

p-valently α - convex functions of order β について

和歌山大学・教育 福井 誠一 (Seiichi FUKUI)

この報告は J.Dziok と J.Stankiewicz の論文 [1] を本にして考察, 研究したものである。
[1] には若干のミスプリントがあり, 修正をしさらに α について拡張した結果を得た。

1 準備

$A(p), P \in \mathbb{N}$ を単位円板 $U = \{z; |z| < 1\}$ 内で正則な関数 $f(z)$

$$f(z) = z^p + a_{p+1}z^{p+1} + \dots$$

の集合とする。

$f(z) \in A(p)$ に対して, p-valently starlike of order α な関数を次のように定義する。

$$(1.1) \quad f(z) \in S_p^*(\alpha) \iff \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha, \quad z \in U.$$

ここに, α は $p > \alpha \geq 0$ を満たす定数である。また, 同じ条件を満たす α と $f(z) \in A(p)$ に対して, p-valently convex of order α な関数を次のように定義する。

$$(1.2) \quad f(z) \in K_p(\alpha) \iff \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \alpha, \quad z \in U.$$

さらに, p-valently α - convex of order β な関数を次のように定義する。 $f(z) \in A(p)$ に対して,

$$(1.3) \quad f(z) \in M_p(\alpha, \beta) \iff \operatorname{Re} \left\{ \alpha \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) + (1 - \alpha) \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \beta, \quad z \in U.$$

ここに, α, β は実数で β は $p > \beta$ を満たす。

[1] では, $\frac{f(z)f'(z)}{z^{2p-1}} \neq 0$ という条件を付けているが, これは (1.3) の条件があれば必然的に示される。

2 主定理

定義から直ちに, 次の結果が得られる。

定理 1. 任意の実数 α に対して, $M_p(\alpha, 0) \subset S_p^*(0)$ が成立する。

証明.

$$\operatorname{Re} \left\{ \alpha \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) + (1 - \alpha) \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0, \quad z \in U$$

のとき,

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0, \quad z \in U$$

を示せばよい。 $q(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}$ とおくと,

$$(2.1) \quad \alpha \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) + (1 - \alpha) \frac{zf'(z)}{f(z)} = q(z) + \alpha \frac{zq'(z)}{q(z)}$$

となり, $q(z)$ は U で正則かつ, $q(0) = p$ である。 $z = 0$ の近傍では $\operatorname{Re} q(z) > 0$ が成立している。今, ある $z_0 \in U$ が存在して, $\operatorname{Re} q(z) > 0, |z| < |z_0|$ かつ $\operatorname{Re} q(z_0) = 0$ になったとすると $\frac{z_0 q'(z_0)}{q(z_0)}$ は純虚数になる。Fukui [2] 参照。これより,

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \alpha \left(1 + \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} \right) + (1 - \alpha) \frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} \right\} \\ = \operatorname{Re} \left\{ q(z_0) + \alpha \frac{z_0 q'(z_0)}{q(z_0)} \right\} = 0 \end{aligned}$$

となり, 仮定に反する。よって, $\operatorname{Re} q(z_0) = 0$ となる $z_0 \in U$ は存在しない。即ち, 任意の実数 α に対して $f(z) \in S_p^*(0)$ を示している。□

注意 1. $q(z_0) \neq 0$ は仮定から示すことができる。

注意 2. [1](Theorem 1) では, $M_p(\alpha) \subset M_p(0) \equiv S_p^*(0), 0 \leq \alpha < p$, すなわち $M_p(\alpha, 0) \subset M_p(0, 0) \equiv S_p^*(0), 0 \leq \alpha < p$, としているが, この定理 1 ではすべての実数 α について成立することを示している。

定理 1 から直ちに次の結果が得られる。

系 1. $q(z) = a + p_1z + \dots$ が U で $a > 0$ ならば, 任意の実数 α について

$$(2.3) \quad \operatorname{Re} \left\{ q(z) + \alpha \frac{zq'(z)}{q(z)} \right\} > 0, \quad z \in U \\ \implies \operatorname{Re} q(z) > 0, \quad z \in U$$

が成立する。

系 2. 任意の実数 α について, $M_p(\alpha, 0) \subset S_p^*(0)$ が成立し, とくに,

$$(2.4) \quad M_p(\alpha, 0) \subset K_p(0) \subset S_p^*(0), \quad \alpha \geq 1$$

となる。

証明. $M_p(\alpha, 0) \subset K_p(0)$ のみを示せばよい。任意の $f(z) \in M_p(\alpha, 0)$ に対して

$$\operatorname{Re} \left\{ \alpha \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) + (1 - \alpha) \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0, \quad z \in U$$

が成立しているから, $\alpha \geq 1$ と定理 1 の結果から

$$(2.5) \quad \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \frac{\alpha - 1}{\alpha} \left\{ \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0, \quad z \in U$$

を得, $f(z) \in K_p(0)$ が示される。

系 3. 系 2 で, $p = 1$ とすると Miller-Mocanu-Reade [3] となる。

次の定理 A, 定理 B, 定理 C, はそれぞれ [1] の Theorem 2, Theorem 4, Theorem 3 である。
これより定理 2 が得られるのである。

定理 A.

$p > \beta \geq 0$ に対して, $f(z) \in M_p(\alpha, \beta) \Leftrightarrow$ 関数 $g(z) \in S_p^*(\beta)$ が存在して,

$$(2.6) \quad f(z) = \left\{ \frac{p}{\alpha} \int_0^z \left(\frac{g(w)}{w^p} \right)^{\frac{1}{\alpha}} w^{\frac{p}{\alpha}-1} dw \right\}^{\alpha}.$$

これは,

$$(2.7) \quad \alpha \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) + (1 - \alpha) \frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{zg'(z)}{g(z)}$$

より明らかである。

定理 B. $\alpha > 0, f(z) \in M_p(\alpha, 0)$ のとき, $\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{zk'_{p,\alpha}(z)}{k_{p,\alpha}(z)}$ が成立する。ここに,
 $\prec$ は subordination を示し, $k_{p,\alpha}(z)$ は

$$(2.8) \quad k_{p,\alpha}(z) = \left\{ \frac{p}{\alpha} \int_0^z \left(\frac{k(w)}{w^p} \right)^{\frac{1}{\alpha}} w^{\frac{p}{\alpha}-1} dw \right\}^{\alpha}$$

で定義され, $k(z) = \frac{z^p}{(1+z)^{2p}} \in S_p^*(0)$ は極値関数である。

定理 C. $\alpha > 0$ のとき, $\varphi(z) = \frac{zk'_{p,\alpha}(z)}{k_{p,\alpha}(z)}$ は $U - \{-1\}$ で正則で, U で単葉である。

定理 2. $M_p(\alpha, 0) \subset S_p^*(\gamma)$ が成立する。ここに,

$$(2.9) \quad \gamma = p \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{p}{\alpha})}{\sqrt{\pi} \Gamma(1 + \frac{p}{\alpha})}, \quad \alpha \geq p$$

で, $\Gamma(x)$ はガンマ関数を表し, この結果は sharp である。

証明は [1] と本質的に変わる所はない。証明の概要と要点だけ述べておく。

(特に、ミスプリントが多い所) 定理 B と定理 C により $\varphi(z) = \frac{zk'_{p,\alpha}(z)}{k_{p,\alpha}(z)}$ の $z = e^{i\theta}$ ($|\theta| < \pi$)
における最小値が上記の γ であることを示せばよい。

$$k_{p,\alpha}(z) = f(z) \text{ とおくと, } \varphi(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} f'(e^{i\theta})}{f(e^{i\theta})} \text{ となり,}$$

$$(2.10) \quad f(z) = \left\{ \frac{p}{\alpha} \int_0^z (1+w)^{-\frac{2p}{\alpha}} w^{\frac{p}{\alpha}-1} dw \right\}^\alpha$$

から計算していく。

$$\int_0^z = \int_0^1 + \int_1^{e^{i\theta}} \quad (z = e^{i\theta})$$

と積分を分割し,

$$\int_0^1 (1+w)^{-\frac{2p}{\alpha}} w^{\frac{p}{\alpha}-1} dw = A$$

とおく。このとき,

$$(2.11) \quad A = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{p}{\alpha})}{2^{\frac{2p}{\alpha}} \Gamma(\frac{p}{\alpha} + \frac{1}{2})}, \quad \alpha > 0$$

を得る。ここに, $\Gamma(x)$ はガンマ関数を示す。また,

$$\int_0^{e^{i\theta}} (1+w)^{-\frac{2p}{\alpha}} w^{\frac{p}{\alpha}-1} dw = iB(\theta)$$

とおくことができ,

$$(2.12) \quad B(\theta) = 2^{-\frac{p}{\alpha}} \int_0^\theta (1 + \cos u)^{-\frac{p}{\alpha}} du > 0$$

となる。これより

$$\varphi(e^{i\theta}) = \frac{\alpha B'(\theta)(A - iB(\theta))}{A^2 + B^2(\theta)}$$

ゆえに,

$$(2.13) \quad \operatorname{Re} \varphi(e^{i\theta}) = \frac{\alpha A B'(\theta)}{A^2 + B^2(\theta)} = \frac{2^{-\frac{p}{\alpha}} \alpha A}{(1 + \cos \theta)^{\frac{p}{\alpha}} (A^2 + B^2(\theta))}$$

の最小値が $\theta = 0$ でとることを示すのである。

定理 2 について次の 2 つのことを注意したい。

注意 3. $\alpha \geq p$ でなければ成立しない。特に, $\alpha = p = 1$ のときは Marx-Strohhäcker の結果,

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \text{ が } U \text{ で正則のとき, } \operatorname{Re} \left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right) > 0, z \in U$$

が成立すれば $\operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \frac{1}{2}, z \in U$ となる。

が得られる。

注意 4. 定理2と同様のことが $M_p(\alpha, \beta)$ についても考えられる。予想としてあげておく。

予想: $M_p(\alpha, \beta) < S_p^*(\gamma)$ が成立する。

ここに,

$$\gamma = \frac{2^{-\frac{2(p-\beta)}{\alpha}} \alpha}{\int_0^1 (1+t)^{-\frac{2(p-\beta)}{\alpha}} t^{\frac{p}{\alpha}-1} dt}$$

である。

参考文献

- [1] J.Dziok and J.Stankiewicz, The order of starlikeness of the p -valent α -convex functions, *Mathematyka* z.19(1996),5-12.
- [2] S.Fukui, On Jack's lemma and Miller-Mocanu's lemma, *Bull.Fac.Edu.Wakayama Univ.Nat.Sci.*,45(1995),1-7.
- [3] S.Fukui, P -valently starlike functions and convex functions について, 京都大学数理解析研究所講究録 963(1996),23-28.
- [4] S.S.Miller, P.T.Mocanu and M.O.Reade, All alpha-convex functions are univalent and starlike functions, *Proc. A.M.S.* 37(1973),553-554.
- [5] S.S.Miller, P.T.Mocanu and M.O.Reade, On the order of starlikeness of alpha convex functions, *Mathematica Cluj* 20(1978),25-30.