

Positive operator の pole について

お茶の水女大 理 竹尾富貴子

§ 1. 序

順序 Banach 空間上の positive operator T に対して, Cesaro mean の一様収束, 即ち uniform ergodicity と, スペクトル半径 $r(T)=1$ の点が, $R(\lambda, T)$ の 1 位の pole になる事との同値性が, S. Karlin によって示されている [3]。この拡張として, $r(T)=1$ が k 位の pole になる為の必要かつ十分条件を, ある type の多項式の一様収束として求めた。そして, この結果を使って, Peripheral spectrum が, pole のみからなる為の必要かつ十分条件を求めた。これは, M. A. Kaashoek and T. T. West が求めている Peripheral spectrum が simple pole のみからなるための必要かつ十分条件 [2] に対して, simple pole を任意の位数の pole にした点で, 拡張になっている。

§ 2. 定義及び準備

Banach 空間 E 上の operator T に対して
Peripheral spectrum は

$$\text{Per } \sigma(T) = \{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| = r(T)\},$$

$S(T)$ は集合 $\{T, T^2, \dots\}$ の $\mathcal{L}(E)$ における閉包,

$A(T)$ は集合 $\{\sum_{i=1}^m a_i T^i ; a_i \geq 0, m \in \mathbb{Z}^+\}$ の閉包,

$k \geq 1$ に対して $C_k(T)$ は

集合 $\{\sum_{i=1}^m a_i T_{k,i} ; a_i \geq 0, m \in \mathbb{Z}^+\}$ である.

ここで,

$$\begin{aligned} T_{k,i} &= \binom{k+i-1}{k} k \sum_{s_{k-1}=0}^1 \cdots \sum_{s_1=0}^1 (-1)^{\sum_{r=1}^{k-1} s_r} \frac{T^{i+\sum_{r=1}^{k-1} s_r}}{i+\sum_{r=1}^{k-1} s_r} \\ &= \binom{k+i-1}{k} k \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s \binom{k-1}{s} \frac{T^{i+s}}{i+s} \end{aligned}$$

である.

$k=1$ の場合, $T_{1,i} = T^i$ であり, 又, $C_1(T)$ の閉包は $A(T)$ となっている. $A(T)$ は semi-algebra になっているが, $C_k(T)$ は $k \neq 1$ の場合は cone ではあるが, semi-algebra にはなっていない.

semi-algebra $A(T)$ が strict とは $A(T) \cap (-A(T)) = \{0\}$ であり, locally compact とは集合 $\{x \in A(T) : \|x\| \leq 1\}$ が $\mathcal{L}(E)$ で compact であり, 又 semi-simple とは $A(T)$ における closed ideal J が $J^2 = \{0\}$ なら $J = \{0\}$ であることをいう.

定義 集合 $\{g(T) \in C_k(T) : \sup_{|\beta|=1} \|g(\beta T)(I - \beta T)^{k-1}\| \leq 1\}$ が $\mathcal{L}(E)$ で relatively compact subset のとき, cone $C_k(T)$ が, k -relatively locally compact であると定義する.

$A(T)$ が locally compact なら $C_1(T)$ は 1-relatively locally compact であるが, 逆は必ずしも成り立たない. しかし, 少し条件を加えると, 次の補題を得る.

補題 1. Banach 空間上の $r(T)=1$ なる operator T に対して 次は同値である.

- i) $A(T)$ が locally compact, semi-simpleかつ strict である.
- ii) $S(T)$ が compact で, 1 はスペクトル $\sigma(T)$ に属する.
- iii) $|\alpha|=1$ なる任意の α に対して $C_1(\alpha T)$ は 1-relatively locally compact で, 集合 $\{\|T^n\| : n=1, 2, \dots\}$ は有界で, 1 は $\sigma(T)$ に属する.
- iv) $C_1(T)$ は 1-relatively locally compact で, 集合 $\{\|T^n\| : n=1, 2, \dots\}$ は有界で, 1 は $\sigma(T)$ に属する.

§3. $r(T)=1$ が pole になる条件。

順序 Banach 空間上の $r(T)=1$ なる positive operator T に対して S. Karlin は次の定理を得ている.[3]

定理 (S. Karlin)

次は同値である。

- i) $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^i$ が一様にある operator に収束する。
- ii) $r(T)=1$ は 1 位の pole である。

この拡張として 次の結果を得た[7]。

定理 1.

順序 Banach 空間上の $r(T)=1$ なる positive operator T に対して、次は同値である。

- i) 1 は高々 k 位の pole である。
- ii) $f_{k,n}(T)$ はある operator P_k に一様収束する。

ここで

$$f_{k,n}(\lambda) = \sum_{s=1}^k a_{k,s} \frac{g_{k,s,n-1}(\lambda)}{g_{k,s,n-1}(1)}$$

$$g_{k,s,n-1}(\lambda) = \sum_{i_1=0}^{n-1} \cdots \sum_{i_2=0}^{i_3} \sum_{i_1=0}^{i_2} \frac{(i_1+s-1)!}{i_1!} \lambda^{i_1}$$

$$\text{かつ } a_{k,s} = (-1)^{s+1} \binom{k}{s} \binom{2k+s-2}{k-1} / \binom{2k-2}{k-1}$$

である。

上定理の多項式 $f_{k,n}(T)$ は一見複雑であるが, $k=1$ の場合は Cesaro mean になっており, 又, その係数 $a_{k,s}$ は 次のような簡単な連立方程式の解になっている.

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^k a_{k,s} = 1 \\ \sum_{s=1}^k \frac{1}{k+j+s-1} a_{k,s} = \frac{1}{k+j-1} \quad 1 \leq j \leq k-1 \end{cases}$$

さらに, この多項式は次の性質を持っている.

$$f_{k,n}(1) = 1 \quad \text{かつ} \quad f_{k,n}^{(j)}(1) = 0 \quad 1 \leq j \leq k-1$$

この多項式の性質から, N. Dunford の定理 ([1] の Th. 3.6) を用いて, 上定理は証明できる.

ここで, 上定理における Ta positivity は 1 が k 位の pole の場合には $T^n/n^k \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を出すために必要であるので, Ta positivity をなくしても次の定理が得られる.

定理 2.

($r(T)=1$ なる)

Banach 空間上の operator T に対して, $T^n/n^k \rightarrow 0$ の仮定のもとに, 次は同値である.

- i) 1 は $\rho(T)$ に属するか, 又は高々 k 位の pole である.
- ii) $f_{k,n}(T)$ (定理 1 で定義したもの) はある operator P_k に一様収束する.

§ 4. Peripheral spectrum.

Banach 空間上の operator T が quasi-compact であるか [9], 又は Banach lattice 上の positive operator T が $r(T)=1$ で $R(\lambda, T)$ の pole で, $R(\lambda, T)$ の $\lambda=1$ における residuum が finite rank であるならば [4], $\text{Per } \sigma(T)$ は pole のみからなること, あるいは, Banach lattice 上の positive operator T に対して, T が irreducible で $r(T)=1$ が $R(\lambda, T)$ の pole ならば, $\text{Per } \sigma(T)$ は simple pole のみからなること [5] が, 知られている。しかし, これらの逆は必ずしも成り立たない。最近, M. A. Kaashoek and T. T. West は Banach algebra の element T に対して, その $\text{Per } \sigma(T)$ が $r(T)=1$ を含み, かつ pole のみからなる必要かつ十分条件として, $A(T)$ が locally compact, semi-simple かつ strict であることを求めている ([2] の TR. III, 2.1)。そこで, ここではこの拡張として $\text{Per } \sigma(T)$ が simple pole に限らず, pole のみからなる必要かつ十分条件を求めた [8]。

定理 3

Banach 空間上の $r(T)=1$ なる operator T に対して, 次は同値である

i) $\text{Per } \sigma(T)$ は $R(\lambda, T)$ の高々 k 位の pole からなり、
 少なくとも 1 つは k 位の pole がある。

ii) $|\alpha| = 1$ なる任意の α に対して、 $C_k(\alpha T)$ は k -relatively locally compact で $\|T^n\|$ の order は n^{k-1} である。

この定理の証明に必要な補題を述べる。

補題 2.

T を Banach 空間上の $r(T) = 1$ なる operator とし、 1 は $R(\lambda, T)$ の k 位の pole とする。このとき、任意の多項式 $R(\lambda)$ に対して次式が成り立つような $L \geq 0$ が存在する。

$$r(R(T)) \leq L \|R(T)(I-T)^{k-1}\|$$

証明 $k=1$ の場合は $L=1$ で成り立つ。

$k \geq 2$ とすると、spectral set $\{1\}$ に対する spectral idempotent P_1 に対し、 $Q_{k-1} = P_1(I-T)^{k-1}$ とおくと、
 $Q_{k-1} \neq 0$ かつ $TQ_{k-1} = Q_{k-1}$ となる。これより

$$\begin{aligned} r(R(T)) &\leq r(R(T)P_1) + r(R(T)(I-P_1)) \\ &\leq (\|P_1\| / \|Q_{k-1}\| + \|(I-P_1)S_1\|) \|R(T)(I-T)^{k-1}\| \end{aligned}$$

を得る、

ここで S_1 は $I-P_1 = (I-T)^{k-1}S_1(I-P_1)$ をみたすものである。

定理3の証明

i) $\Rightarrow$ ii) Per $\sigma(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ とし, それぞれの spectral idempotent を $P_1, \dots, P_s$ とし, 又,

$Q_{j,m} = P_j (\lambda_j I - T)^m$ ($1 \leq j \leq s, 1 \leq m \leq k-1$) とおく. このとき

$$\frac{T^n}{n^{k-1}} = \sum_{j=1}^s \left\{ \frac{\lambda_j^n}{n^{k-1}} P_j + \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{n^{k-1}} \binom{n}{m} \lambda_j^{n-m} Q_{j,m} \right\} + \frac{1}{n^{k-1}} T^n (I - P_e)$$

から, $\|T^n\|$ の order が n^{k-1} であることが得られる.

次に i) の条件は T の代わりに (αT) としても成り立つので, あと, $C_k(T)$ が k -relatively locally compact であることを示せばよい. $g_n(T) \in C_k(T)$ かつ $\sup_{|\beta|=1} \|g_n(\beta T)(I - \beta T)^{k-1}\| \leq 1$ としたとき, $\{g_n(T)\}$ が収束する部分列をもつことをいう.

$$g_n(T) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(n) T_{k,i}, \quad a_i(n) \geq 0, \quad i \text{ 十分大で } a_i(n) = 0$$

と書ける. α_0 を k 位の $R(\lambda, T)$ の pole とすると, spectral mapping theorem より,

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i(n) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(n) 1_{k,i} \in \sigma(g_n(\alpha_0^{-1} T))$$

となる. 補題2を使って $\sum_{i=1}^{\infty} a_i(n) \leq L$ が言えるので,

compact 性と対角線論法から, 任意の i に対して,

$\{a_i(n_j)\}$ が収束するような増加列 $\{n_j\}$ がとれる.

n_j を n と書きなおして, 各 i に対し, $b_i = \lim_n a_i(n)$ が

存在するとしてよい。このとき、 $b_i \geq 0$ かつ $\sum_{i=1}^{\infty} b_i \leq L$ である。 P_0 を spectral set $\{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda|=1\}$ に対する spectral idempotent とし、 $S = T(I - P_0)$ とおくと、 $r(S) < 1$ で 集合 $\{\|S_{k,i}\| : i=1,2,\dots\}$ の有界性がいえて、 $\sum_{i=1}^{\infty} b_i S_{k,i}$ が $\mathcal{L}(E)$ における Cauchy sequence となる。 $D = \sum_{i=1}^{\infty} b_i S_{k,i}$ とおくと $D = \lim_n g_n(T)(I - P_0)$ が得られる。又 $\{g_n(T)P_0\}$ は TP_0 により generate される $\mathcal{L}(E)$ の有限次元の subalgebra における有界列となるので、収束する部分列をもつ。従って $g_m(T) = g_n(T)P_0 + g_n(T)(I - P_0)$ より、 $\{g_m(T)\}$ は収束する部分列をもつ。

ii) $\Rightarrow$ i) 定理 1 で定義した $f_{k,n}(T)$ は次式のようにも、書きなおせる。

$$f_{k,n}(T) = \sum_{i=0}^{n-k} b_{k,i} T_{k,i}$$

ここで

$T_{k,0} = I$ で、 $i \geq 1$ に対する $T_{k,i}$ は §2 で定義されたものである。又

$$b_{k,0} = 1 - \binom{n+k-2}{2k-1} \Bigg/ \binom{n+2k-2}{2k-1}$$

かつ、 $i \geq 1$ に対しては

$$b_{k,i} = \binom{n+k-i-2}{2k-2} \Bigg/ \binom{n+2k-2}{2k-1}$$

である。

このようにして求めた $b_{k,i}$ は, $b_{k,i} \geq 0$ かつ $\sum_{i=0}^{n-k} b_{k,i} = 1$ となり, $f_{k,n}(T)$ は $T_{k,i}$ の convex combination になっており, $\{f_{k,n}(T) - b_{k,0}\}$ は $C_k(T)$ に属している. $\|T^n\|$ の order が n^{k-1} より, 集合 $\{\|f_{k,n}(\beta T)(I - \beta T)^{k-1}\|; |\beta|=1, n=1, 2, \dots\}$ が有界となるので, $|\alpha|=1$ なる任意の α に対して, $C_k(\alpha T)$ が k -relatively locally compact から, $f_{k,n}(\alpha T)$ は収束し, 定理 2 から 1 は $\rho(\alpha T)$ に属するか, 又は $R(\lambda, \alpha T)$ の高々 k 位の pole になる. 即ち, α^{-1} は $\rho(T)$ に属するか, 又は $R(\lambda, T)$ の高々 k 位の pole となるので, i) が得られる.

順序 Banach 空間上の operator T が positive で $r(T)$ が $R(\lambda, T)$ の pole なら, それは $\text{Per } \sigma(T)$ における maximal order であることはよく知られている [6]. T が positive に対応する $A(T)$ が strict の条件を加えて, 次の定理 4 を得る.

定理 4

Banach 空間上の $r(T)=1$ なる operator T に対して次は同値である.

i) $\text{Per } \sigma(T)$ は $R(\lambda, T)$ の高々 k 位の pole からなり, 1 は order k の pole である.

ii) $|\alpha|=1$ なる任意の α に対して, $C_k(\alpha T)$ は k -relatively locally compact で, $\|T^n\|$ の order は n^{k-1} で $A(T)$ は strict である。

考察 定理 4 の $k=1$ の場合は, 補題 1 を使えば, M. A. Kaashoek and T. T. West の結果 ([2] の Th. III. 2.1) と一致することがわかる。

参考文献

- [1] N. Dunford : Spectral theory 1. Convergence to projections, Trans. Amer. Math. Soc., 54 (1943) 185 - 217.
- [2] M. A. Kaashoek and T. T. West : Locally compact semi-algebras with applications to spectral theory of positive operators. Mathematics studies 9 North-Holland 1974.
- [3] S. Karlin : Positive operators, J. Math. Mech., 8 (1959) 907 - 937.
- [4] H. P. Lotz und H. H. Schaefer ; Über einen Satz von F. Niiro und I. Sawashima, Math. Z. 108 (1968) 33 - 36.

- [5] F. Niiro and I. Sawashima; On the spectral properties of positive irreducible operators in an arbitrary Banach lattice and problems of H. H. Schaefer, Sci. Pap. Coll. Gen. Educ., Univ. Tokyo, 16 (1966) 145-183.
- [6] H. H. Schaefer; Topological vector spaces. Macmillan, New York 1966.
- [7] F. Takeo; On a pole of the resolvent of positive operators. Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ., 29 (1978), 55-59.
- [8] F. Takeo; On the peripheral spectrum of operators, Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 29 (1978), to appear.
- [9] K. Yosida; Quasi-completely continuous linear functional operators. Jap. J. Math. 15 (1939) 297-301.