^{-2(m+1)})$ であることがみられる。

ところが、 $f(x)$ が無限回微分可能で、しかもすべての奇数次の導函数の区間 $[0, 1]$ の両端における値が等しい場合には、(1.1) は誤差評価のために便利でない。そのような場合には、(1.1) の右辺の総和記号の中の項はすべて 0 にな

り、誤差は分割数 N のべきに比例するのではなくて、もっと別の挙動を示すのが——そして、それも N の増大と共に N のべきなどよりは遙かに速やかに小さくなるのが——普通である。たとえば、 $f(x)$ が、周期 1 の周期函数の場合にはよくこのようになるとが起る。

このことを積極的に利用することを目指して、次のような数値積分公式を考えることができる。まず

$$Q = \int_0^1 \exp\left[-\frac{1}{t} - \frac{1}{1-t}\right] dt$$

$$(\equiv 0.00702\ 98584\ 06609\ 65623\ 92412\ 70530\ 3401\cdots)$$

(1.3)

とおき、函数 $\varphi(t)$ を

$$\varphi(t) = \int_0^t \varphi'(t) dt, \quad \varphi'(t) \equiv \frac{1}{Q} \exp\left[-\frac{1}{t} - \frac{1}{1-t}\right]$$

(1.4)

により定義する(図1)。そして、変数 $x (=0\sim 1)$ を $x = \varphi(t)$ により変数 $t (=0\sim 1)$ に変換すると、 $f(x)$ の区間 $[0, 1]$ の上での積分は次のように表わされる：

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(t) dt$$

(1.5)

$$\text{ただし} \quad g(t) \equiv f(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

(1.6)

ここで函数 $f(x)$ が、区間 $(0, 1)$ において無限回連続微分可能で、しかも区間 $[0, 1]$ の両端でも連続であるか、或いは

両端の近傍では高々 $x^\alpha, (1-x)^\beta$ (α, β は -1 より大きいある定数) 程度の特異性しか示さなければ, 函数 $g(t)$ は区間 $[0, 1]$ において無限回連続微分可能で, しかも区間の両端において函数値ならびにすべての導函数の値が 0 になる:

$$g^{(m)}(0) = g^{(m)}(1) = 0 \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (1.7)^*$$

そこで, $f(x)$ の積分を数値計算するのに, (1.5) 式の右辺に台形則を適用すれば, すなわち, 公式

$$\left. \begin{aligned} S_N &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} w_n^{(N)} f(x_n^{(N)}), \\ x_n^{(N)} &= \varphi\left(\frac{n}{N}\right), \quad w_n^{(N)} = \varphi'\left(\frac{n}{N}\right) \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

により S_N を計算すれば, かなり精度の高い結果が得られるのではないかと, しかも, 区間の両端における $f(x)$ の特異性もある程度抑圧できるのではないかと, ということが予想される。

この予想を理論的考察および数値実験によって定量的に確かめ, 数値積分公式 (1.8) の性質を明らかにすることが, 本論文の目的である。

*補遺 2 に示すように, τ が十分小さい所では, $\varphi(t) \sim t^2 \varphi'(t)$ であるから $\varphi(t)^\alpha \varphi'(t) \sim t^{2\alpha} \varphi'(t)^{\alpha+1}$ である。 τ が 1 に近い所でも同様。

2. 分点と重み

数値積分公式 (1.8) を用いるためには、分点の位置 $x_m^{(N)}$ および重み $w_m^{(N)}$, すなわち (1.4) の函数 $\psi(t)$ および $\psi'(t)$ の区間 $[0, 1]$ における値を与える必要がある。区間 $[0, 1]$ を N 分割するとき, $f(x)$ の値を計算すべき分点の数は $N-1$ である。一般に

$$x_m^{(N)} = 1 - x_{N-m}^{(N)}, \quad w_m^{(N)} = w_{N-m}^{(N)} \quad (2.1)$$

という対称性があり, 又ある N について N 分割公式に対する分点と重みの表を与えておけば, N' が N の約数であるとき, N' 分割公式に対する分点と重みは, その表の項目を N/N' とびに捨っていくことによって知ることができる。この後者の性質を利用して, たとえば, N 分割のときの数値積分値 S_N が得られている場合, 単に, 更に N 点における和

$$S'_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N w_{2n-1}^{(2N)} f(x_{2n-1}^{(2N)}) \quad (2.2)$$

を計算し, S'_N と S_N との相加平均を作ることによって, $2N$ 分割のときの S_{2N} を求めることができる。*

函数 $\exp[-\frac{1}{t} - \frac{1}{1-t}]$ を $t=0$ から $t=1$ まで Romberg 式の

* 公式 (1.8) は一見 Gauss 型の数値積分公式と類似しているが後者についてはこのようなことはできない。

手法で十分な精度で数値積分し (補遺1参照), $(1, 3)$ の Q を求め, として $(1, 4)$ の $\psi'(t)$, $\psi(t)$ の値を t の $\frac{1}{N} = \frac{1}{256}$ ($N=256$) とびの点ごとに計算した結果を表 1 に示す。

3. 誤差の漸近評価

函数 $f(z)$ は、実数軸上の区間 $[0, 1]$ で定義されたものであるが、解析的延長によって、その定義域を区間 $[0, 1]$ を含む複素平面（リーマン面）上にある開集合 D_0 にまで拡大することができる場合がある。そのようにして複素平面上の領域 D で定義された函数——やはり同じ f を用いて $f(z)$ を記す——が、2点 $z=0$, $z=1$ を除いた D の各点で正則で $z=0$ および $z=1$ の近傍においては、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= a z^\alpha + o(|z|^\alpha) \\ f(z) &= b(1-z)^\beta + o(|1-z|^\beta) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

という性質を有している場合* について、数値積分公式(1.8)の誤差の評価を試みる。

* $f(z)$ が $z=0$, $z=1$ でも正則な場合は勿論含まれるし、 $z=0$, $z=1$ が $f(z)$ の代数特異点で Puiseux 級数に展開される場合も含まれる。(3.1)の形にならない代数特異点など類似の場合に対しても、しかし、本節以下の議論は適当な変更を加えることによって成立する。

函数 $f(x)$ が上記の性質を有するとき, (1.6) の函数 $g(t)$ は区間 $[0, 1]$ で無限回連続微分可能で (1.7) の性質を有するから, $g(t)$ は絶対一様収束する Fourier 級数

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \exp[-i2\pi kt] \quad (i=\sqrt{-1}, t \in [0, 1]) \quad (3.2)$$

に展開される。ここで

$$C_k = \int_0^1 g(t) \exp[i2\pi kt] dt \quad (3.3)$$

である。さて一方では, 明らかに

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 g(t) dt = C_0. \quad (3.4)$$

であり, 他方では, $g(0)=0$ を考慮すると

$$S_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} g\left(\frac{n}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g\left(\frac{n}{N}\right) = C_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (C_{pN} + C_{-pN}) \quad (3.5)$$

である。そこで, $N-1$ 点公式 (1.8) の近似誤差 E_N は

$$E_N = S_N - \int_0^1 f(x) dx = \sum_{p=1}^{\infty} (C_{pN} + C_{-pN}) = 2 \sum_{p=1}^{\infty} \operatorname{Re} C_{pN} \quad (3.6)$$

と表わされる。ところで, 以下で求められる C_N の形からわかるように

$$\sum_{p=2}^{\infty} \operatorname{Re} C_{pN} / \operatorname{Re} C_N \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \quad (3.7)$$

であるから漸近的に

$$E_N \sim 2 \operatorname{Re} C_N \quad (3.8)$$

であるとみなしてよい。このようにして、我々の数値積分公式(1.8)の誤差評価の問題は、函数 $f(t)$ の区間 $[0, 1]$ における Fourier 係数を求める問題に帰着される。

変数 x と t の間の関係 $x = \varphi(t)$ を複素領域にまで拡張したものは、 $t=0$ と $t=1$ が $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ の真性特異点であるので、相当複雑な写像になるが、図2(2)に示した複素 z 平面上の台形状の開領域 Δ (ただし、 $\delta = \max(\alpha, \beta)$, θ は π より小さい角度——実は $\tan \theta$ が4より少し小さい位の角でよい。) は—— N が十分大きければ——写像 $z = \varphi(t)$ により、複素 z 平面の実軸上の区間 $[0, 1]$ を含む十分小さなある近傍に含まれる像領域に写されることは容易に見られる*。この像領域が本節の初めに述べた開集合 D に含まれてしまうように N は十分大きくとられているものとする。

我々の仮定のもとでは、函数 $f(t)$ は $t=0$ と $t=1$ の2点を除いて Δ の上で正則であり、また Δ の内部で $t \rightarrow 0$, $t \rightarrow 1$ のとき $f(t) \rightarrow 0$ である。(したがって、実軸上の積分

* $z=0$, $z=1$ の近くでは、像領域は何重にも重なっている。

$$C_N = \int_0^1 g(t) \exp[i2\pi Nt] dt \quad (3.9)$$

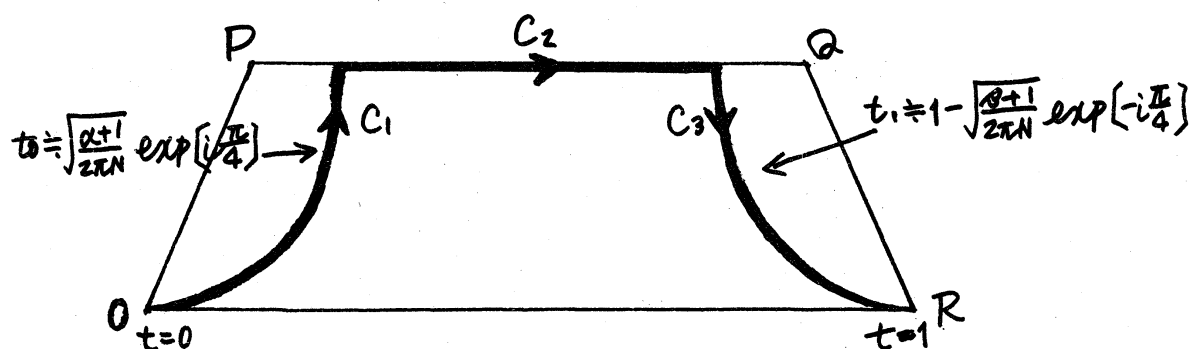
を計算する代りに, $t=0$ から出発して Δ の中を通り $t=1$ に至る任意の経路 C に沿っての複素積分

$$C_N = \int_C g(t) \exp[i2\pi Nt] dt \quad (3.10)$$

によって C_N を計算することが出来る。さらに台形領域 Δ の上底 PQ の上では $f(z)$ の D 内における解析性と $\varepsilon=0$, $\varepsilon=1$ の付近における挙動に対する仮定 (3.1) とを考慮に入れると

$$\begin{aligned} |g(t) \exp[i2\pi Nt]| &= |f(\varphi(t)) \varphi'(t)| \exp[-2\sqrt{4\pi(\delta+1)N}] \\ &< O(\exp[-1.5\sqrt{4\pi(\delta+1)N}]) \quad (N \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (3.11)$$

であることがわかる。これらの事実に基づいて, C_N (あるいはその実数部) の値の漸近評価式を鞍点法により求めるこ



とができる。詳しい式の計算は補遺3にゆずることにするが $z=0$ の近くで $f(z) \doteq a z^\alpha$, $z=1$ の近くで $f(z) \doteq b(1-z)^\beta$ であることに注意すると, $g(t) \exp[i2\pi Nt]$ が停留する点(鞍点) ~~は~~ $\sqrt{\frac{\alpha+1}{2\pi N}} \exp[i\frac{\pi}{4}]$ の近くと $1 - \sqrt{\frac{\beta+1}{2\pi N}} \exp[-i\frac{\pi}{4}]$ の近くとに, それぞれ1点ずつ (t_0 と t_1) 見出され, それらの点を通して $|g(t) \exp[i2\pi Nt]|$ が最も速やかに減少する道をたどると, それぞれ図3の C_1 及び C_3 のような, $t=0$, 及び $t=1$ を通り線分 $\overline{PQ}$ に交わる経路が得られる(補遺4参照)。それらの交点との間の線分 $\overline{PQ}$ の部分を C_2 とし, $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ を(3.10)の積分路として採用する。 C_1 あるいは C_3 に沿っての積分の値は鞍点 t_0 あるいは t_1 の極く近くの部分のみによって支配され, その実数部の2倍* はそれぞれ $\frac{1}{2} \log a \in (N, \alpha)$ あるいは $\frac{1}{2} \log b \in (N, \beta)$ となる。ここで

$$E(N, \alpha) \equiv \frac{\sqrt{4\pi}}{(eQ)^{\alpha+1}} \cdot \frac{(\alpha+1)^{\frac{1}{2}+\alpha}}{(2\pi N)^{\frac{1}{2}+\alpha}} \exp[-\sqrt{4\pi(\alpha+1)N}] \cos\left[\sqrt{4\pi(\alpha+1)N} + \frac{3+4\alpha}{8}\pi\right] \quad (3.12)$$

である。 C_2 に沿っての積分の値は, (3.11)により, N が大きい時には, (3.12)の形のものに比べて無視し得るから, 結局, 我々の数値積分公式(1.8)の誤差 E_N の主要項の—— N が大きい時の——漸近表示として

$$E_N \sim a E(N, \alpha) + b E(N, \beta) \quad (3.13)^{**}$$

が得られる。

以上の結果から次のようなことが観察される。

- (i) 数値積分公式 (1.8) に含まれる誤差は、被積分函数 $f(x)$ が適当な素直さを有しているならば、積分区間の両端近くの $f(x)$ の性質によって、ほぼ決定される。
- (ii) 分点の数 $N-1$ を増す時、誤差 ε_N は大略 $\exp[-PN]$ (P はある正の定数) 程度の速さで小さくなる。
- (iii) 積分区間の端 —— 例えば $x=0$ —— で $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)}{x^\alpha} = a$ とする時、誤差 ε_N は α に連続的に依存し、かつ $\alpha < 0$ であっても $-1 < \alpha$ でありさえすれば、 $N \rightarrow \infty$ の時 ε_N は相当な速さで 0 に向かう。これは多項式補間に基礎を置く通常の数値積分公式には見られない性質である。

これらの性質とは別に

$$\left. \begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} w_n^{(N)} &= 1, \quad w_n^{(N)} > 0 \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \max |x_{n+1}^{(N)} - x_n^{(N)}| &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

* 補遺をも参照のこと。(3.8) に注意

** $\alpha \neq \beta$, 列えば $\alpha > \beta$ かつ $\varepsilon_N \sim c \varepsilon(N, \beta)$ かつ $\alpha = \beta$ で $a+b \neq 0$ かつ $\varepsilon_N \sim (a+b) \varepsilon(N, \alpha)$ となる, 等々。しかし $\alpha = \beta$ で $a+b=0$ の時は $f(z)$ の代りに $\frac{1}{2}[f(z)+f(1-z)]$ を考えて, それが適当な性質を有していると仮定して話を進めればよい。

であることから

(iv) 区間 $[0, 1]$ における任意の連続函数 $f(x)$ に対して

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \int_0^1 f(x) dx \quad (3.15)$$

である。

ということも認められた。また

(v) 上記の漸近誤差評価が成り立つためには、 $z=0$, $z=1$ 以外における函数 $f(z)$ の特異点は実軸からある程度離れていなければならない；やゝ定量的に表現すれば、複素 z 平面の領域 Δ の $\varphi(t)$ による像は複素 z 平面では実軸から約 $\sqrt{\frac{4(r+1)}{\pi N}}$ ($\varphi'(\frac{1}{2}) \doteq 3\sqrt{\frac{r+1}{N}}$ ($\varphi'(\frac{1}{2}) \doteq 2.6$) 程度の距離の範囲内にあるとみてよいから、 z 平面上で実軸の区間 $[0, 1]$ から最も近い $f(z)$ の特異点までの距離が δ である時、分割の数 N を $\frac{9(r+1)}{\delta^2}$ より大きく選べば、上記の評価式が成立するとみてよからう。

4. 数値例

前節 §3 で述べた誤差の各種の性質を数値例について確かめてみるため、我々が行なった実験の中から幾つかを選んで下に示す。

例 1. まず、誤差の N (分点の数 + 1) への依存性を調べ

るために $f(x) = \frac{1}{2}$ をとってみた。この時の誤差 $E_N \equiv S_N - \frac{1}{2}$ と (3.13) による評価 $\frac{1}{2}E(N, 0) + \frac{1}{2}E(N, 0) = E(N, 0)$ とを比較した結果をまとめると、表2 (および図4の $\alpha=0$ の点および曲線) に示す通りになった。これで見ると、前節の評価法は、かなりよく実際の誤差の振舞をとらえていることが解る。

例2. 誤差の大勢は、区間の両端近くの被積分函数 $f(x)$ の性質によって決定されるということを示す例として、 $f(x) = \frac{1}{2}$ の場合と、 $f(x) = (1+e)^{-1}e^x$ の場合との誤差の比較を表3に示す。前節の評価法によれば、両者とも誤差は $E(N, 0)$ 程度であると見積られる。

例3. 積分区間 $[0, 1]$ の両端近くでの被積分函数 $f(x)$ の性質と誤差との関係を調べるために

$$f_{-0.5}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right)$$

$$f_0(x) = \frac{1}{2}$$

$$f_{0.5}(x) = \frac{1}{2} (\sqrt{x} + \sqrt{1-x} - 1)$$

$$f_1(x) = \frac{1}{2} x(1-x) = \frac{1}{2} (x - x^2)$$

$$f_3(x) = \frac{1}{2} x^3(1-x)^3 = \frac{1}{2} (x^3 - 3x^4 + 3x^5 - x^6)$$

の数値積分を試みた。結果は表4に示す通りとなった。(一部は図4にも示してある。) 前節の方法によると、これらの函数 $f_\alpha(x)$ に対する誤差は $E_N \sim E(N, \alpha)$ と評価される。

補遺 1. 定数 Q および 関数 $\psi(t)$ の数値計算

(1.3) で定義される定数 Q と (1.4) で定義される 関数 $\psi(t)$ を数値計算して 分点 $x_n^{(256)}$, 重み $w_n^{(256)}$ を求めるために我々が用いた方法は, 大略, 下記の通りである。まず, Q および $\psi(t)$ を新しい 関数

$$\psi(t) = \int_0^t \exp\left(-\frac{1}{\tau} - \frac{1}{1-\tau}\right) d\tau \quad (A1.1)$$

で表わすと

$$Q = \psi(1), \quad \psi(t) = \frac{\psi(t)}{\psi(1)} \quad (A1.2)$$

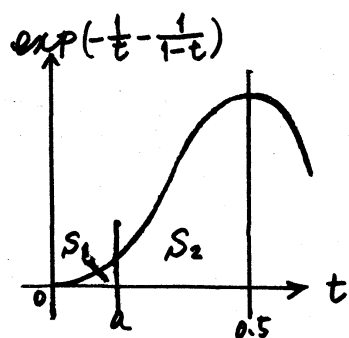
となるから, 最初に 関数 $\psi(t)$ の値を 0 から 1 まで $h (= \frac{1}{256})$ 間隔で求め, その次に全部の値を $\psi(1)$ で割れば求めるものが得られる。

さて, (A1.1) は積分問題であるが, 実際の数値計算ではこれを微分方程式の初期値問題

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \exp\left(-\frac{1}{t} - \frac{1}{1-t}\right) \quad \psi(0) = 0 \quad (A1.3)$$

に変形して, t を $h (= \frac{1}{256})$ 間隔で 0.5 まで $\psi(t)$ の値を求める。それより先は (A1.3) の右辺が 0.5 を中心に対称であるから
公式 $\psi(t) = 2\psi(0.5) - \psi(1-t)$ (A1.4)

を使って求めることができる。なお (A1.3) の右辺は、 $t=0$ で特異点になっているが、この処置として、出発点を a だけずらし、 $\psi(a)=0$ とし、 0 と a の間に含まれる点の ψ の値を



全部 0 とすればよい。図のように $t=a$ で分けられた 2 つの面積を S_1 と S_2 とお.

我々は相対誤差を 10^{-32} の精度で計算を進めたので $a = \frac{3}{256}$ とした。この時、 $S_1 < \frac{1}{2} a \exp(-\frac{256}{3}) \doteq 0.7 \times 10^{-31}$ となり、

この面積は無視できる。

微分方程式 (A1.3) の数値解を求めるのに補外法を適用した。今、ある刻み巾 h で求められた近似解の漸近展開式

$$T(h) = T_0 + a_1 h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + a_3 h^{p_3} + \dots \quad (A1.5)$$

のベキ列 $p_1, p_2, p_3, \dots$ が解っている時、相異なる n 個の h ($h_0 > h_1 > \dots > h_{n-1}$) で求められた $T(h_0), T(h_1), \dots, T(h_{n-1})$ から真の値 T_0 を予測する。これを $T_0^{(n)}$ とする。 $p_i = p_j$ である時に $T_0^{(n)}$ の誤差は $(h_0 \cdot h_1 \cdot \dots \cdot h_{n-1})^{p_i}$ に比例する。したがって $T_0^{(n)}$ のもう一つの誤差は $|T_0^{(n)} - T_0^{(n+1)}|$ で評価できるので、所望の精度が得られるまで刻み巾の列 h_j を進めて計算を行なってゆけばよい。実際には、微分方程式の数値解法としては中点則を用いたので、 $p_j = 2j$ となる。

我々は初めのうち、2倍精度で計算を行っていたが、理論的に、それより先のことが必要になった。東京大学大型計算機センターの4倍精度計算のルーチンを利用した。

補遺2. $\psi(t)/\psi'(t)$ の $t=0$ の付近 ($\text{Re } t > 0$) での漸近展開

$\text{Re } t > 0$ で $|t|$ が十分小さいとき

$$\begin{aligned} \int_0^t \tau^n \exp\left[-\frac{1}{\tau}\right] d\tau &= \int_{1/t}^{\infty} a^{-(n+2)} \exp[-a] da \\ &= \left[-a^{-(n+2)} \exp[-a]\right]_{1/t}^{\infty} - (n+2) \int_{1/t}^{\infty} a^{-(n+3)} \exp[-a] da \\ &= t^{n+2} \exp\left[-\frac{1}{t}\right] - (n+2) \int_0^t \tau^{n+1} \exp[-\tau] d\tau \\ &\sim \left[t^{n+2} - (n+2)t^{n+3} + (n+2)(n+3)t^{n+4} - \dots\right] \exp\left[-\frac{1}{t}\right] \end{aligned} \quad (\text{A2.1})$$

という関係がある(ただし、積分路は0と t を結ぶ直線分、および0から出発して $1/t$ を通る半直線の $1/t$ から無限遠点までの部分とする)。

$|t|$ が十分小さいとして

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{1}{t} - \frac{1}{1-t}\right] \\ &= \frac{1}{2} \exp\left[-1-t-t^2-t^3-\dots\right] \exp\left[-\frac{1}{t}\right] \\ &= \frac{1}{2} (1-t-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{6}t^3-\dots) \exp\left[-\frac{1}{t}\right] \end{aligned} \quad (\text{A2.2})$$

に対して (A2.1) を用いると

である。そこで,

$$t-t_0 = \frac{\rho^{3/2}}{\sqrt{2(\alpha+1)}} \tau \quad (\text{A3.8})$$

が, 実数パラメータ τ (0 の近くを動く) による曲線 C_1 (t_0 の近くの部分) の近似的な表現式となる*。 (A3.8) が曲線 C_1 の, よい近似表現であるための条件は, (A3.7) から見られるように

$$|t-t_0| < |\rho|^{4/3} \quad \text{あるいは} \quad |\tau| < |\rho|^{-1/6} \quad (\text{A3.9})$$

である。一方, N が十分大きければ (A3.9) が成立する範囲内でも $|\tau|$ が相当大きく — 例えば T まで — とれる。よって (A3.8) でよく近似し得る積分路 C_1 の部分を $\tilde{C}_1$ と書けば,

$$\int_{\tilde{C}_1} \exp[f(t)-f(t_0)] dt = \frac{\rho^{3/2}}{\sqrt{2(\alpha+1)}} \int_{-T}^T \exp\left[-\frac{\tau^2}{2}\right] d\tau \quad (\text{A3.10})$$

の値は, T が相当大きければ,

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{C}_1} \exp[f(t)-f(t_0)] dt &\doteq \frac{\rho^{3/2}}{\sqrt{2(\alpha+1)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\tau^2}{2}\right] d\tau \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha+1}} \rho^{3/2} \end{aligned} \quad (\text{A3.11})$$

* C_1 としては, t_0 を通り, $\text{Im}(f(t)-f(t_0))=0$ なる曲線で, その上では $\text{Re}(f(t)-f(t_0))$ が t_0 において最大になるようなものが選ばれる。この C_1 のより大域的な形をより詳しく補遺4で論じる。

としてよい。また, $\operatorname{Re}[f(t)-f(t_0)]$ が $C_1-\tilde{C}_1$ においては,
 $\tilde{C}_1$ の両端におけるより更に小さく (負に大きく) なるから
 $|\exp[f(t)-f(t_0)]|$ は $C_1-\tilde{C}_1$ の上では無視し得るぐらい小さいと見てよい。そこで

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \exp[f(t)-f(t_0)] dt \\ \doteq \int_{\tilde{C}_1} \exp[f(t)-f(t_0)] dt \doteq \sqrt{\frac{\pi}{\alpha+1}} \rho^{3/2} \end{aligned} \quad (\text{A3.12})$$

すなわち

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q^{\alpha+1}} \int_{C_1} \exp[f(t)] dt &= \frac{1}{Q^{\alpha+1}} \exp[f(t_0)] \int_{C_1} \exp[f(t)-f(t_0)] dt \\ &\sim \frac{1}{Q^{\alpha+1}} \exp\left[-\frac{2(\alpha+1)}{\rho} - (\alpha+1) + 2\alpha \log \rho\right] \sqrt{\frac{\pi}{\alpha+1}} \rho^{3/2} \\ &= \frac{1}{(eQ)^{\alpha+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha+1}} \left(\frac{\alpha+1}{2\pi N}\right)^{\frac{3}{4}+\alpha} \exp\left[-\sqrt{8\pi(\alpha+1)N} e^{-i\frac{\pi}{4}} + i\frac{3+4\alpha}{8}\pi\right] \\ &= \frac{1}{(eQ)^{\alpha+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha+1}} \left(\frac{\alpha+1}{2\pi N}\right)^{\frac{3}{4}+\alpha} \exp\left[-\sqrt{4\pi(\alpha+1)N} + i\left\{\sqrt{4\pi(\alpha+1)N} + \frac{3+4\alpha}{8}\pi\right\}\right] \end{aligned} \quad (\text{A3.13})$$

が得られる。(A3.13) の実数部の2倍を $\mathcal{E}(N, \alpha)$ と記すことにすると,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(N, \alpha) &= \frac{1}{(eQ)^{\alpha+1}} \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha+1}} \left(\frac{\alpha+1}{2\pi N}\right)^{\frac{3}{4}+\alpha} \exp\left[-\sqrt{4\pi(\alpha+1)N}\right] \cos\left[\sqrt{4\pi(\alpha+1)N} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3+4\alpha}{8}\pi\right] \end{aligned} \quad (\text{A3.14})$$

である。

補遺4. 積分路 C_1 の概形

鞍点 t_0 を通る積分路 C_1 の概形は次の通りである。 N が十分大で、 ρ や t_0 が十分小さい所では、 (A3.3) を更に簡略化して

$$f(t) \doteq i2\pi Nt - (\alpha+1)t^{-1} \quad (\text{A4.1})$$

と置いてよい。この時

$$f'(t_0) = 0 \quad (\text{A4.2})$$

を満足する t_0 は

$$t_0 = \rho \equiv \sqrt{\frac{\alpha+1}{2\pi N}} \exp\left[i\frac{\pi}{4}\right] \quad (\text{A4.3})$$

である。また

$$f(t) = f(t_0) = i2\pi Nt - \frac{\alpha+1}{t} + \sqrt{8\pi(\alpha+1)N} \exp\left[-i\frac{\pi}{4}\right] \quad (\text{A4.4})$$

となる。そこで

$$t = \sqrt{\frac{\alpha+1}{4\pi N}} (x + iy) \quad (\text{A4.5})$$

により実変数 x, y を導入すると、 t_0 は $(x, y) = (1, 1)$ に対応し

$$\text{Im}\{f(t) - f(t_0)\} = \sqrt{4\pi(\alpha+1)N} \left[\frac{x}{2} + \frac{y}{x^2 + y^2} - 1 \right] \quad (\text{A4.6})$$

となる。したがって、 t 平面上における曲線

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \int_0^t \varphi'(\tau) d\tau \\
&\sim \frac{1}{eQ} \left(t^2 - 3t^3 + \frac{17}{2} t^4 - \frac{205}{6} t^5 + \dots \right) \exp\left[-\frac{1}{t}\right]
\end{aligned}
\tag{A2.3}$$

を得る。そこで (A2.2) の右辺に

$$\begin{aligned}
1 &= Q \exp\left[\frac{1}{1-t}\right] \exp\left[\frac{1}{t}\right] \varphi'(t) \\
&= Q \exp\left[1+t+t^2+t^3+\dots\right] \exp\left[\frac{1}{t}\right] \varphi'(t) \\
&= eQ \left(1+t+\frac{3}{2}t^2+\frac{13}{6}t^3+\dots\right) \exp\left[\frac{1}{t}\right] \varphi'(t)
\end{aligned}
\tag{A2.4}$$

を掛けて

$$\varphi(t) \sim (t^2 - 2t^3 + 7t^4 - 28t^5 + \dots) \varphi'(t) \tag{A2.5}$$

という漸近展開式を得る。

補遺 3. $\varphi(t)^\alpha \varphi'(t)$ の Fourier 係数の計算

§3で論じた通り, C_N (の実数部の2倍) を求めるためには, $z=0$ の近くで $f(z) \doteq z^\alpha$, $z=1$ の近くで $f(z) \doteq (1-z)^\alpha$ であるとして, それぞれ複平面上の積分路 C_1 および C_3 に沿っての $f(t) \exp[i2\pi Nt]$ の積分 (の実数部の2倍) を計算すればよい。

$t=1$ の近くについても, 全く同様であるから, $t=0$ の近くについてだけ調べればよい。すなわち

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= z^\alpha, \quad g(t) \exp[i2\pi Nt] = \frac{1}{Q^{m+1}} \exp[g(t)], \\ g(t) &= i2\pi Nt - \frac{1}{t} - \frac{1}{1-t} + \alpha \log[Q\psi(t)] \end{aligned} \right\} \quad (A3.1)$$

$$\text{とし, } 2\operatorname{Re} \int_{C_1} \exp[g(t)] dt \quad (A3.2)$$

の漸近評価式 $\varepsilon(N, \alpha)$ を求めねばよい。

まず, $0 < \arg t < \frac{\pi}{2}$ で $|t|$ が小さい所で, $g'(t)$ が 0 となる点 t_0 —— すなわち鞍点 —— を求める。(A2.5) により,

$$\left. \begin{aligned} g(t) &= i2\pi Nt - (\alpha+1)t^{-1} + 2\alpha \log t - (\alpha+1) + o(t), \\ g'(t) &= i2\pi N + (\alpha+1)t^{-2} + 2\alpha t^{-1} + o(1) \end{aligned} \right\} \quad (A3.3)$$

であるから,

$$f \equiv \sqrt{\frac{\alpha+1}{2\pi N}} \exp\left[i\frac{\pi}{4}\right] \quad (A3.4)$$

とおけば

$$t_0 \equiv f \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha+1} f + o(f^2)\right) \quad (A3.5)$$

を得る。そして, t_0 においては

$$\left. \begin{aligned} g(t_0) &= -\frac{2(\alpha+1)}{f} + 2\alpha \log f - (\alpha+1) + o(f), \\ g'(t_0) &= 0, \\ g''(t_0) &= -\frac{2(\alpha+1)}{f^3} (1 + o(f)), \\ g^{(m)}(t_0) &= o(f^{-(m+1)}) \end{aligned} \right\} \quad (A3.6)$$

$$I_m[f(t) - f(t_0)] = 0$$

は (x, y) 平面上では

$$(x-2)(x^2+y^2)+2y=0$$

なる代数曲線に 대응する。この代数曲線に対して曲線追跡の慣習的手法を適用することによって以下の事実がわかる。

(i) この曲線の多重点は $(x, y) = (1, 1)$ のみで、多重度は2である。そして、そこでの切線の勾配は $1 \pm \sqrt{2}$ である。

(ii) この曲線と勾配 ε の直線 $y-1 = \varepsilon(x-1)$ との、 $(x, y) = (1, 1)$ 以外の、交点は任意の実数 ε に対して唯一つ定まる。

すなわち、この曲線はパラメータ ε により

$$x-1 = \frac{\varepsilon^2 - 2\varepsilon - 1}{\varepsilon^2 + 1}, \quad y-1 = \frac{\varepsilon(\varepsilon^2 - 2\varepsilon - 1)}{\varepsilon^2 + 1} \quad (A4.8)$$

と表わされる。

(iii) 特殊な ε の値に対する曲線上の点 (x, y) , 切線の勾配 dy/dx , および、その変化の様子は下表の通りである。

ε	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		$1-\sqrt{2}$		$*$		0
x	2	$\nearrow$	$1+\sqrt{2}$	$\searrow$	2	$\searrow$	1	$\searrow$	$*$	$\searrow$	0
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-1-\sqrt{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$*$	$\searrow$	1
dy/dx		$+$	∞	$-$	-2	$-$	$1-\sqrt{2}$	$-$	0	$+$	$1/2$

		$\sqrt{2}-1$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
	$\searrow$	$1-\sqrt{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2
	$\searrow$	$\sqrt{2}-1$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
	$+$	∞	$-$	0	$+$	$1+\sqrt{2}$		

曲線の概形は図6のようになる。ここで実線で示した部分は
 その一部が積分路 C_1 として採用されるものであり、その上で
 は2重点において、 $\operatorname{Re}\{f(t)-f(t_0)\}$ が最大 (=0) となり、そ
 から離れて $t \rightarrow 0$, $t \rightarrow \sqrt{\frac{\alpha+1}{\pi N}} + i\infty$ となると $\rightarrow -\infty$ となる。
 一方、破線の部分では、 $\operatorname{Re}\{f(t)-f(t_0)\}$ が2重点において、
 最小 (=0) で、そこから離れると共に増大し、 $t \rightarrow 0$, $t \rightarrow \sqrt{\frac{\alpha+1}{\pi N}} - i\infty$
 となると $\rightarrow +\infty$ となる。

[illegible]

NO.

X(I)

A(I)

31	0.1436980829	0314729785	8346534300	180-03	0.1181655719	0897445475	4342571389	990-01
32	0.1962922309	7988574645	6080633777	680-03	0.1521812042	1124784653	3194306634	330-01
33	0.2634674995	5531007671	9885987263	240-03	0.1929384577	4942982660	8156153328	780-01
34	0.3479943625	5464414621	7737893223	830-03	0.2411367424	8529934929	2696856697	700-01
35	0.4529133459	3621051146	2943731959	660-03	0.2974577897	2327572179	7112236965	480-01
36	0.5815263947	8483423716	5678258078	980-03	0.3625569668	5703608190	3749096961	580-01
37	0.7373850396	2747189854	5830985217	040-03	0.4370555903	4709966509	0009240169	860-01
38	0.9242757669	3959523299	6211659642	500-03	0.5215343055	7373580334	7865945220	880-01
39	0.1146203016	4454365067	8652883055	800-02	0.6165275567	0769592089	2442061680	130-01
40	0.1407370229	4191567961	6352447541	130-02	0.7225191331	1838443803	9866957546	420-01
41	0.1712159361	1489424281	2185990952	550-02	0.8399387505	8018809029	8036567212	840-01
42	0.2065109250	1424661567	1938642316	400-02	0.9691596048	0141845442	5152762755	590-01
43	0.2470893209	2757200133	4243590608	540-02	0.1110496820	5831763379	3848272396	220-00
44	0.2934296172	2595792349	0545339964	890-02	0.1264206711	1683292918	3201459879	010-00
45	0.3460191694	4557375655	7306577664	930-02	0.1430486758	0468714727	3959925933	220-00
46	0.4053519071	7693082677	2168406134	250-02	0.1609476220	7065306636	1160364812	910-00
47	0.4719260806	2871094913	1842215232	000-02	0.1801257287	7258719166	7003258366	850-00
48	0.5462420613	4241903622	9024415733	760-02	0.2005856684	4867355383	6245720622	470-00
49	0.6288002133	2358813495	6664219002	490-02	0.2223247658	0349330729	4432519822	970-00
50	0.7200988478	6856728427	6504200973	800-02	0.2453352265	7530608846	4753747407	300-00
51	0.8206322726	2959983087	3302129686	050-02	0.2696043901	1359553021	6146084984	790-00
52	0.9308889429	8794628978	6173482107	200-02	0.2951149996	7728671554	8882301319	170-00
53	0.1051349721	5977872802	1772432239	990-01	0.3218454851	4097102063	9047229482	490-00
54	0.1182486250	0173345415	4073650143	620-01	0.3497702534	5201199754	2270937133	410-00
55	0.1324759434	6471508642	7127941422	940-01	0.3788599828	0363431254	5387973942	220-00
56	0.1478618047	7344673228	7135564326	810-01	0.4090819170	7014772828	1335507644	780-00
57	0.1644497442	9591988941	2099544766	660-01	0.4404001575	8565585110	9311852119	240-00
58	0.1822818384	0739857103	2899394717	450-01	0.4727759498	3473888478	2060516110	130-00
59	0.2013985984	2080350792	9009079150	160-01	0.5061679630	6233757523	3719288539	850+00
60	0.2218388752	7440645804	8529245321	300-01	0.5405325612	0142537659	2335175260	370+00

表 1-3

108

NO.	X(I)		A(I)	
61	0.2436397746	1211048599	7706885862	530-01
62	0.2668365818	4860815696	1775373599	670-01
63	0.2914626967	7978453514	0840853829	470-01
64	0.3175495772	7637776385	7885065970	810-01
65	0.3451266915	8476768054	2994672852	880-01
66	0.3742214787	5160247599	2421706134	020-01
67	0.4048593166	8769115822	5424256238	920-01
68	0.4370634973	9020260647	4078760603	860-01
69	0.4708552088	4985107514	4255700272	690-01
70	0.5062535231	8064955746	5965890003	230-01
71	0.5432753905	2330998826	8470014481	770-01
72	0.5819356382	8888485223	9454666839	130-01
73	0.6222469753	2628028419	6072625270	330-01
74	0.6642200006	1539981513	4312862363	890-01
75	0.7078632161	0653805934	0643127041	560-01
76	0.7531830433	4592902280	2533894978	230-01
77	0.8001838435	4680843552	9342881635	580-01
78	0.8488679407	8476144141	7040433975	440-01
79	0.8992356480	1532218553	7760726052	640-01
80	0.9512852956	3062954870	3715246873	400-01
81	0.1005013262	2903113718	9055884196	430-00
82	0.1060414007	7795804967	2503786627	020-00
83	0.1117480107	6647133928	6470068325	060-00
84	0.1176202289	5325975312	7751625440	840-00
85	0.1236569470	6168436201	1508061255	410-00
86	0.1298568796	6280426918	1830783362	660-00
87	0.1362185681	6200957652	0328627024	820-00
88	0.1427403848	7381541203	5892097671	670-00
89	0.1494205371	7065870098	5355713161	670-00
90	0.1562570716	9275525854	9898079236	000-00
	0.5758240638	6302811725	3577295387	820+00
	0.6119949964	3637513994	8687437364	270+00
	0.6489963286	1048452494	2821499033	490+00
	0.6867777008	5555003260	0309835251	200+00
	0.7252876385	9642888432	8644874197	270+00
	0.7644737539	7460986117	7348043130	610+00
	0.8042829352	3244034917	1439409458	120+00
	0.8446615238	6711536007	6162306886	980+00
	0.8855554797	9479185234	8292195421	160+00
	0.9269105348	3978454950	4219931639	920+00
	0.9686723349	2250013600	0384749604	500+00
	0.1010786571	3647293577	2263156461	590+01
	0.1053199101	7640802108	3207480109	120+01
	0.1095856060	9124338321	7184007773	420+01
	0.1138703962	2478787122	8414711622	380+01
	0.1181689790	3369900765	9352674792	920+01
	0.1224761084	8857666725	2859767567	450+01
	0.1267866016	7740636231	6248533811	450+01
	0.1310953456	6008785444	4144017457	410+01
	0.1353973036	2171478102	3463548395	560+01
	0.1396875203	7094706500	1888493031	720+01
	0.1439611272	2829836631	0819437811	110+01
	0.1482133463	4749545016	9486958965	610+01
	0.1524394945	1129724816	8602149676	500+01
	0.1566349864	4132409670	8271234718	260+01
	0.1607953376	5957188231	1769664122	170+01
	0.1649161669	3739628780	4794521333	640+01
	0.1689931983	6586932599	5201550841	920+01
	0.1730222630	7955039827	3994615774	400+01
	0.1769993006	6389050325	7412152380	230+01

NO.	X(I)	A(I)
91	0.1632478786 0722032729 5123853379 950-00	0.1809203602 7471143797 8764742963 750+01
92	0.1703906959 0573287259 2799420425 570-00	0.1847816014 9647999679 0394126376 580+01
93	0.1776831137 3103505518 7220413797 130-00	0.1885792949 6443637744 5226521737 120+01
94	0.1851225787 2350579741 6420114649 020-00	0.1923098227 7404063955 6684437373 590+01
95	0.1927063983 7993386614 5663903879 480-00	0.1959696786 9967408290 1211254547 580+01
96	0.2004317454 1744412044 4033344271 380-00	0.1995554682 4307557824 5503762770 660+01
97	0.2082956621 3630327320 7334767091 060-00	0.2030639085 3060695330 8087623880 890+01
98	0.2162950647 7605146430 9177064526 300-00	0.2064918280 7712645408 5173803804 630+01
99	0.2244267478 6007589373 1628183266 430-00	0.2098361664 3300434240 3574584979 360+01
100	0.2326873885 2436543256 2236048537 870-00	0.2130939737 2963859124 0363008167 120+01
101	0.2410735508 2676317579 6614678986 860-00	0.2162624101 3771970916 7998546218 150+01
102	0.2495816900 3356990874 8207172703 610-00	0.2193387452 5144993916 2595541440 890+01
103	0.2582081568 8084792941 2628563949 260-00	0.2223203574 1094115498 7570540194 290+01
104	0.2669492018 0823401030 2225592848 860-00	0.2252047329 7409525233 1169554374 760+01
105	0.2758009791 6349480383 6670150317 050-00	0.2279894655 4840810145 3212211633 900+01
106	0.2847595513 7644990073 6155932048 160-00	0.2306722551 9233050708 1881032843 800+01
107	0.2938208931 0124914043 3856941582 860-00	0.2332509075 9506437601 7209837524 870+01
108	0.3029808953 2632363853 1711317313 240-00	0.2357233332 4296667355 4438434388 310+01
109	0.3122353694 5163622368 9795208620 890-00	0.2380875465 8007501591 1894797354 620+01
110	0.3215800513 3313834345 2276458558 750-00	0.2403416651 6965418632 0603286390 300+01
111	0.3310106052 9459867870 2066368765 210-00	0.2424839088 6308981167 4542059823 730+01
112	0.3405226281 0720526999 4932781067 950-00	0.2445125989 8192128654 5094926829 830+01
113	0.3501116529 3755937564 0290991181 560-00	0.2464261575 1830824033 0013757932 380+01
114	0.3597731532 6487692288 2594119513 340-00	0.2482231063 5876094254 3940111979 170+01
115	0.3695025467 6839355676 0621182297 300-00	0.2499020665 3553263882 5923340950 830+01
116	0.3792951991 8613312115 2107305129 680-00	0.2514617575 0966859320 2968261715 920+01
117	0.3891464281 4634801932 3507333412 820-00	0.2529009964 8933034713 2400510848 030+01
118	0.3990515069 7307430747 6847933245 610-00	0.2542186977 8666223827 1282466557 950+01
119	0.4090056684 6736550214 2236754746 450-00	0.2554138722 1613847414 2208121587 490+01
120	0.4190041086 6587777893 1011994144 730-00	0.2564856265 3702102439 5619999979 550+01

表 1-5

NO.	X(I)		A(I)	
121	0.4290419905	7857627739	7150350542	740-00
122	0.4391144479	0741830162	1469319310	230-00
123	0.4492165887	4794494402	3351536613	510-00
124	0.4593434992	7577861684	8660104637	850-00
125	0.4694902474	2008064056	9985472606	610-00
126	0.4796518865	2607083451	9357106177	000-00
127	0.4898234590	0875034225	1418294500	500-00
128	0.5000000000	0000000000	0000000000	000+00
	0.2574331629	4226934736	4787471520	230+01
	0.2582557785	9597063573	8912613757	020+01
	0.2589528652	2110204799	9132500142	870+01
	0.2595239087	3919253919	2637902584	100+01
	0.2599684889	6321972060	3287558078	730+01
	0.2602862793	4485501277	6505649824	730+01
	0.2604770467	7695660015	9074563677	430+01
	0.2605406514	5200277247	7762398744	270+01

表2. $f(x) = \frac{1}{2}$ の場合の ε_N と $\varepsilon(N, 0)$

N	ε_N		$\varepsilon(N, 0)$	
2	0.15	0	0.18	0
4	-0.26	-2	-0.55	-2
5	-0.40	-2	-0.48	-2
6	-0.18	-2	-0.19	-2
7	-0.46	-3	-0.39	-3
8	0.32	-4	0.90	-4
10	0.10	-3	0.11	-3
12	0.22	-4	0.21	-4
14	-0.23	-5	-0.34	-5
16	-0.35	-5	-0.38	-5
20	-0.19	-6	-0.16	-6
25	0.80	-7	0.84	-7
32	-0.45	-8	-0.49	-8
64	-0.32	-12	-0.30	-12
128	-0.42	-17	-0.42	-17
256	0.40	-25	0.38	-25

表3 相異なる $f(x)$ に対する ε_N

N	$f(x) = \frac{1}{2}$ に対する ε_N	$f(x) = (1+e)^{\frac{1}{2}}$ に対する ε_N	$\varepsilon(N, 0)$
2	0.15 0	0.12 0	0.18 0
4	-0.26 -2	-0.40 -2	-0.55 -2
8	0.32 -4	0.35 -4	0.90 -4
16	-0.35 -5	-0.35 -5	-0.38 -5
32	-0.45 -8	-0.45 -8	-0.49 -8
64	-0.32 -12	-0.32 -12	-0.30 -12
128	-0.42 -17	-0.42 -17	-0.42 -17
256	0.40 -25	0.40 -25	0.38 -25

注意: 表中において 小数点を含む数は仮数部を
整数は指数部を示す。

表4(a) $f_\alpha(x)$ に対する ε_N

N	$\alpha = -0.5$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3$
2	-0.16 0	0.15 0	0.10 0	0.79 -1	-0.50 0
4	0.59 -1	-0.26 -2	-0.39 -2	0.34 -2	0.30 -2
8	0.34 -2	0.32 -4	-0.14 -4	-0.83 -5	0.15 -5
16	-0.24 -3	-0.35 -5	0.26 -6	-0.93 -8	-0.35 -10
32	-0.24 -5	-0.45 -8	0.14 -10	0.74 -12	-0.91 -17
64	-0.43 -9	-0.32 -12	0.37 -15	0.12 -17	0.94 -25
128	-0.25 -11	-0.42 -17	0.14 -21	-0.43 -25	?
256	-0.18 -16	0.40 -25	-0.80 -31	?	?

表4(b) $f_\alpha(x)$ に対する $\varepsilon(N, \alpha)$

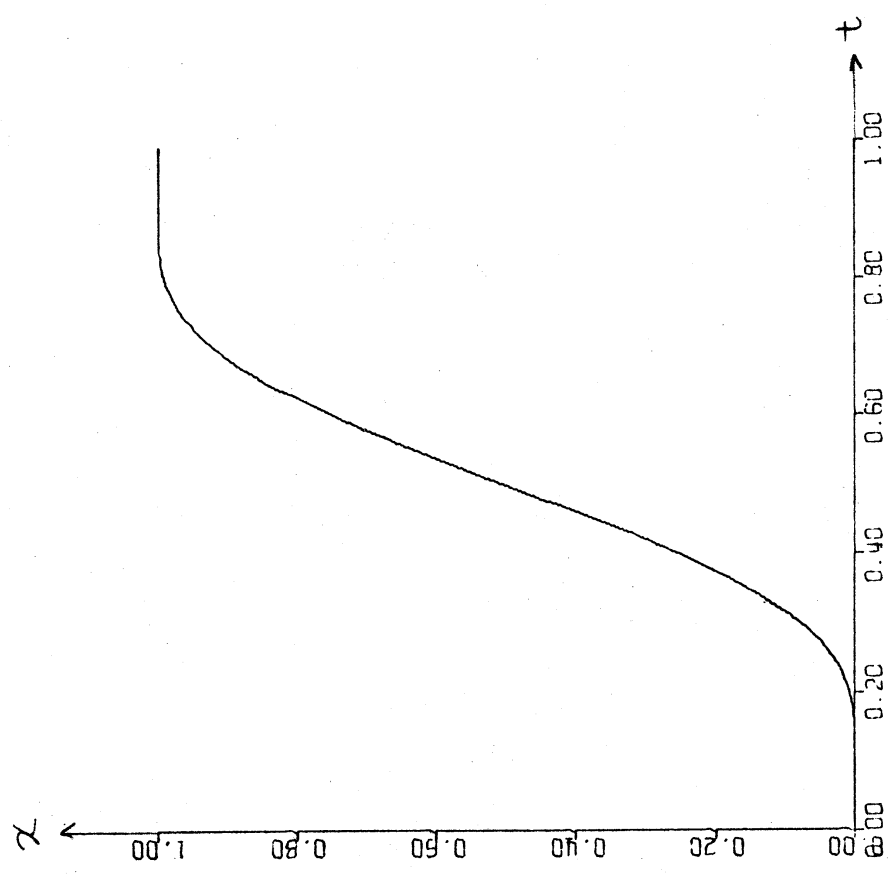
N	$\alpha = -0.5$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 1$	$\alpha = 3$
2	-0.33 0	0.18 0	-0.41 -1	-0.21 0	-0.78 1
4	0.58 -1	-0.55 -2	-0.19 -2	0.35 -2	0.32 -2
8	0.34 -2	0.90 -4	-0.67 -5	-0.58 -5	0.13 -5
16	-0.23 -3	-0.38 -5	0.14 -6	-0.97 -8	-0.34 -10
32	-0.24 -5	-0.45 -8	0.93 -11	-0.99 -12	-0.91 -17
64	-0.34 -9	-0.30 -12	0.45 -15	0.10 -17	0.94 -25
128	-0.24 -11	-0.42 -17	0.14 -21	-0.43 -25	-0.13 -35
256	-0.17 -16	0.38 -25	-0.82 -31	0.24 -36	0.12 -51

表5 $f(x) = \frac{0.125 + 0.5\delta^2}{(x-0.5)^2 + \delta^2}$ に対する ε_N

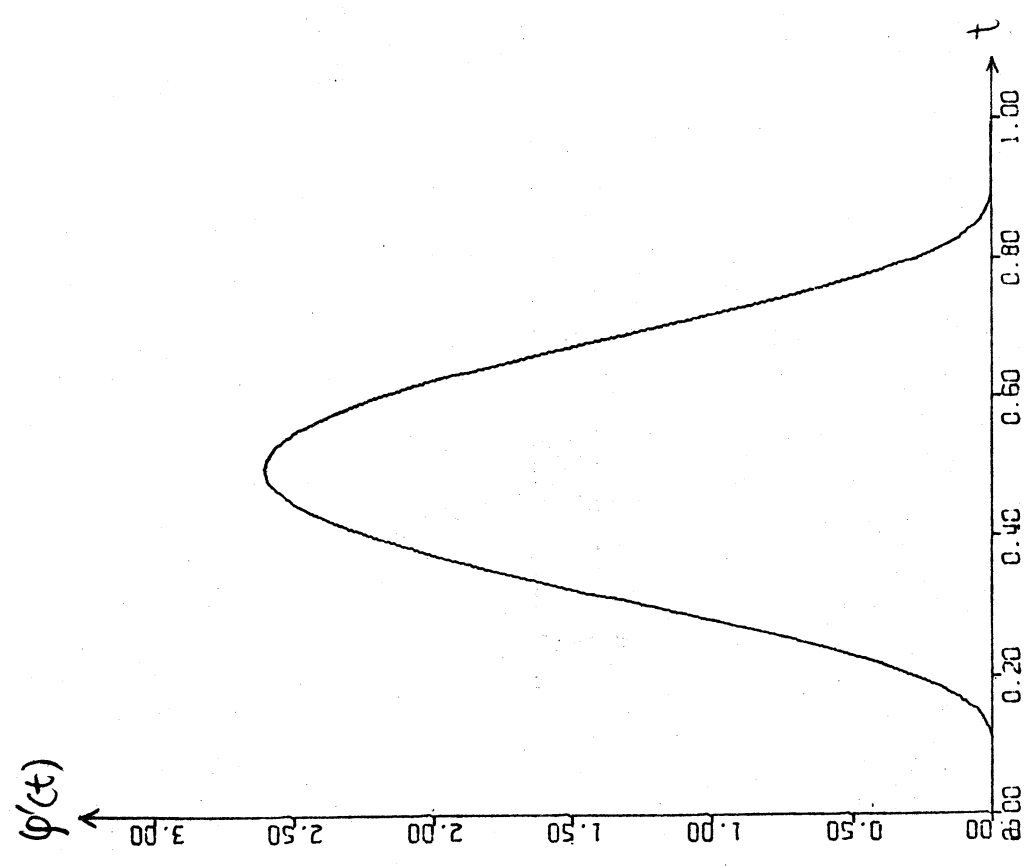
$N \backslash \delta$	1.000	0.500	0.250	0.167	0.100
2	0.23 0	0.52 0	0.19 1	0.44 1	0.13 2
4	0.35 -2	0.49 -1	0.43 0	0.14 1	0.51 1
8	0.30 -4	0.76 -3	0.39 -1	0.23 0	0.14 1
16	-0.35 -5	-0.33 -5	0.38 -3	0.96 -2	0.18 0
32	-0.45 -8	-0.45 -8	0.34 -7	0.18 -4	0.39 -2
64	-0.32 -12	-0.32 -12	-0.32 -12	0.60 -10	0.18 -5
128	-0.19 -16	-0.22 -16	-0.32 -16	-0.15 -16	0.41 -12

1

(b)



(a)



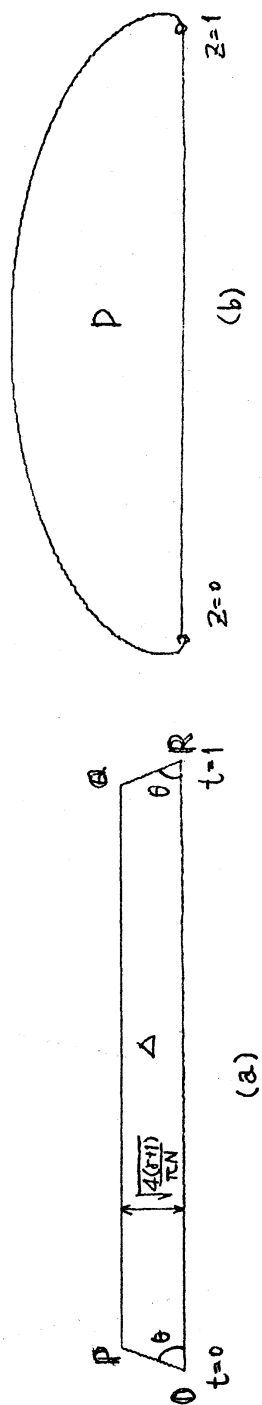


图 2

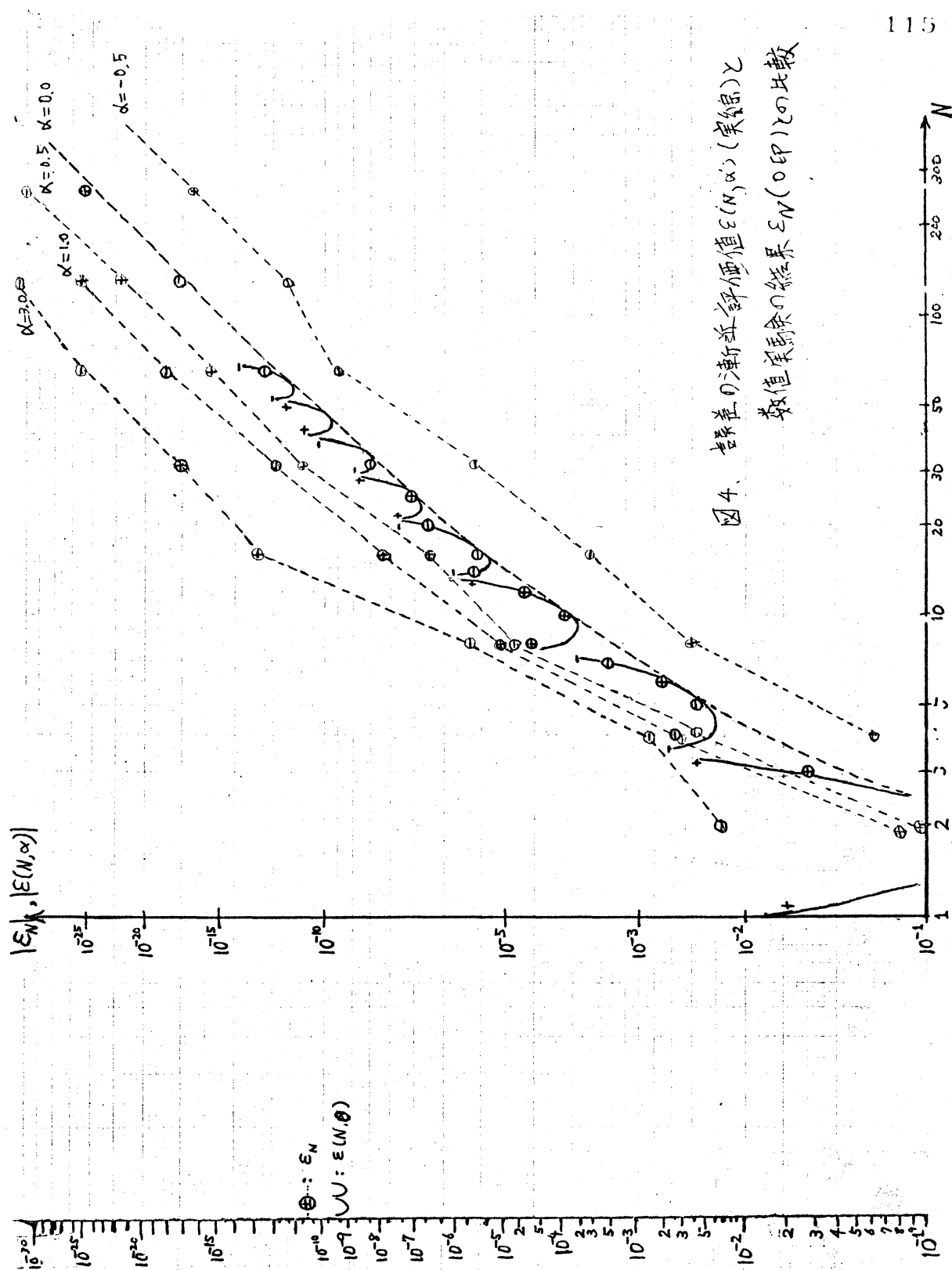
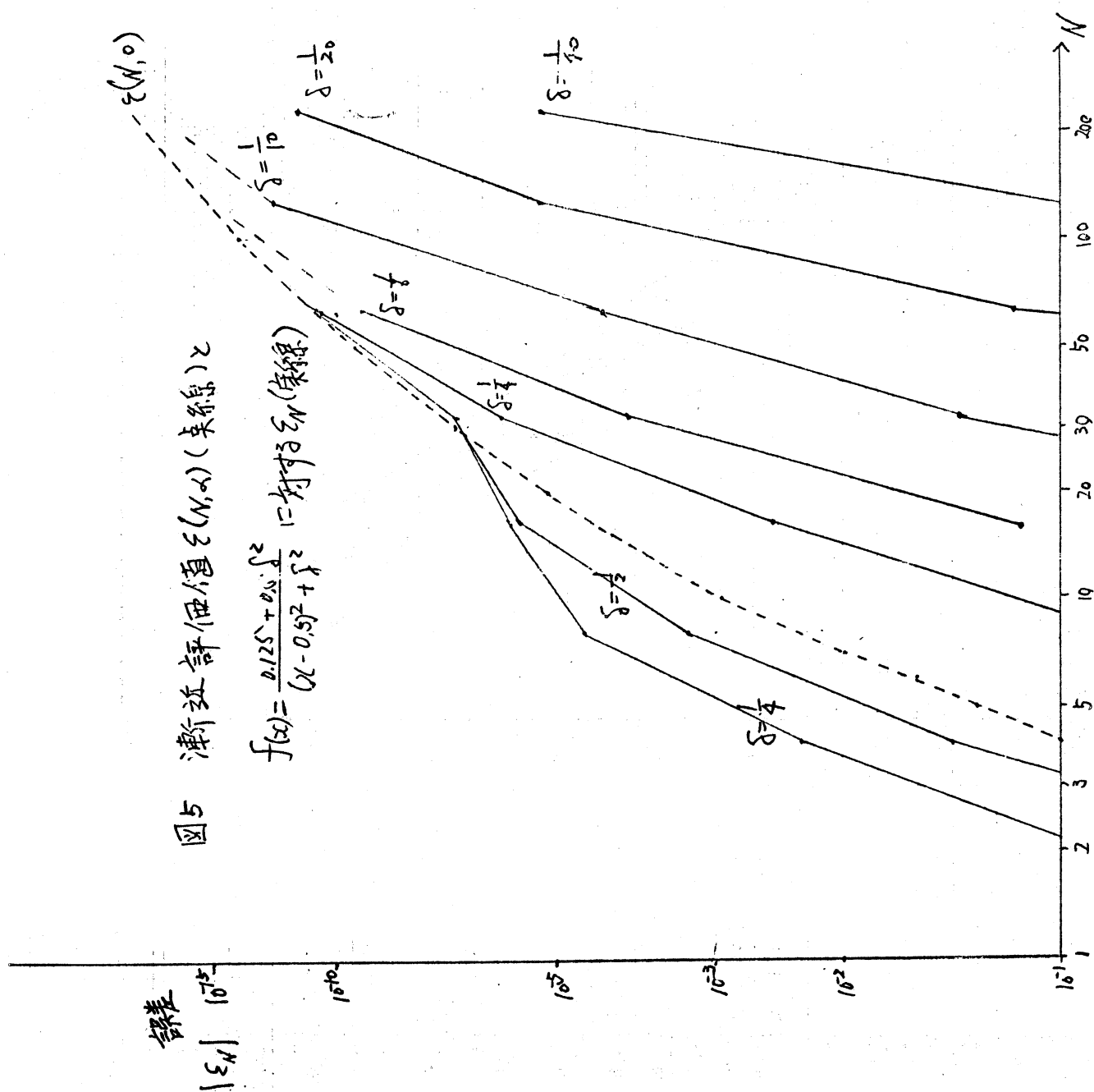
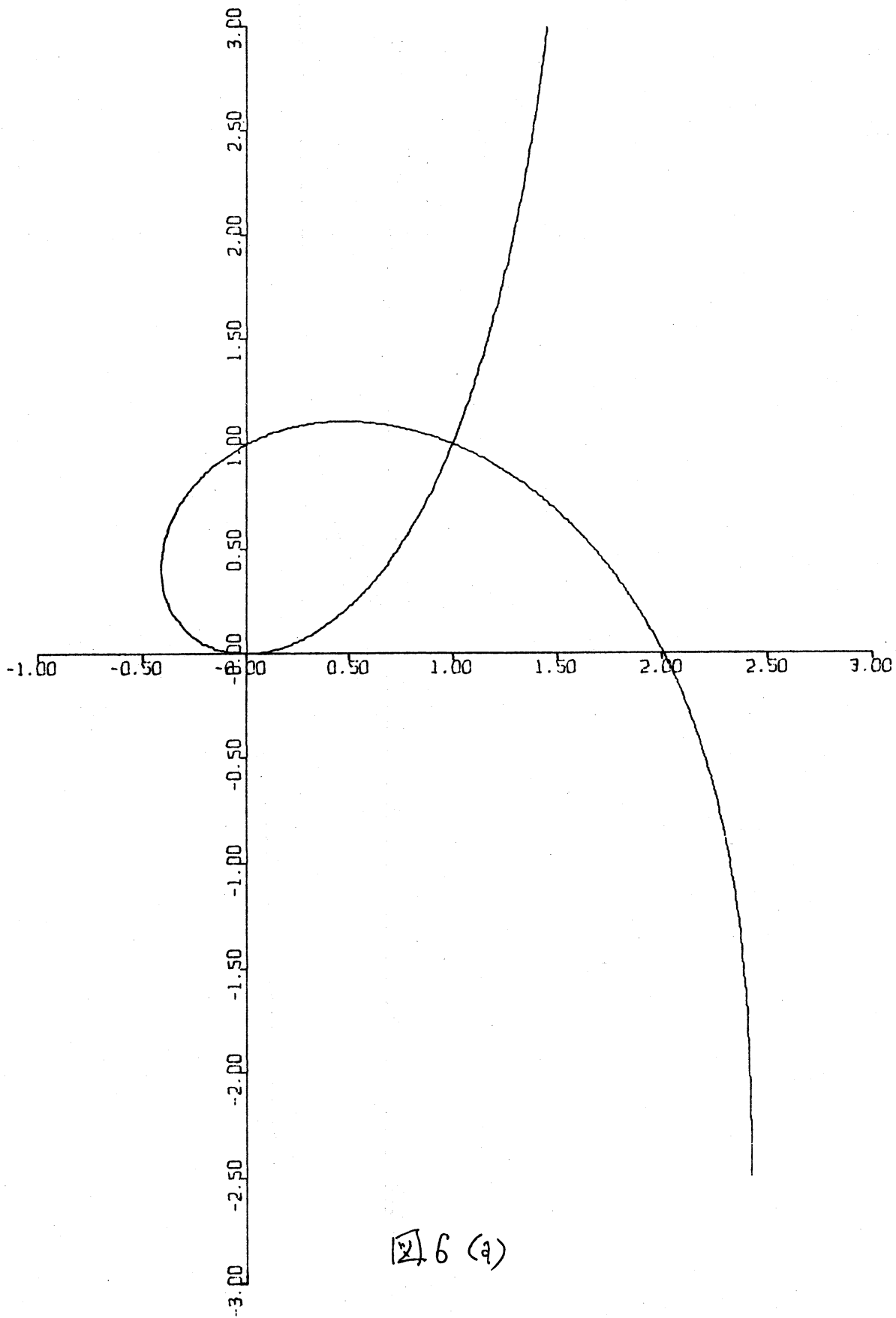


図4. 誤差の漸近値 $\epsilon(N, \alpha)$ (実線) と
 数値実験の結果 $\epsilon_N(0印)$ との比較





2.6 (a)

14) 6 (b)

